This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1903.

THIS ITEM HAS BEEN MICROFILMED BY
STANFORD UNIVERSITY LIBRARIES
REFORMATTING SECTION 1994. CONSULT
SUL CATALOG FOR LOCATION.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1904.

184172

Register

über

die Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

mathematisch-physikalische Klasse

aus dem Jahre 1903.

F. Bernstein, Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. Erste Mitteilung . . . . . S. 46

F. Bernstein, Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. Zweite Mitteilung . . . . . „ 304

J. v. Braun, Ein Beitrag zur Kenntniß des vierwerthigen Sauerstoffs . . . . . „ 231

V. Cuomo, Messungen der Electricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri . . . . . „ 104

Robert Fricke, Ueber die in der Theorie der automorphen Functionen auftretenden Polygoncontinua . „ 331

Ph. Furtwängler, Die Konstruktion des Klassenkörpers für solche algebraische Zahlkörper, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten und deren Idealklassen eine cyclische Gruppe vom Grade l^h bilden . . . . . „ 202

Ph. Furtwängler, Ueber die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten . . . . . „ 282

H. Gerdien, Messungen der elektrischen Leitfähigkeit der freien Atmosphäre bei 4 Ballonfahrten . . . . „ 383

Lothar Heffter, Zum Beweis des Cauchy-Goursat'schen Integralsatzes . . . . . „ 312

G. Herglotz, Zur Elektronentheorie . . . . . „ 357

R. A. Houstoun, Wirkung einer Uebergangsschicht bei Totalreflexion . . . . . „ 353

W. Kaufmann, Ueber die „Elektromagnetische Masse" der Elektronen. (Mit 1 Tafel.) . . . . . „ 90

W. Kaufmann, Berichtigung . . . . . „ 148

F. Krüger, Theorie der Polarisationscapacität . . . . „ 59

Fr. Merkel, Bemerkungen über die Fascien und Venen des männlichen Beckens . . . . . „ 142

S. Nakamura, Ueber das Gesetz der Lichtgeschwindigkeit im Turmalin . . . . . S. 343
W. Nernst, Ueber Molekulargewichtsbestimmungen bei sehr hohen Temperaturen . . . . . „ 75
E. Riecke, Beiträge zu der Lehre von der Luftelectricität.
I. Ueber die Zerstreuung der Electricität in abgeschlossenen Räumen . . . . . „ 1
II. Ueber die Zerstreuung in gleichmäßig bewegter Luft . . . . . „ 32
III. Ueber die Masse der in der Luft enthaltenen Ionen „ 39
IV. Ueber Ionenabsorption an der Oberfläche der Erde „ 83
E. Riecke, Ueber nahezu gesättigten Strom in einem von zwei koncentrischen Kugeln begrenzten Luftraume „ 149
E. Riecke, Ueber näherungsweise gesättigte Ströme zwischen planparallelen Platten . . . . . „ 236
C. Runge, Ueber die elektromagnetische Masse der Elektronen . . . . . „ 326
Rudolf Schimmack, Ueber die axiomatische Begründung der Vektoraddition . . . . . „ 317
A. Schoenflies, Ueber dem Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen . . . . . „ 21
A. Schoenflies und F. Pockels, Bericht über Plückers wissenschaftlichen Nachlaß . . . . . „ 279
K. Schwarzschild, Zur Elektrodynamik.
I. Zwei Formen des Princips der kleinsten Action in der Elektronentheorie . . . . . „ 126
II. Die elementare elektrodynamische Kraft . . . „ 132
III. Ueber die Bewegung des Elektrons . . . . . „ 245
W. Voigt, Zur magnetischen Influenz regulärer Krystalle „ 17
W. Voigt, Fragen der Krystallphysik. I. Ueber die rotatorischen Constanten der Wärmeleitung von Apatit und Dolomit . . . . . „ 87
W. Voigt, Zur Theorie der totalen Reflexion . . . . „ 121
W. Voigt, Zur Theorie des Lichtes für active Krystalle „ 155
W. Voigt, Ueber specifische optische Eigenschaften hemimorpher Krystalle . . . . . „ 186
O. Wallach, Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen. XII. . . . . „ 218

Beiträge zu der Lehre von der Luftelectricität.

Von

Eduard Riecke.

I. Ueber die Zerstreuung der Electricität in abgeschlossenen Räumen.

Vorgelegt in der Sitzung d. K. Ges. d. Wiss. vom 24. Januar 1903.

In der öffentlichen Sitzung der K. Ges. d. Wiss. am 15. Nov. des vergangenen Jahres habe ich über „neuere Anschauungen der Electricitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelectricität" gesprochen. Der allgemeine Theil des Vortrages betraf die Gegenstände, die ich in meinem Lehrbuche der Physik (II. Aufl.) im achten Buche des zweiten Bandes behandelt habe; der specielle Theil beschäftigte sich mit Anwendungen der allgemeinen Theorie auf einzelne Fragen der luftelektrischen Forschung; er beruhte auf Rechnungen, zu denen ich eben durch die Ausarbeitung des Vortrages veranlaßt worden war. Ich hatte ursprünglich die Absicht, jene Rechnungen in Anmerkungen zu dem Vortrage zu veröffentlichen. Da aber der wesentliche Inhalt des Vortrages an anderer Stelle erscheinen wird, so ziehe ich vor, jene Rechnungen in selbständiger Weise hier mitzutheilen.

1. Grundgleichungen der Theorie der Zerstreuung. Die Dichte der positiven Ionen in dem den Zerstreuungskörper umgebenden Luftraum sei $\overset{+}{N}$, die der negativen $\overset{-}{N}$; die geordneten Geschwindigkeiten der Ionen, wie sie durch äussere Kräfte oder durch Concentrationsunterschiede erzeugt werden, seien $\overset{+}{\mathfrak{g}}$ und $\overset{-}{\mathfrak{g}}$, ihre Componenten nach den Axen eines rechtwinkligen Coordinatensystems $\overset{+}{\mathfrak{g}}_x$, $\overset{+}{\mathfrak{g}}_y$, $\overset{+}{\mathfrak{g}}_z$ und $\overset{-}{\mathfrak{g}}_x$, $\overset{-}{\mathfrak{g}}_y$, $\overset{-}{\mathfrak{g}}_z$. Die Zahl der Ionen, welche

in einem ccm in jeder Sekunde neu entstehen, sei q, die Zahl der in derselben Zeit durch Wiedervereinigung verschwindenden $\alpha \overset{+}{N}\bar{N}$. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\frac{\partial \overset{+}{N}}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial(\overset{+}{N}\overset{+}{\mathfrak{g}_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\overset{+}{N}\overset{+}{\mathfrak{g}_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\overset{+}{N}\overset{+}{\mathfrak{g}_z})}{\partial z}\right\} + q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N},$$

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial(\bar{N}\bar{\mathfrak{g}_x})}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{N}\bar{\mathfrak{g}_y})}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{N}\bar{\mathfrak{g}_z})}{\partial z}\right\} + q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N}.$$

Die in Betracht kommende äußere Kraft sei eine elektrische, welche von der Ladung eines Zerstreuungskörpers und von der verschiedenen räumlichen Dichte der positiven und der negativen Ionen erzeugt wird. Ihre Componenten seien $\mathfrak{F}_x$, $\mathfrak{F}_y$, $\mathfrak{F}_z$; die absoluten Beweglichkeiten der Ionen seien U und V, ihre Diffusionskoëfficienten $\overset{+}{k}$ und $\bar{k}$, v bezeichne die Lichtgeschwindigkeit. Dann ist:

$$\overset{+}{N}\overset{+}{\mathfrak{g}_x} = vU\overset{+}{N}\mathfrak{F}_x - \overset{+}{k}\frac{\partial \overset{+}{N}}{\partial x},\quad \bar{N}\bar{\mathfrak{g}_x} = -vV\bar{N}\mathfrak{F}_x - \bar{k}\frac{\partial \bar{N}}{\partial x}.$$

. . . . . .

Substituiren wir diese Ausdrücke in den vorhergehenden Gleichungen so ergiebt sich:

$$\frac{\partial \overset{+}{N}}{\partial t} = -vU\,\mathrm{div}\,(\overset{+}{N}\mathfrak{F}) + \overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N} + q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N},$$

$$\frac{\partial \bar{N}}{\partial t} = vV\,\mathrm{div}\,(\bar{N}\mathfrak{F}) + \bar{k}\Delta\bar{N} + q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N}.$$

Die Ladung des Ions, das elektrische Elementarquantum in elektrostatischem Maaße sei ε; die Componenten der in demselben Maaße gemessenen galvanischen Strömung seien $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$. Dann gelten noch die Beziehungen:

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{F} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N} - \bar{N})$$

$$\varepsilon v(U\overset{+}{N} + V\bar{N})\mathfrak{F}_x - \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\overset{+}{k}\overset{+}{N} - \bar{k}\bar{N}) = \mathfrak{c}_x,$$

. . . . . .

2. Der Sättigungsstrom. Wir betrachten einen schalenförmigen Raum der zwischen einem inneren positiv geladenen Conduktor und einem äußeren zur Erde abgeleiteten eingeschlossen ist. Das Volumen des Hohlraumes sei Ω; dann entstehen in ihm in einer Sekunde $q\Omega$ positive und ebensoviel negative Ionen. Wir

setzen voraus, daß die Ionen in dem elektrischen Felde so schnell verschoben werden, daß der Ionenverlust durch Wiedervereinigung und durch Diffusion vernachlässigt werden kann. Sobald ein stationärer Zustand sich eingestellt hat, müssen alle in einer Sekunde entstandenen positiven Ionen in derselben Zeit durch den äußeren, alle negativen Ionen durch den inneren Conduktor abgeschieden werden. Die Dichte der negativen Ionen an der Oberfläche des inneren Conduktors sei $\bar{N}_i$, ihre Geschwindigkeit in der Richtung der inneren Normale $\bar{g}_i$; ebenso sei die Dichte der positiven Ionen an der äußeren Oberfläche $\overset{+}{N}_a$, ihre Geschwindigkeit in der Richtung der äußeren Normale $\overset{+}{g}_a$; $d\sigma_i$ und $d\sigma_a$ seien Elemente der Oberflächen. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathfrak{Q}q = \int \bar{N}_i \bar{g}_i d\sigma_i = \int \overset{+}{N}_a \overset{+}{g}_a d\sigma_a.$$

Die Mengen von negativer und von positiver Electricität, die in einer Sekunde an den inneren und an den äußeren Conduktor abgegeben werden, sind gleich $\varepsilon \mathfrak{Q}q$. Bezeichnen wir durch $\mathfrak{C}$ den in elektrostatischem Maaße gemessenen Sättigungsstrom, so ist:

$$\mathfrak{C} = \varepsilon \mathfrak{Q}q = \varepsilon \int \bar{N}_i \bar{g}_i d\sigma_i = \varepsilon \int \overset{+}{N}_a \overset{+}{g}_a d\sigma_a.$$

Ist die Dichte der negativen Ionen an der Oberfläche des inneren Conduktors konstant, so ist $\mathfrak{C} = \varepsilon \bar{N}_i \int \bar{g}_i d\sigma_i$. Die elektrische Kraft an der Oberfläche des Conduktors sei $\mathfrak{F}_i$; dann ist $\bar{g}_i = \nu V \mathfrak{F}_i$, und

$$\mathfrak{C} = \nu V \varepsilon \bar{N}_i \int \mathfrak{F}_i d\sigma_i$$

$$\mathfrak{C} = 4\pi \nu V \varepsilon e \bar{N}_i,$$

wenn e die Ladung des inneren Conduktors bezeichnet. Umgekehrt ergiebt sich:

$$\bar{N}_i = \frac{\mathfrak{C}}{4\pi \nu V \varepsilon e};$$

die Dichte der Jonen ist der Ladung des Conduktors umgekehrt proportional.

3. Der Fall kugelförmiger Conductoren. Die beiden im Vorhergehenden betrachteten Conduktoren seien koncentrische Kugeln von den Halbmessern r_i und r_a. Alle in den Gleichungen enthaltenen veränderlichen Größen sind dann Funktionen des Abstandes r von dem gemeinsamen Mittelpunkte der beiden Kugeln.

Bei Vernachlässigung der Diffusion ergeben sich die Gleichungen:

$$\operatorname{div} \mathfrak{F} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}-\bar{N}),$$
$$\varepsilon v(U\overset{+}{N}+V\bar{N})\mathfrak{F} = \mathfrak{c}.$$

Daraus folgt

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{c}}{\varepsilon v(U+V)} + \frac{V}{U+V}\cdot\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon},$$
$$\bar{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{c}}{\varepsilon v(U+V)} - \frac{U}{U+V}\cdot\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}.$$

Substituiert man diese Werthe in den Gleichungen:

$$q = vU\operatorname{div}(\overset{+}{N}\mathfrak{F}) = -vV\operatorname{div}(\bar{N}\mathfrak{F}),$$

so ergiebt sich die Differentialgleichung zur Bestimmung von $\mathfrak{F}$:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}) = 4\pi\varepsilon q\,\frac{U+V}{vUV}.$$

Nun ist:

$$\operatorname{div}\mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{F}}{r} + \frac{d\mathfrak{F}}{dr},$$

$$\operatorname{div}(\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}) = \frac{2\mathfrak{F}^2}{r^2} + \frac{3}{r}\frac{d\mathfrak{F}^2}{dr} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{F}^2}{dr^2}.$$

Wir erhalten also für den Fall des Sättigungsstromes die Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{F}^2}{dr^2} + \frac{6}{r}\frac{d\mathfrak{F}^2}{dr} + \frac{4}{r^2}\mathfrak{F}^2 = 8\pi\varepsilon q\,\frac{U+V}{vUV}.$$

Das allgemeine Integral ist:

$$\mathfrak{F}^2 = \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{vUV}r^2 + \frac{b_1}{r} + \frac{b_4}{r^4},$$

wo b_1 und b_4 Integrationskonstanten sind. Zu ihrer Bestimmung verwenden wir in erster Linie die Bedingung, daß die Dichte $\overset{+}{N}_i$ der positiven Ionen an der Oberfläche der inneren Kugel gleich Null sein muß. Man hat dann:

$$0 = \frac{\mathfrak{c}_i}{\varepsilon v(U+V)\mathfrak{F}_i} + \frac{V}{U+V}\frac{(\operatorname{div}\mathfrak{F})_i}{4\pi\varepsilon},$$
$$\bar{N}_i = \frac{\mathfrak{c}_i}{\varepsilon v(U+V)\mathfrak{F}_i} - \frac{U}{U+V}\frac{(\operatorname{div}\mathfrak{F})_i}{4\pi\varepsilon}.$$

Die Verbindung beider Gleichungen giebt:

$$\bar{N}_i = -\frac{c_i}{\varepsilon\nu(U+V)\mathfrak{F}_i}\left(1+\frac{U}{V}\right) = \frac{c_i}{\varepsilon\nu V\mathfrak{F}_i}.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{C} = 4\pi r_i^2 c_i, \quad \mathfrak{F}_i = \frac{e}{r_i^2},$$

somit:

$$\bar{N}_i = \frac{\mathfrak{C}}{4\pi\varepsilon\nu V e},$$

in Uebereinstimmung mit dem in dem vorhergehenden Abschnitt gefundenen Werthe.

Eine zweite Bedingung, welcher die Constanten b_1 und b_4 genügen müssen, ist die, daß an der Oberfläche der inneren Kugel $\mathfrak{F}_i = \frac{e}{r_i^2}$ sein muß.

Daher ergeben sich zur Berechnung von b_1 und b_4 die beiden Gleichungen:

$$\frac{b_1}{r_i} + \frac{b_4}{r_i^4} = \frac{e^2}{r_i^4} - \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV} r_i^2,$$

$$\tfrac{3}{2}\frac{b_1}{r_i} = -\frac{\mathfrak{C}}{\nu V r_i} - \frac{4\pi\varepsilon q}{3}\frac{U+V}{\nu UV} r_i^3.$$

Daraus folgt:

$$b_1 = -\tfrac{2}{3}\frac{\mathfrak{C}}{\nu V} - \frac{8\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV} r_i^3,$$

$$b_4 = e^2 + \frac{2\mathfrak{C} r_i^3}{3\nu V} + \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV} r_i^6.$$

Ferner wird:

$$\mathfrak{F}^2 = \frac{e^2}{r^4} - \frac{2}{3}\frac{\mathfrak{C}}{\nu V}\frac{1}{r}\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) + \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV} r^2\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right)^2,$$

$$\mathfrak{F}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{F} = -\frac{\mathfrak{C}}{\nu V r^2} + \frac{4\pi\varepsilon q}{3}\frac{U+V}{\nu UV} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right),$$

$$\dot{N}\mathfrak{F} = \frac{1}{3}\frac{q}{\nu U} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right), \quad \bar{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{C}}{4\pi\varepsilon\nu V r^2} - \frac{1}{3}\frac{q}{\nu V} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right).$$

Die Bedingung dafür, daß an der Oberfläche der äußeren Kugel $\bar{N}_a$ gleich Null wird, ist darnach:

(I) $$\mathfrak{C} = \frac{4}{3}\pi\varepsilon q\,(r_a^3 - r_i^3) = \varepsilon q \Omega,$$

in Uebereinstimmung mit dem früher Gefundenen. Benutzen wir diese Beziehung, so ergiebt sich

$$\text{(II)}\qquad \begin{aligned} \overset{+}{N}\mathfrak{F} &= \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon\nu U\Omega}r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right),\\ \bar{N}\mathfrak{F} &= \frac{1}{3}\frac{\mathfrak{C}}{\varepsilon\nu V\Omega}r\left(\frac{r_a^3}{r^3}-1\right). \end{aligned}$$

4. Theorie einer nicht ganz gesättigten Strömung. Die allgemeinen Gleichungen

$$\overset{+}{N}-\bar{N} = \frac{\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon},$$

$$\varepsilon\nu(U\overset{+}{N}+V\bar{N})\mathfrak{F}_x = \mathfrak{c}_x+\varepsilon\frac{\partial}{\partial x}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}),$$

. . . . . .

geben:

$$\mathfrak{F}_x\overset{+}{N} = \frac{\mathfrak{c}_x}{\nu\varepsilon(U+V)}+\frac{V}{U+V}\frac{\mathfrak{F}_x\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{\partial}{\partial x}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}),$$

$$\mathfrak{F}_x\bar{N} = \frac{\mathfrak{c}_x}{\nu\varepsilon(U+V)}-\frac{U}{U+V}\frac{\mathfrak{F}_x\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{\partial}{\partial x}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}).$$

Da im stationären Zustande $\operatorname{div}\mathfrak{c} = 0$ ist, so folgt:

$$\operatorname{div}(\overset{+}{N}\mathfrak{F}) = \frac{V}{U+V}\frac{\operatorname{div}(\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F})}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}(\overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N}-\bar{k}\Delta\bar{N}),$$

$$\operatorname{div}(\bar{N}\mathfrak{F}) = -\frac{U}{U+V}\frac{\operatorname{div}(\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F})}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}(\overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N}-\bar{k}\Delta\bar{N}).$$

Substituiert man diese Werthe in den Gleichungen:

$$\nu U\operatorname{div}(\overset{+}{N}\mathfrak{F}) = q-\alpha\overset{+}{N}\bar{N}+\overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N},$$

$$-\nu V\operatorname{div}(\bar{N}\mathfrak{F}) = q-\alpha\overset{+}{N}\bar{N}+\bar{k}\Delta\bar{N},$$

so ergiebt sich:

$$\operatorname{div}(\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}) = 4\pi\varepsilon q\frac{U+V}{\nu UV}-4\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\overset{+}{N}\bar{N}$$
$$+\frac{4\pi\varepsilon}{\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}(\Delta\overset{+}{N}+\Delta\bar{N}).$$

Zur Berechnung der Ionendichten erhält man die Formeln:

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{c}}{\varepsilon\nu(U+V)}+\frac{V}{U+V}\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}),$$

$$\bar{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{c}}{\varepsilon\nu(U+V)}-\frac{U}{U+V}\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}).$$

In den mit α, mit $\overset{+}{k}$ und mit $\bar{k}$ multiplicierten Gliedern setzen wir an Stelle von $\overset{+}{N}$ und $\bar{N}$ die Werthe

$$\overset{+}{N}_0 = \frac{q}{3\nu U}\frac{r}{\mathfrak{F}_0}\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) \text{ und } \bar{N}_0 = \frac{q}{3\nu V}\frac{r}{\mathfrak{F}_0}\left(\frac{r_a^3}{r^3}-1\right),$$

welche sich aus der Theorie des Sättigungsstromes ergeben. Wir erhalten dann die Gleichungen:

$$\frac{d^2\mathfrak{F}^2}{dr^2}+\frac{6}{r}\frac{d\mathfrak{F}^2}{dr}+\frac{4}{r^2}\mathfrak{F}^2 = 8\pi\varepsilon q\frac{U+V}{\nu UV}-8\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\overset{+}{N}_0\bar{N}_0$$
$$+\frac{8\pi\varepsilon}{\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0),$$

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)}+\frac{V}{U+V}\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0),$$

$$\bar{N}\mathfrak{F} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)}-\frac{U}{U+V}\frac{\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F}}{4\pi\varepsilon}+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0).$$

Zur Integration setzen wir:

$$\mathfrak{F}^2 = \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{VUV}r^2+\frac{\Phi_1}{r}+\frac{\Phi_4}{r^4}.$$

Zur Berechnung von Φ_1 und Φ_4 benützen wir die Gleichungen:

$$\frac{d\Phi_1}{dr}+\frac{1}{r^3}\frac{d\Phi_4}{dr} = 0.$$

$$\frac{d\Phi_1}{dr}+\frac{4}{r^3}\frac{d\Phi_4}{dr} = 8\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}r^3\overset{+}{N}_0\bar{N}_0$$
$$-\frac{8\pi\varepsilon}{\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}r^3\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0).$$

Daraus folgt:

$$\Phi_1 = -\frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int r^3\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr+\frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int r^3\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr,$$

$$\Phi_4 = \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int r^5\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr-\frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int r^5\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

Nun ist:

$$\mathfrak{F}\operatorname{div}\mathfrak{F} = \frac{2\mathfrak{F}^2}{r}+\frac{1}{2}\frac{d\mathfrak{F}^2}{dr} = \frac{4\pi\varepsilon q}{3}\frac{U+V}{\nu UV}r+\frac{3\Phi_1}{2r^3},$$

somit:

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)} + \frac{q}{3\nu U}r + \frac{3}{8\pi\varepsilon}\frac{V}{U+V}\frac{\Phi_1}{r^3} + \frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0),$$

$$\bar{N}\mathfrak{F} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)} - \frac{q}{3\nu V}r - \frac{3}{8\pi\varepsilon}\frac{U}{U+V}\frac{\Phi_1}{r^3} + \frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0).$$

An der Oberfläche der inneren Kugel gelten die Gleichungen:

$$0 = (\overset{+}{N}\mathfrak{F})_i = \frac{c_i}{\varepsilon\nu(U+V)} + \frac{q}{3\nu U}r_i + \frac{3}{8\pi\varepsilon}\frac{V}{U+V}\frac{\Phi_1'}{r_i^3} + \frac{1}{\nu(U+V)}\left\{\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0)\right\}_i$$

und

$$(\bar{N}\mathfrak{F})_i = \frac{c_i}{\varepsilon\nu(U+V)} - \frac{q}{3\nu V}r_i - \frac{3}{8\pi\varepsilon}\frac{U}{U+V}\frac{\Phi_1'}{r_i^3} + \frac{1}{\nu(U+V)}\left\{\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0)\right\}_i.$$

Ihre Verbindung giebt:

$$(\bar{N}\mathfrak{F})_i = \frac{c_i}{\nu\varepsilon V} + \frac{1}{\nu V}\left\{\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N})\right\}_i.$$

Außerdem gilt für $r = r_i$ die Gleichung $\mathfrak{F}_i^2 = \frac{e^2}{r_i^4}$,

$$\frac{e^2}{r_i^4} = \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV}r_i^2 + \frac{\Phi_1'}{r} + \frac{\Phi_4'}{r^4}.$$

Für Φ_1' und Φ_4' ergeben sich daher die Werthe:

$$\Phi_1' = -\frac{8\pi r_i^3 c_i}{3\nu V} - \frac{8\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV}r_i^3 - \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu V}r_i^3\left\{\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0)\right\}_i,$$

$$\Phi_4' = e^2 + \frac{8\pi r_i^5 c_i}{3\nu V} + \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV}r_i^6 + \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu V}r_i^5\left\{\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0 - \bar{k}\bar{N}_0)\right\}_i.$$

Wir setzen dementsprechend:

$$\Phi_1 = \Phi_1' - \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int_{r_i}^{r} r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr + \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int_{r_i}^{r} r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

$$\Phi_4 = \Phi_4' + \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int_{r_i}^{r} r^5\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr - \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int_{r_i}^{r} r^5\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

Mit Hülfe dieser Werthe ergiebt sich zunächst:

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{1}{\varepsilon\nu(U+V)}\frac{r^2\mathfrak{c}-r_i^2\mathfrak{c}_i}{r^2}+\frac{q}{3\nu U}r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right)-\frac{\alpha}{\nu U}\frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr$$
$$+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{1}{r^2}\left\{r^2\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)-r_i^2\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)\right]_i\right\}$$
$$+\frac{V(\overset{+}{k}+\bar{k})}{\nu(U+V)^2}\frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr,$$

$$\bar{N}\mathfrak{F} = -\frac{1}{\varepsilon\nu(U+V)}\frac{r^2\mathfrak{c}-r_i^2\mathfrak{c}_i}{r^2}+\frac{1}{\varepsilon\nu V}\frac{r_i^2\mathfrak{c}_i}{r^2}-\frac{q}{3\nu V}r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right)+\frac{\alpha}{\nu V}\frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr$$
$$+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{1}{r^2}\left\{r^2\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)-r_i^2\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)\right]_i\right\}$$
$$+\frac{1}{\nu V}\frac{r_i^2}{r^2}\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)\right]_i-\frac{U(\overset{+}{k}+\bar{k})}{\nu(U+V)^2}\frac{1}{r^2}\int_{r_i}^{r} r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

Die Ausdrücke vereinfachen sich zunächst dadurch, daß im stationären Zustande $r^2\mathfrak{c} = r_i^2\mathfrak{c}_i$ sein muß. Soll ferner für $r = r_a$ die Dichte der negativen Ionen gleich Null sein, so erhält man nach einer kleinen Umformung:

$$4\pi r_i^2\mathfrak{c}_i = \frac{4}{3}\pi\varepsilon q(r_a^3-r_i^3)-4\pi\varepsilon\alpha\int_{r_i}^{r_a} r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr$$
$$-\frac{4\pi\varepsilon}{U+V}\left\{Vr_a^2\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)\right]_a+Ur_i^2\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)\right]_i\right\}$$
$$+4\pi\varepsilon\frac{UV(\overset{+}{k}+\bar{k})}{(U+V)^2}\int_{r_i}^{r_a} r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

Nun ist:

$$r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0) = \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}+r^2\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right),$$

somit:

$$\int_{r_i}^{r_a} r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr = r_a^2\left[\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}+\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right]_a-r_i^2\left[\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}+\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right]_i.$$

Mit Benützung dieser Werthe ergiebt sich:

$$4\pi r_i^2\mathfrak{c}_i = \frac{4}{3}\pi\varepsilon q(r_a^3-r_i^3)-4\pi\varepsilon\alpha\int_{r_i}^{r_a} r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dr$$
$$+4\pi\varepsilon\left\{r_a^2\bar{k}\left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_a-r_i^2\overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i\right\}.$$

Bezeichnet man den Sättigungsstrom mit $\mathfrak{C}_0$, den wirklich beobachteten Strom mit $\mathfrak{C}$, so wird:

$$\text{(III)}\quad 4\pi\varepsilon\alpha\int_{r_i}^{r_a} r^2 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 dr = \mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C} + 4\pi\varepsilon\left\{r_a^2 \bar{k}\left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_a - r_i^2 \overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i\right\}.$$

Die Ausdrücke für die Ionendichten können auf die folgende Form gebracht werden:

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{q}{3\nu U} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) - \frac{\alpha}{\nu U}\frac{1}{r^3}\int_{r_i}^{r} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 dr$$
$$+\frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{1}{r^3}\left\{r^3\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr} - r_i^3\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i\right\},$$

$$\text{(IV)}\qquad \bar{N}\mathfrak{F} = \frac{q}{3\nu \bar{V}} r\left(\frac{r_a^3}{r^3}-1\right) - \frac{\alpha}{\nu \bar{V}}\frac{1}{r^3}\int_{r}^{r_a} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 dr$$
$$+\frac{\bar{k}}{\nu \bar{V}}\frac{1}{r^3}\left\{r_a^3\left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_a - r^3\frac{d\bar{N}}{dr}\right\}.$$

Die Rechnungen werden dadurch erleichtert, daß man in allen Gliedern, die mit α oder mit k multipliciert sind, an Stelle von $\mathfrak{F}$ den Werth $\mathfrak{F}' = \frac{e}{r^2}$ setzen kann. Zur Bestimmung von α erhält man dann die Gleichung:

$$4\pi\varepsilon\alpha\int_{r_i}^{r_a} r^2 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 dr = \mathfrak{C}_0 - \mathfrak{C} - \frac{4\pi\mathfrak{C}_0}{\nu e}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+\bar{V}}\frac{r_a^4+r_i^4}{\Omega}.$$

Für die durch Diffusion bedingten Correktionsglieder der Werthe von $\varepsilon\overset{+}{N}\mathfrak{F}$ und $\varepsilon\bar{N}\mathfrak{F}$ ergeben sich die Ausdrücke:

$$\frac{\varepsilon\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{1}{r^3}\left\{r^3\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr} - r_i^3\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i\right\} = \frac{\overset{+}{k}\mathfrak{C}_0}{\nu^2 U^2 \Omega e}\frac{r^4-r_i^4}{r^3},$$

$$\frac{\varepsilon\bar{k}}{\nu \bar{V}}\frac{1}{r^3}\left\{r_a^3\left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_a - r^3\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right\} = -\frac{\bar{k}\mathfrak{C}_0}{\nu^2 \bar{V}^2 \Omega e}\frac{r_a^4-r^4}{r^3}.$$

5. Die Beobachtungen von Harms[1]). Zur Prüfung der im Vorhergehenden entwickelten Theorie bietet sich ein gutes Material in den Beobachtungen, welche Harms in der physikalischen Zeitschrift veröffentlicht hat. Sie beziehen sich auf die Zer-

1) Phys. Zeitschrift, 4. Jahrg. S. 11.

streuung der Elektricität von einer Kugel mit dem Halbmesser $r_1 = 2{,}25$ cm, die in einer Glasglocke von 17000 ccm Inhalt aufgehängt war. Die Innenwand der Glocke war mit einem zur Erde abgeleiteten Drahtnetze überkleidet. Ersetzt man die Glocke durch eine Kugel von gleichem Rauminhalte, so ergiebt sich für ihren Halbmesser $r_2 = 15{,}96$ cm. Die Kapacität der inneren Kugel berechnet sich daraus zu 2,6 cm.

Die Zerstreuung wurde so beobachtet, daß die Kugel wiederholt auf ein bestimmtes Potential geladen, und daß nach Verlauf verschieden großer Zeiten die noch vorhandene Spannung mit dem Elektrometer bestimmt wurde. Harms hat seine Beobachtungen graphisch dargestellt, indem er auf einer horizontalen Linie die Zeiten, senkrecht dazu die Elektrometerausschläge auftrug. Das einem bestimmten Ausschlage s entsprechende Potential ergiebt sich nach der Formel $V = 0{,}259 \times s$.

Es wurden nun an die von Harms gezeichnete Kurve an verschiedenen Stellen Tangenten gelegt, und so die verschiedenen Werthen von s entsprechenden Werthe von ds/dt bestimmt. Diese Werthe wurden als Funktionen von s graphisch dargestellt, und es wurde dann eine Kurve gezogen, welche sich den erhaltenen Punkten in stetiger Weise so gut wie möglich anschloß. Eine Zusammenstellung der direkt berechneten und der durch graphische Ausgleichung erhaltenen Werthe von ds/dt giebt die folgende Tabelle:

s		230	190	175	150	125	100	75
$\frac{ds}{dt}$	ber.	8,78	8,50	8,18	7,73	7,43	6,88	6,39
$\frac{ds}{dt}$	ausgegl.	8,83	8,47	8,28	7,90	7,45	6,88	6,34

Aus den Werthen von s und ds/dt wurde weiter die Ladung e der inneren Kugel und die Stärke $\mathfrak{C}$ des Stromes in elektrostatischem Maaße berechnet. Es ergab sich hierfür die Tabelle:

s	V (Volt)	e	$\mathfrak{C}$
230	59.6	0.5205	0.0003330
190	49.2	0.4300	0.0003195
175	45.3	0.3960	0.0003123
150	38.9	0.3395	0.0002980
125	32.4	0.2829	0.0002810
100	25.9	0.2263	0.0002595
75	19.4	0.1697	0.0002391.

Der Sättigungsstrom $\mathfrak{C}_0$ wurde graphisch ermittelt, indem die für ds/dt gezeichnete Kurve dem Gefühl nach verlängert wurde. Auf diesem Wege, der von einer gewissen Willkür nicht frei zu sprechen ist, wurde für den Sättigungsstrom der Werth

$$\mathfrak{C}_0 = 0.0003413$$

in elektrostatischen Einheiten erhalten. Daraus und aus dem Volumen des Hohlraumes ergiebt sich

(V.) $$\underline{\varepsilon q = 201 \times 10^{-10}.}$$

Mit Hülfe der früher angegebenen Formeln wurden nun die Werthe von $\mathfrak{F}_0^2$, $\varepsilon \overset{+}{N}_0 \mathfrak{F}_0$, $\varepsilon \overset{-}{N}_0 \mathfrak{F}_0$ und von $\varepsilon \overset{+}{N}_0$ und $\varepsilon \overset{-}{N}_0$ berechnet.

Für den Coefficienten der Wiedervereinigung ergaben sich dann die im Folgenden zusammengestellten Werthe:

$s =$	230	190	175	150	125	100	75
$\frac{\alpha}{\varepsilon} =$	194000	406000	466000	510000	495000	416000	295000.

Im Mittel wird:

(VI.) $$\underline{\frac{\alpha}{\varepsilon} = 397000.}$$

Dieser Werth ist von einer ganz anderen Größenordnung als der von Mc. Clung[1]) gefundene $\frac{\alpha}{\varepsilon} = 3400$. Ueber den Grund der außerordentlichen Verschiedenheit vermag ich keine befriedigende Aufklärung zu geben. Ohne Berücksichtigung der Diffusion würde sich für $\frac{\alpha}{\varepsilon}$ der Werth 440000 ergeben.

Mit Benutzung des Werthes $\frac{\alpha}{\varepsilon} = 397000$ wurden weiter die Werthe von $\mathfrak{F}^2$, $\varepsilon \overset{+}{N}$ und $\varepsilon \overset{-}{N}$ berechnet. Die Ergebnisse der Rechnung sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt.

I. Dichte der positiven Ionen. Werthe von $\varepsilon \overset{+}{N}_0$ und $\varepsilon \overset{+}{N}_0 - \varepsilon \overset{+}{N}$.

$r =$	2,25	6	10	13	15.96
		$s = 230$			
$\varepsilon \overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	64	310	686	1270
$(\varepsilon \overset{+}{N}_0 - \varepsilon \overset{+}{N}) 10^{10}$	0	1	6	28	48

1) Mc. Clung, Philos. Magaz. 1902, Ser. 6, Vol. 3, p. 283.

		$s = 190$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	78	376	831	1540
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N})10^{10}$	0	1	12	47	84
		$s = 175$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	84	408	902	1670
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N})10^{10}$	0	1	16	60	108
		$s = 150$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	98	476	1050	1960
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N})10^{10}$	0	2	28	100	184
		$s = 125$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	118	571	1260	2330
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N}) \times 10^{10}$	0	4	48	170	306
		$s = 100$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	148	715	1580	2900
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N})10^{10}$	0	8	90	328	615
		$s = 75$			
$\varepsilon\overset{+}{N}_0 \times 10^{10}$	0	197	954	2100	3850
$(\varepsilon\overset{+}{N}_0 - \varepsilon\overset{+}{N})10^{10}$	0	18	224	784	1420

II. Dichte der negativen Ionen. Werthe von $\varepsilon\bar{N}_0$ und $\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N}$.

r	2,25	6	10	13	15.96
		$s = 230$			
$\varepsilon\bar{N} \times 10^{10}$	903	857	683	416	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	35	34	31	15	0
		$s = 190$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	1090	1040	827	504	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	60	59	51	25	0
		$s = 175$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	1190	1130	898	547	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	78	77	67	35	0

		$s = 150$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	1380	1315	1050	639	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	125	124	107	60	0
		$s = 125$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	1660	1580	1260	766	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	220	218	187	97	0
		$s = 100$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	2080	1970	1570	958	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N})10^{10}$	455	440	328	210	0
		$s = 75$			
$\varepsilon\bar{N}_0 \times 10^{10}$	2770	2630	2100	1280	0
$(\varepsilon\bar{N}_0 - \varepsilon\bar{N}) \times 10^{10}$	1020	1010	880	550	0

Ein Theil dieser Resultate ist in der beigegebenen Figur graphisch dargestellt; die Kurven 1, 2, 3 beziehen sich auf die Dichte der positiven Ionen, die Kurven 4, 5, 6 auf die der negativen. Die ausgezogenen Kurven geben die Werthe von $\varepsilon\overset{+}{N}$ und $\varepsilon\bar{N}$, die gestrichelten die von $\varepsilon\overset{+}{N}_0$ und $\varepsilon\bar{N}_0$. Die Kurven 1 und 4 gehören zu $s = 230$, die Kurven 2 und 5 zu $s = 175$, die Kurven 3 und 6 zu $s = 125$.

6. Zerstreuung in größeren Räumen. Die Gleichung

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 - 4\pi\varepsilon\alpha \int_{r_i}^{r_a} r^2 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 \, dr - \frac{4\pi\mathfrak{C}_0}{\nu e} \frac{\overset{+}{k} + \bar{k}}{U + V} \cdot \frac{r_a^4 + r_i^4}{\Omega}$$

zeigt, daß Abweichungen von dem Zustande des Sättigungsstromes aus zwei verschiedenen Gründen eintreten können; entweder weil bei gegebenem Raume Ω die Ladung e zu klein wird, oder weil bei gegebener Ladung e der Raum zu groß wird. Die bei den Versuchen von Harms hervortretenden Abweichungen werden wir dem ersten Falle unterordnen. Man kann aber leicht zeigen, daß der zweite Fall in gewisser Weise auf den ersten reduciert und mit diesem verglichen werden kann. Wir gehen zu diesem Zwecke aus von den Gleichungen:

$$\varepsilon\overset{+}{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu U} \frac{1}{r^2 \mathfrak{F}_0} (r^2 - r_i^2), \quad \varepsilon\bar{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu V} \frac{1}{r^2 \mathfrak{F}_0} (r_a^2 - r^2).$$

Die Werthe von $\mathfrak{F}_0^2$ unterscheiden sich im allgemeinen nur sehr wenig von $\frac{e^2}{r^4}$. Bei den Beobachtungen von Harms beträgt für $s = 230$ die Abweichung weniger als $\frac{1}{800}$, für $s = 125$ weniger als $\frac{1}{100}$. Wir können daher für die folgende Betrachtung ohne Bedenken

$$\mathfrak{F}_0 = \frac{e}{r^2}$$

setzen und erhalten dann:

$$\varepsilon \overset{+}{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu U e}(r^3 - r_i^3), \quad \varepsilon \bar{N} = \frac{q\varepsilon}{3\nu V e}(r_a^3 - r^3).$$

Multiplicieren wir Zähler und Nenner dieser Ausdrücke mit dem Faktor x^3, so ergiebt sich:

$$\varepsilon \overset{+}{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu U x^3 e}(x^3 r^3 - x^3 r_i^3), \quad \varepsilon \bar{N} = \frac{q\varepsilon}{3\nu V x^3 e}(x^3 r_a^3 - x^3 r^3).$$

Setzen wir:

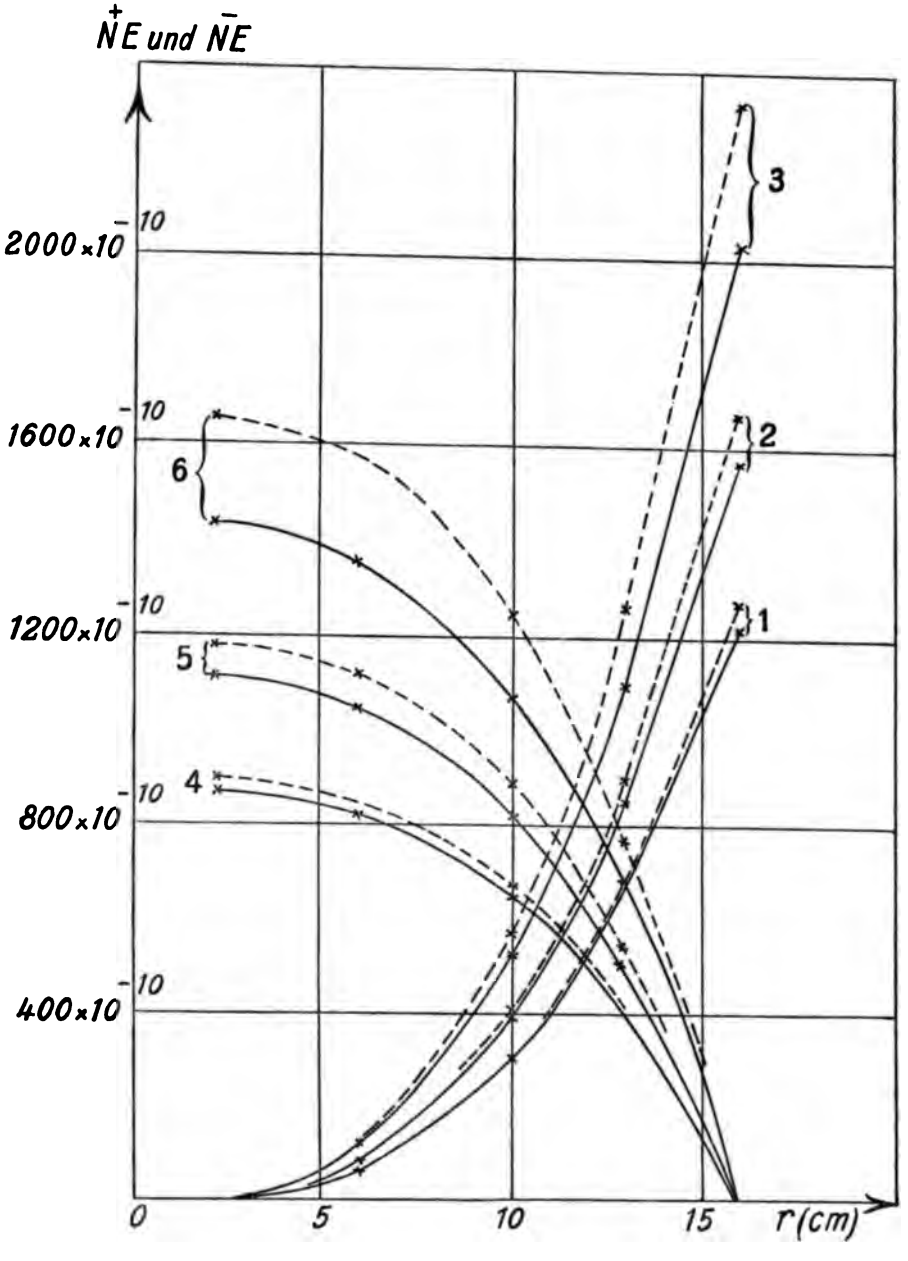
$$\mathfrak{E} = x^3 e, \quad R = xr,$$

so ergeben sich die Formeln:

$$\varepsilon \overset{+}{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu U \mathfrak{E}}(R^3 - R_i^3), \quad \varepsilon \bar{N}_0 = \frac{q\varepsilon}{3\nu V \mathfrak{E}}(R_a^3 - R^3).$$

Bei ähnlichen Hohlräumen, die zwischen concentrischen Kugeln eingeschlossen sind, haben die Ionendichten an entsprechenden Punkten gleiche Werthe, wenn die Ladungen der inneren Kugeln sich verhalten wie die Inhalte der Räume.

Wollte man in einem Hohlraume, der von zwei koncentrischen Kugeln von den Halbmessern $R_i = 22{,}5$ cm und $R_a = 160$ cm begrenzt ist, die Ionendichten erhalten, die wir bei der Berechnung der Versuche von Harms für $s = 230$ gefunden haben, so müßte die Ladung der inneren Kugel auf 520 elektrostatische Einheiten, ihr Potential auf 5960 Volt gebracht werden.


$\dot{N}E$ und $\bar{N}E$
2000×10⁻¹⁰
1600×10⁻¹⁰
1200×10⁻¹⁰
800×10⁻¹⁰
400×10⁻¹⁰
0
5
10
15
r(cm)
1
2
3
4
5
6

Zur magnetischen Influenz regulärer Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 10. Januar 1903.

In einer früheren Arbeit[1]) habe ich mich mit der magnetischen Influenz solcher insbesondere regulärer Krystalle beschäftigt, bei denen das erregte magnetische Moment der Feldstärke nicht proportional ist. Um die Betrachtung nicht zu sehr zu complici-ren wurde aber nur der durch die vorliegenden Beobachtungen anscheinend allein betroffene Fall verfolgt, daß der Krystall in magnetischer Hinsicht centrisch symmetrisch wäre, also durch entgegengesetzt gleiche Felder auch entgegengesetzt gleiche Momente erhielte.

Herr Sano[2]) hat das analoge Problem ohne diese beschränkende Annahme für alle regulären Krystalle der holoedrischen, der hemimorph- und enantiomorph-hemiedrischen Gruppen des regulären Systemes durchgeführt, und seine Formeln gehen bei Einführung der erwähnten Beschränkung in die von mir aufgestellten über. Ich will hier darauf hinweisen, daß auch für die von ihm nicht erledigten Fälle der paramorphen (oder pentagonalen) Hemiedrie und der Tetartoedrie des regulären Systemes sich das Schema für das Magnetisirungspotential leicht angeben läßt.

Diese Gruppen sind characterisirt durch die Existenz dreier gleichwerthiger zu einander normaler zweizähliger Axen, wobei die Gleichwerthigkeit so zu verstehen ist, dass mit ihnen eine dreizählige Axe parallel der Mittellinie des durch sie begrenzten Octanten verbunden ist.

---

1) W. Voigt, Gött. Nachr. 1900, S. 331.

2) S. Sano, Phys. Zeitschr., Bd. 4, S. 8, 1902.

Bezeichnet man die Feldcomponenten nach den drei zweizähligen Axen X, Y, Z mit A, B, C, so ist diese Eigenschaft ausgesprochen in den Relationen

$$1)\quad \varphi(A, B, C) = \varphi(B, C, A) = \varphi(C, A, B) = \varphi(A, -B, -C).$$

Ihnen genügt jede Function von A^2, B^2, C^2, die bei cyclischer Vertauschung ihrer Argumente in sich selbst übergeht, und sie behält diese Eigenschaft, wenn man ihr ABC als Factor zufügt. Somit kann gesetzt werden

$$2)\quad \varphi(A, B, C) = \varphi_1(A^2 \sim B^2 \sim C^2) + ABC\,\varphi_2(A^2 \sim B^2 \sim C^2),$$

wobei das Symbol $A^2 \sim B^2 \sim C^2$ die cyclische Vertauschbarkeit von A^2, B^2, C^2 ausdrücken soll.

Denkt man φ_1 und φ_2 durch Potenzreihen dargestellt und versteht unter $\varkappa_2$ Constanten, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
3)\quad \varphi_1 = {} & \varkappa_0 + \varkappa_1(A^2+B^2+C^2) \\
& + \varkappa_2(A^4+B^4+C^4) + \varkappa_2'(B^2C^2+C^2A^2+A^2B^2) \\
& + \varkappa_3(A^6+B^6+C^6) + \varkappa_3'(A^4B^2+B^4C^2+C^4A^2) \\
& + \varkappa_3''(A^4C^2+B^4A^2+C^4B^2) + \varkappa_3'''A^2B^2C^2 \\
& + \varkappa_4(A^8+B^8+C^8) + \varkappa_4'(A^6B^2+B^6C^2+C^6A^2) \\
& + \varkappa_4''(A^6C^2+B^6A^2+C^6B^2) + \varkappa_4'''(B^4C^4+C^4A^4+A^4B^4) \\
& + \varkappa_4''''(A^4B^2C^2+B^4C^2A^2+C^4A^2B^2) + \cdots,
\end{aligned}$$

und für φ_2 folgt ein analoger Ausdruck mit anderen Constanten.

Die drei von Herrn Sano behandelten Gruppen lassen sich als specielle Fälle der vorstehend erledigten auffassen, da sie durch zwei zu einander normale vierzählige Axen characterisirt werden, und solche Axen einander nothwendig gleichwerthig sind, auch eine dritte zu ihnen normale gleichwerthige, resp. eine gegen alle drei gleichgeneigte dreizählige Axe zur Folge haben. Der Uebergang geschieht, indem man zu den Bedingungen 1) noch die Bedingung

$$4)\qquad \varphi(A, B, C) = \varphi(A, \pm C, \mp B)$$

hinzufügt.

Hieraus ergiebt sich, daß φ_1 auch bei der cyclischen Vertauschung $A^2 \sim C^2 \sim B^2$ und somit bei jeder Vertauschung zwischen A^2, B^2, C^2 in sich übergehen muss, und daß φ_2 bei der Vertauschung von B^2 mit C^2 und C^2 mit B^2 sein Vorzeichen wechseln muß. Dies liefert aus 2) die von Herrn Sano angegebene Form

5) $$\varphi(A, B, C) = \varphi(A^2 \parallel B^2 \parallel C^2) + ABC(B^2 - C^2)(C^2 - A^2)(A^2 - B^2)\,\varphi_2'(A^2 \parallel B^2 \parallel C^2),$$

wobei das Symbol $A^2 \parallel B^2 \parallel C^2$ das symmetrische Vorkommen von $A^2 B^2 C^2$ bedeuten soll.

Die in 3) angegebene Function φ_1 wird symmetrisch, wenn $\varkappa_3' = \varkappa_3''$, $\varkappa_4' = \varkappa_4''$, ... ist. Die Reihe der ungeraden Glieder in 5) beginnt mit dem Gliede neunten Grades; sie würde also in den Ausdrücken für die Momente nur Antheile vom achten und von höherem Grade liefern. Da ich nun in der früheren Arbeit die Discussion nur bis zu den Gliedern siebenten Grades erstreckt habe, so ist die dort eingeführte beschränkende Annahme magnetischer centrischer Symmetrie factisch einflußlos gewesen; die Resultate hätten sich ebenso gestaltet, wenn die Annahme nicht gemacht worden wäre.

Unter den Krystallgruppen, auf welche die Ausdrücke 2) und 5) für das Magnetisirungspotential anwendbar sind, befindet sich je eine mit einem Centrum der Symmetrie; bei 5) ist es die holoedrische, bei 2) die paramorph-hemiedrische Gruppe. Die zweiten Glieder der betreffenden Ausdrücke ergeben Antheile der magnetischen Momente, die bei einer Umkehrung des magnetischen Feldes ihre Vorzeichen nicht wechseln, die also eine acentrische Erregung repräsentiren. Es erscheint wünschenswerth, klar zu stellen, auf welche Weise eine solche Wirkung mit einem Centrum der krystallographischen und physikalischen Symmetrie vereinbar ist.

Das zweite Glied des Ausdruckes 5) verschwindet in jedem Octanten außer auf den Begrenzungsebenen noch in den Halbirungsebenen der Kantenwinkel, d. h. bei einer Darstellung auf der Kugel auf den in der nebenstehenden Figur 1 verzeichneten Curven. Diese Curven begrenzen Felder von zweierlei Habitus, die durch α und β unterschieden sind. In den Feldern α besitzt das betrachtete Glied des Ausdruckes 5) das entgegengesetzte Vorzeichen wie in β; dies ist begreiflich, da es sich um einen rotatorischen Vorgang handelt, und die Felder α sich zu den Feldern β verhalten wie eine positive zu einer negativen Rotation. Den Feldern α liegen aber Felder β diametral gegenüber, und so erklärt sich das Bestehen einer acentrischen Magnetisirung bei den centrischen Krystallen der holoedrischen Gruppe.

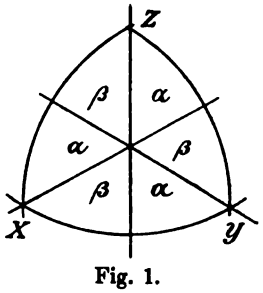


Fig. 1.

Das zweite Glied des Ausdruckes 2) verschwindet nur auf

den Grenzen der Octanten und besitzt im Innern benachbarter Octanten α und β entgegengesetzte Vorzeichen. Aber auch hier haben die Felder α und β entgegengesetzten Rotationscharacter. Um dies zu erkennen, hat man zu berücksichtigen, daß bei der in Betracht kommenden Gruppe der paramorphen Hemiedrie die Coordinaten- oder Hauptaxen zweizählig sind, wie das in Figur 2 die eingetragenen Pfeile andeuten. Dieser entgegengesetzte Rotationscharacter erklärt ein verschiedenes magnetisches Verhalten der Felder α und β, und, da wiederum je Octanten α und β einander diametral gegenüber liegen, auch die acentrische Magnetisirung.

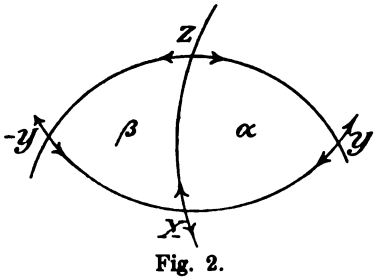


Fig. 2.

Göttingen, Januar 1903.

Ueber den Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen.

Von

A. Schoenflies in Königsberg i./Pr.

(Vorgelegt von F. Klein).

Als ein Haupttheorem aus der Theorie der Punktmengen bezeichne ich folgenden, zuerst von Herrn G. Cantor[1]) ausgesprochenen Satz:

> Ist P eine beliebige Punktmenge und ist ihre Ableitung P' von höherer als der ersten Mächtigkeit, so giebt es eine bestimmte kleinste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß die αte Ableitung $P^{(\alpha)}$ eine perfecte Menge ist; überdies ist $P' = R + P^{(\alpha)}$, wo R eine abzählbare Menge ist.

Beweise dieses Satzes, der sowohl für die Theorie der Punktmengen selbst, wie auch für ihre Anwendungen principielle Bedeutung hat, sind in ziemlich übereinstimmender Form von den Herren J. Bendixson[2]) und G. Cantor[3]) gegeben worden. Sie benutzen beide die transfinite Zahl Ω, die bekanntlich als erste Zahl der dritten Zahlklasse bezeichnet wird, und die auf dem Begriff der Gesamtheit aller Zahlen der zweiten Zahlklasse beruht. Nun ist aber der Begriff dieses Ω ein für den Satz, und soweit ich sehen kann, auch für die eigentliche Theorie der Punktmengen fremdes Hilfsmittel, das aus dem Endresultat der Beweise immer wieder herausfällt. Auch darf ich wohl bemerken, daß die

---

1) Math. Ann. Bd. 21, p. 575.
2) Acta math. Bd. 2, p. 415.
3) Math. Ann. Bd. 23, p. 467.

Zahl Ω, resp. der Begriff der Gesamtheit aller Zahlen der zweiten Klasse, bisher nicht allgemein als wohlberechtigtes mathematisches Object anerkannt worden ist; man kann daher die Forderung stellen, den Satz auf eine einfachere und ihm natürlichere Grundlage zu stellen. Die Möglichkeit eines Beweises, der die Zahl Ω nicht zu Rathe zieht, habe ich in meinem unlängst veröffentlichten Bericht über Mengenlehre bereits aufgezeigt [1]; ich folge einer von anderer Seite ausgegangenen Anregung, wenn ich hier zeige, wie ein solcher Beweis bei ausführlicher Darstellung sich gestaltet. Es war hierzu nichts weiteres nötig, als die a. a. O. angedeuteten Schlüsse und Ueberlegungen ausführlich darzulegen und in eine zwingende Form zu bringen.

Der von Herrn Cantor zuerst nur für die Ableitung P' ausgesprochene Satz gilt bekanntlich auch für jede abgeschlossene Menge Q und deren Ableitungen. Ich ziehe daher vor, den Satz direct für solche Mengen zu formuliren und abzuleiten. Gerade dieser Weg liefert sozusagen von selbst einen Beweis, wie er der obigen Forderung entspricht. Dies wird dadurch erreicht, daß man nicht die Menge Q selbst, sondern vielmehr die zu jeder abgeschlossenen Menge zugehörige abzählbare Menge $D = \{\delta\}$ der punktfreien Bereiche zum Hauptgegenstand der Betrachtung macht. Eine noch weiter gehende Verallgemeinerung des Satzes hat Herr R. Baire [2] angegeben; auch sie kann auf dem eben genannten Wege bewiesen werden.

Da es sich nur darum handelt, die Beweismethode darzulegen, so beschränke ich mich an dieser Stelle auf lineare Mengen. Die Ausdehnung des Beweises auf ebene und räumliche Mengen unterliegt keinerlei Schwierigkeit, wie aus den Entwickelungen ersichtlich ist, die ich in meinem „Bericht“ über ebene Mengen ausführlich angestellt habe [3].

Im Mittelpunkt der Cantorschen Theorie der transfiniten Zahlen steht der folgende grundlegende Satz:

I. Jede transfinite Zahl der zweiten Klasse ist Ordnungstypus einer wohlgeordneten abzähl-

---

1) Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten (enthalten im Jahresber. d. deutsch. Math. Ver. Bd. 8), p. 65 u. 81.

2) Ann. di mat. (3) Bd. 3, p. 51.

3) A. a. O. p. 81 ff.

baren Menge, insbesondere der Zahlen 1, 2, 3 ...; umgekehrt stellt auch jeder bestimmte Ordnungstypus einer wohlgeordneten abzählbaren Menge eine bestimmte transfinite Zahl der zweiten Klasse dar.

Dieser Satz, der die Definition der transfiniten Zahlen enthält, kann geradezu als ein Teil der axiomatischen Grundlagen der transfiniten Mengenlehre betrachtet werden[1]). Er bildet zugleich das alleinige transfinite Beweiselement, dessen ich für die folgenden Beweise bedarf. Ich bemerke noch, daß die Ordnung der Zahlen 1 2 3 ... dann als eine bestimmte anzusehen ist, wenn für jede dieser Zahlen die auf sie folgende bekannt resp. bestimmbar ist[2]). Alle folgenden Betrachtungen gelten also nur unter dieser Voraussetzung, die aber, wenn es sich um das Auftreten von Punktmengen bei bestimmten Problemen handelt, auch stets erfüllt ist.

Hieraus ziehe ich noch eine Folgerung, die ich nur deshalb ausdrücklich ableite, um zu zeigen, daß sie keiner andern Voraussetzung bedarf, als des obigen Satzes, resp. der in ihm enthaltenen Definition.

II. Es sei irgend eine wohldefinirte und wohlgeordnete Menge abnehmender positiver Zahlen gegeben, so daß also für jede Zahl der Menge die auf sie folgende bekannt oder bestimmbar ist, so ist diese Menge abzählbar und ihr Ordnungstypus wird durch eine bestimmte Zahl der zweiten Klasse dargestellt.

Gemäß der Cantorschen Theorie der wohlgeordneten Mengen[3]) lautet nämlich der Anfang der gegebenen Zahlenmenge jedenfalls folgendermaßen.

$$1) \qquad a_1 > a_2 > a_3 > \cdots > a_\omega > a_{\omega+1} > \cdots > a_\beta > \cdots$$

Man führe nun durch die Gleichungen

$$a_\nu - a_{\nu+1} = d_\nu, \ldots a_\beta - a_{\beta+1} = d_\beta, \ldots$$

die Zahlen

$$2) \qquad d_1, d_2, d_3 \ldots d_\omega, d_{\omega+1}, \ldots d_\beta \ldots$$

---

1) Vgl. besonders Math. Ann. Bd. 21, p. 576 ff. u. Bd. 49, p. 21 ff.

2) Vgl. die bezüglichen Ausführungen von Herrn G. Cantor, Math. Ann. 20, p. 114.

3) Math. Ann. 49, p. 207. Vgl. auch meinen obengenannten Bericht, p. 36 ff.

ein. Von ihnen ist nicht allein jede einzelne endlich und positiv, sondern es ist auch die Summe beliebig vieler von ihnen kleiner als a_1. Hieraus folgt in bekannter Schlußweise, daß sie nur eine abzählbare Menge bilden können. Falls man nämlich die gegen Null convergirenden Größen

$$\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \varepsilon_3 > \cdots > \varepsilon_\nu > \cdots$$

beliebig annimmt, so giebt es nur eine endliche Menge von Zahlen d_i, die zwischen ε_λ und $\varepsilon_{\lambda+1}$ liegen, so daß also

$$\varepsilon_\lambda \geqq d_i > \varepsilon_{\lambda+1}$$

ist, und man kann daher die Zahlen d_i so in eine Reihe

$$3) \qquad d', d'', d''', \ldots d^{(\nu)}, \ldots$$

ordnen, daß jede nicht größer ist, als die vorhergehende. Von dieser Reihe 3) stellt aber die Reihe 2) einen bestimmten Ordnungstypus dar. Es giebt daher auch eine transfinite Zahl der zweiten Klasse, die diesem Ordnungstypus entspricht.

Nunmehr gehen wir zum Beweis der bezüglichen Theoreme über Punktmengen über.

Theorem A. Für jede lineare abgeschlossene Menge Q giebt es eine bestimmte kleinste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, sodaß die αte Ableitung $Q^{(\alpha)}$ entweder Null oder eine perfecte Menge ist, und es ist $Q = R + Q^{(\alpha)}$, wo R eine abzählbare Menge ist.

Für den Beweis nehmen wir zunächst an, daß Q nirgends dicht und naturgemäß nicht perfect ist. Sei τ das Gesamtintervall, in dem Q enthalten ist, sodaß also die Endpunkte von τ zu Q gehören; ferner sei

$$4) \qquad D = \{\delta_\nu\} = \delta_1, \delta_2, \delta_3, \ldots \delta_\nu, \ldots$$

die der Größe nach geordnete zu Q gehörige Intervallmenge, deren Intervalle also im Innern von Punkten von Q frei sind, während die Endpunkte der Intervalle und deren Grenzpunkte die Menge Q definiren [1]). Man spalte nun, analog zum Cantorschen Beweis, Q in die Teilmengen

1) Vgl. meinen oben erwähnten Bericht, p. 75 ff.

5) $$Q = Q_i + Q^{(1)},$$

wo Q_i die isolirten Punkte enthält, und $Q^{(1)}$ die Ableitung von Q ist. Ist dann q_i ein Punkt von Q_i, so ist er entweder Endpunkt der Strecke τ, und damit Endpunkt eines Intervalles δ_i, oder er ist innerer Punkt von τ und alsdann gemeinsamer Endpunkt zweier benachbarten Intervalle δ_i und δ_k.

Da nun Q keine perfecte Menge ist, so können nicht sämtliche Endpunkte der Intervalle δ_i Grenzpunkte von Q sein. In der geordneten Menge $D = \{\delta_\nu\}$ giebt es daher notwendig ein erstes Intervall von der Art, daß mindestens einer seiner Endpunkte der Menge Q_i angehört; es sei δ_λ. Gehören beide Endpunkte von δ_λ zu Q_i, so sei q_i einer von ihnen; nur mit der Maßgabe, daß q_i ein innerer Punkt von τ sein möge. Er ist dann gemeinsamer Endpunkt zweier Intervalle δ_λ und $\delta_{\lambda'}$, wo $\lambda' > \lambda$ ist. Es ist dann auch das Intervall $\delta_\lambda + \delta_\chi$ von Punkten von $Q^{(1)}$ frei. Ist $\delta_\lambda + \delta_{\lambda'}$ noch nicht ein zu $Q^{(1)}$ gehöriges Intervall, so muß wieder mindestens einer seiner Endpunkte Punkt von Q_i sein; es sei q_i' ein solcher Punkt, der wieder innerer Punkt von τ sein möge. Er ist alsdann gemeinsamer Endpunkt von $\delta_\lambda + \delta_{\chi'}$ und einem Intervall $\delta_{\lambda''}$, und es ist auch $\delta_\lambda + \delta_{\lambda'} + \delta_{\lambda''}$ von Punkten von $Q^{(1)}$ frei. Falls auch dieses Intervall noch nicht ein zu $Q^{(1)}$ gehöriges Intervall ist, schließt man in derselben Weise weiter, und gelangt nach einer endlichen oder abzählbaren Reihe von Schritten zu einem Intervall, das entweder keinen Endpunkt besitzt, der Punkt von Q_i ist; oder aber, falls es einen solchen Endpunkt besitzt, so kann dies kein innerer Punkt von τ sein. Im ersten Fall ist es ein zu $Q^{(1)}$ gehöriges Intervall, das mit $\delta_\lambda^{(1)}$ bezeichnet werden soll; im zweiten ergiebt sich ein ebenfalls von Punkten von $Q^{(1)}$ freies Intervall τ_λ, das in einem Endpunkt von τ beginnt, und bewirkt, daß das Gesamtintervall von $Q^{(1)}$ höchstens die Strecke $\tau - \tau_\lambda$ sein kann.

Man denke sich jetzt aus der Menge D die Intervalle

$$\delta_{\lambda'},\ \delta_{\lambda''},\ \delta_{\lambda'''},\ \ldots$$

getilgt. Giebt es dann unter den übrigbleibenden Intervallen noch solche, von denen mindestens ein Endpunkt zu Q_i gehört, so sei δ_μ das erste, wo $\mu > \lambda$ ist. Mit diesem Intervall kann man in derselben Weise, wie eben, eine Reihe von Intervallen

$$\delta_\mu,\ \delta_{\mu'},\ \delta_{\mu''},\ \ldots$$

definiren, die in ihrer Gesamtheit ein zu $Q^{(1)}$ gehöriges Intervall

$\delta_\mu^{(1)}$ liefern, oder zu einem Intervall τ_μ führen, das bewirkt, daß das Gesamtintervall von $Q^{(1)}$ höchstens $\tau - \tau_\mu$, resp. $\tau - \tau_\lambda - \tau_\mu$ sein kann. Man tilge aus D jetzt auch die Intervalle

$$\delta_{\mu'}, \delta_{\mu''}, \delta_{\mu'''} \ldots \ldots,$$

so kann es in der so reducirten Menge wieder ein erstes Intervall δ_ν geben, das analog zu den Intervallen

$$\delta_{\nu'}, \delta_{\nu''}, \delta_{\nu'''} \ldots$$

führt, u. s. w.

Wir bestimmen nunmehr die Beziehung zwischen der Menge D und der zu $Q^{(1)}$ gehörigen Intervallmenge $D^{(1)}$ folgendermaßen. Ein Intervall δ_ι von D kann zugleich Intervall von $D^{(1)}$ sein; als solches bezeichnen wir es durch $\delta_\iota^{(1)}$. Es kann zweitens ein Intervall δ_λ sein, das zu einem Intervall $\delta_\lambda^{(1)}$ oder zu einem Intervall τ_λ führt. Alsdann können im ersten Fall in $D^{(1)}$ die sämtlichen Intervalle mit den Indices

$$\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$$

nicht auftreten; im zweiten außerdem auch dasjenige mit dem Index λ selbst. Das gleiche gilt für die analogen Intervalle δ_μ, $\delta_\nu \ldots$ Der Uebergang von D zu $D^{(1)}$ vollzieht sich also in der Weise, daß aus der Reihe der Zahlen $1\,2\,3 \ldots \nu \ldots$ eine wohldefinirte Menge ausscheidet, so daß in $D^{(1)} = \{\delta^{(1)}\}$ nur die übrigen Zahlen als Indices von Intervallen auftreten. Die so definirte, der Größe nach geordnete Menge der ausscheidenden Zahlen sei Δ; sie enthält mindestens eine Zahl.

Die Menge $Q^{(1)}$ spalte man jetzt mittelst der Gleichung

$$6) \qquad Q^{(1)} = Q_\iota^{(1)} + Q^{(2)}$$

in die isolirten Punkte $Q_\iota^{(1)}$ und die Ableitung $Q^{(2)}$. Mit ihr operire man in derselben Weise, wie soeben mit $Q^{(1)}$. Irgend ein Intervall $\delta_\iota^{(1)}$ von $D^{(1)}$ ist dann entweder zugleich ein zu $Q^{(2)}$ gehöriges Intervall und werde als solches durch $\delta_\iota^{(2)}$ bezeichnet; oder aber dies ist nicht der Fall und alsdann führt es zu einer endlichen oder abzählbaren Menge von Zahlen, die in der zu $Q^{(2)}$ gehörigen Intervallmenge $D^{(2)} = \{\delta_\nu^{(2)}\}$ als Indices nicht auftreten. Man erhält so eine Ziffernmenge Δ_1, so daß $D^{(2)}$ nur solche Intervalle enthält, deren Indices nicht Zahlen von Δ resp. Δ_1 sind.

In dieser Weise kann man fortfahren. Es seien

$$7) \qquad Q_\iota, Q_\iota^{(1)}, Q_\iota^{(2)}, \ldots Q_\iota^{(\omega)}, \ldots Q_\iota^{(\beta)}, \ldots$$

die isolirten Mengen, die bei fortgesetzter Zerlegung auftreten, und

$$8) \qquad \Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_\omega, \ldots \Delta_\beta, \ldots$$

die ihnen entsprechenden Zahlenmengen. Dem vorstehenden gemäß ist jedes Δ_β immer dann vorhanden, wenn die Menge $Q_i^{(\beta)}$ nicht Null ist. Wenn nun eine Menge Δ_β mehr als eine Zahl enthält, so wollen wir in der Menge

$$M = \{\nu\} = 1, 2, 3, \ldots \nu, \ldots$$

der natürlichen Zahlen alle diejenigen streichen, die in Δ_β auf die erste Zahl folgen. Wird dies für jedes Δ_β ausgeführt, so reducirt sich die Menge M auf eine ebenfalls abzählbare Menge M'; und die ersten Zahlen aller Δ_β, resp. der Reihe 8) bilden dann eine bestimmte wohldefinirte und wohlgeordnete Anordnung der Zahlen von M'. Gemäß Satz I besitzt daher diese Anordnung und damit auch die Reihe 8) einen Ordnungstypus, dem eine bestimmte Zahl der ersten oder zweiten Zahlklasse entspricht. Es giebt daher auch eine kleinste Zahl α, so daß Δ_α in der Reihe 8) nicht mehr vorkommt. Es ist alsdann auch

$$9) \qquad Q_i^{(\alpha)} = 0, \qquad \text{also} \qquad Q^{(\alpha)} = Q^{(\alpha+1)},$$

wo $Q^{(\alpha)}$ entweder Null sein kann oder eine perfecte Menge darstellt. Man erhält also in bekannter Weise

$$10) \qquad Q = \Sigma Q_i^{(\beta)} + Q^{(\alpha)} = R + S,$$
$$\beta = 0,1,2 \cdots \omega, \cdots < \alpha$$

wo $S = 0$ oder eine perfecte Menge ist und R eine abzählbare Menge darstellt. Damit ist Theorem III für diese Menge Q erwiesen.

Ist Q keine nirgends dichte, sondern eine beliebige lineare abgeschlossene Menge, so zerfällt das Gesamtintervall τ, in dem sie enthalten ist, in je eine endliche oder abzählbare Menge von Teilintervallen

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \qquad \text{resp.} \qquad \tau_1', \tau_2', \tau_3' \ldots,$$

so daß Q in den ersten nirgends dicht, in den letzten überall dicht ist und daher deren sämtliche Punkte enthält. Ist dann Q_ν die auf τ_ν enthaltene nirgends dichte Teilmenge von Q, so gilt der Satz für sie und es giebt eine erste Zahl α_ν, so daß $Q_\nu^{(\alpha_\nu)}$ Null

oder perfect ist. Bezeichnen wir noch die auf τ'_μ liegende Teilmenge von Q durch P_μ und setzen

$$11) \qquad Q_\nu = R_\nu + S = R_\nu + Q_\nu^{(\alpha_\nu)},$$

so folgt

$$12) \qquad Q = \Sigma R_\nu + \mathfrak{M}\{P_\mu, Q_\nu^{(\alpha_\nu)}\} = R + S,$$

wo R abzählbar ist, $\mathfrak{M}$ die allen P_μ und $Q_\nu^{(\alpha_\nu)}$ gemeinsame Menge bedeutet, und $S = Q^{(\alpha)}$ ist, wenn α die größte der Zahlen α_ν resp. die durch alle α_ν bedingte Limeszahl ist.

Theorem B. Ist Q eine lineare abgeschlossene Menge, Q_1 eine abgeschlossene Teilmenge von Q_1, die von Q verschieden ist, Q_2 eine analoge Teilmenge von Q_1, und setzt man die Bildung von Teilmengen nach irgend einem bestimmten Gesetz fort, sodaß also in der Reihe der so entstehenden Teilmengen

$$13) \qquad Q, Q_1, Q_2, \ldots Q_\nu, \ldots Q_\omega, Q_{\omega+1}, \ldots Q_\beta \ldots$$

zu jedem Q_β eine bestimmte wohldefinirte Teilmenge $Q_{\beta+1}$ gehört, so giebt es eine kleinste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse von der Art, daß Q_α entweder Null oder eine perfecte Menge ist.

Dieses Theorem, das von Herrn R. Baire[1]) unlängst ausgesprochen und nach der Bendixson-Cantorschen Methode bewiesen wurde, läßt sich gleichfalls auf einem vom Begriff Ω unabhängigen Wege ableiten; nur ist das constructive Verfahren, das für den vorigen Beweis benutzt wurde, durch ein etwas allgemeineres zu ersetzen[2]).

Wir nehmen zunächst wieder Q als nirgends dicht an und nennen τ das Intervall, in dem Q enthalten ist; $D = \{\delta_\nu\}$ sei die zugehörige Intervallmenge, und D_1 die Intervallmenge, die zu Q_1 gehört. Ist dann δ' irgend ein Intervall von D_1, so kann es zugleich ein Intervall δ_i von D sein; und zwar ist dies immer und nur dann der Fall, wenn δ' keine Punkte von Q enthält. Alsdann bezeichnen wir es als Intervall von D_1 wieder durch $\delta_{\sigma_\nu}^{(1)}$. Wenn dagegen δ' Punkte von Q enthält, so liegt auf ihm eine gewisse Teilmenge von Q; dieser entsprechen gewisse Intervalle

---

1) Ann. di mat. (3) Bd. 3, p. 51.

2) Dieses Verfahren kann naturgemäß auch für den Beweis des Theorems A benutzt werden.

von D, die in der Reihenfolge geordnet, in der sie in D vorkommen,

$$\delta_\lambda, \delta_{\lambda'}, \delta_{\lambda''}, \ldots$$

sein mögen. Wir bezeichnen alsdann δ' als Intervall von D_1 durch $\delta_\lambda^{(1)}$. In derselben Weise führt ein weiteres Intervall von D_1, das nicht zugleich Intervall von D ist, zu den Intervallen

$$\delta_\mu, \delta_{\mu'}, \delta_{\mu''} \ldots$$

von D und erhält als Intervall von D_1 die Bezeichnung $\delta_\mu^{(1)}$ u. s. w. Es ist nun noch zu beachten, daß möglicherweise das zu Q_1 gehörige Gesamtintervall τ_1 mit τ nicht identisch ist. Alsdann existiren ein resp. zwei Intervalle τ_l und τ_r, so daß $\tau = \tau_l + \tau_1 + \tau_r$ ist, und auf jedem von ihnen liegen gewisse Intervalle von D, die wir in der Reihenfolge, wie sie in D vorkommen, durch

$$\delta_l, \delta_{l'}, \delta_{l''}, \ldots \delta_r, \delta_{r'}, \delta_{r''}, \ldots$$

bezeichnen. Die Beziehung zwischen D und D_1 ist dann wieder eine solche, daß in D_1 die sämtlichen Zahlen

$$l, l', l'', \ldots, r, r', r'', \ldots \lambda', \lambda'', \ldots \mu', \mu'', \ldots$$

als Indices von Intervallen nicht auftreten. Diese der Größe nach geordnete Zahlenmenge sei wieder Δ.

In derselben Weise liefert der Uebergang von Q_1 zu Q_2 eine analoge Zahlenmenge Δ_1, so daß die Intervalle der Menge $D_2 = \{\delta_\nu^{(2)}\}$ nur solche Zahlen als Indices enthalten, die in Δ resp. Δ_1 nicht vorkommen. Es reproducirt sich also für die nirgends dichte Menge Q der ganze Beweis, den wir für das Theorem A gegeben haben.

Ist Q keine nirgendsdichte, sondern eine beliebige lineare abgeschlossene Menge, so zerfällt das zugehörige Intervall τ wieder in je eine endliche oder abzählbare Menge von Intervallen, auf denen Q entweder nirgends dicht ist, oder aus allen Punkten besteht; auch hier brauchen wir uns nur mit den letzten Intervallen zu beschäftigen. Sei τ' die Summe dieser Intervalle, τ_1' die analoge Summe für Q_1, allgemein τ_β' diejenige für Q_β, so möge zunächst in der Reihe

$$14) \qquad \tau', \tau_1', \tau_2', \ldots \tau_\omega', \ldots \tau_\beta', \ldots$$

jedes Intervall kleiner als das vorhergehende sein, vorausge-

setzt, daß ein solches existirt. Alsdann stellen diese Intervalle eine Reihe abnehmender Zahlen dar, wie sie dem Satz II entspricht; es kommt ihnen also auch ein Ordnungstypus zu, dem eine Zahl der ersten oder zweiten Klasse zugehört. Wenn dagegen in der vorstehenden Reihe nicht jedes Intervall kleiner als das vorhergehende ist, so tilge man aus ihr alle Intervalle, für die dies nicht zutrifft, die also gleich ihrem vorhergehenden sind. Alsdann entspricht die reducirte Reihe dem eben erörterten Fall, und hat daher einen Ordnungstypus, dem eine Zahl erster oder zweiter Klasse zugehört. Faßt man jetzt alle solchen Glieder der Reihe 14) ins Auge, die zwischen zwei Gliedern der reducirten Reihe getilgt worden sind, so bilden die zugehörigen Mengen von 13) eine Mengenfolge, wie wir sie im ersten Teil des Beweises behandelt haben. Sie haben daher ebenfalls einen Ordnungstypus, der sich durch eine Zahl erster oder zweiter Klasse darstellt. Die Reihe 14) entsteht daher aus der reducirten Reihe, indem man für einzelne oder jedes ihrer Elemente eine wohlgeordnete Menge setzt, die endlich oder abzählbar ist; nach einem Satz des Herrn G. Cantor[1]) hat sie daher ebenfalls einen Ordnungstypus, dem eine Zahl der ersten oder zweiten Klasse entspricht. Hiermit ist das Theorem B bewiesen.

Aus dem Theorem B ziehen wir schließlich eine Folgerung, der formal ein noch allgemeinerer Inhalt zukommt, als dem Theorem selbst. Sie lautet:

Aus der gegebenen Menge P werde eine Reihe wohldefinirter Mengen

$$15) \qquad P_1, P_2, \ldots P_\omega, \ldots P_\beta, \ldots$$

so abgeleitet, daß jedes $P_{\beta+1}$ eine bestimmte wohldefinirte Teilmenge der Ableitung P'_β von P_β und zugleich $P'_{\beta+1}$ eine eigentliche Teilmenge von P'_β ist, so giebt es eine erste Zahl α der ersten oder zweiten Zahlklasse, so daß P'_α Null oder perfect ist.

In der That, da $P_{\beta+1}$ Teilmenge von P'_β ist, so ist $P'_{\beta+1}$ entweder Teilmenge von P'_β oder identisch mit P'_β. Das letzte wird aber durch den Wortlaut des Satzes ausgeschlossen; und daher fällt die Reihe der Ableitungen

$$P', P'_1, P'_2, \ldots P'_\omega, \ldots P'_\beta, \ldots$$

unmittelbar unter das Theorem B, woraus der Satz folgt.

1) Math. Ann. 49, p. 209.

Es hat keine Schwierigkeit, die vorstehenden Beweise auf ebene resp. räumliche Mengen auszudehnen. Dies beruht darauf, daß wie ich in meinem Bericht gezeigt habe[1]), auch zu diesen Mengen eine Menge $D = \{\delta_\nu\}$ punktfreier Bereiche gehört, die zu ihnen in der nämlichen Beziehung steht, wie die Intervallmenge D zu den linearen Mengen. Es sind nur geringe Erweiterungen des Beweisverfahrens nötig. Handelt es sich z. B. um eine ebene Menge, so hat man auch noch die auf den Seiten der Rechtecke δ_ν liegenden linearen Mengen resp. die zu ihnen gehörigen Intervallmengen in Betracht zu ziehen. Ferner ist zu berücksichtigen, daß die Mengen $D = \{\delta_\nu\}$ für ebene Mengen nicht eindeutig bestimmt sind und insbesondere durch solche Bereiche ersetzt werden können, die aus einer endlichen oder abzählbaren Menge derartiger Rechtecke bestehen. Analog ist für Mengen eines beliebigen Raumes zu verfahren.

---

1) A. a. O. p. 81 ff.

Beiträge zur Lehre von der Luftelectricität.

Von

Eduard Riecke.

II. Ueber die Zerstreuung in gleichmässig bewegter Luft.

Vorgelegt in der Sitzung der K. Ges. d. Wiss. vom 6. Febr. 1903.

1. Bewegung positiver Ionen. In einem unbegrenzten Raume, in dem die Luft mit konstanter Geschwindigkeit und in unveränderlicher Richtung strömt, werde eine mit der Menge e von negativer Elektricität geladene Kugel aufgestellt.

Den Mittelpunkt der Kugel machen wir zum Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen x-Axe parallel der Richtung der Luftbewegung sei. Wir betrachten ein positives Ion, das sich in der Ebene xy an der durch die Coordinaten x und y bestimmten Stelle befinde. Wir setzen voraus, daß dieses Ion an der Bewegung der Luft theilnehme, daß aber zu der hierdurch bestimmten Geschwindigkeit noch die Geschwindigkeiten hinzukommen, die von der Ladung e erzeugt werden. Die Luft ströme mit der Geschwindigkeit u in der entgegengesetzten Richtung der x-Axe. Dann ergeben sich für die Geschwindigkeiten des Ions die Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = -u - \nu U e \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\nu U e \frac{y}{r^3}.$$

Daraus folgt:

$$y\frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu U e \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2} u y^2\right\},$$

$$y\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu U e \frac{x}{r} - \tfrac{1}{2} u y^2\right\}.$$

Setzen wir $\psi = \nu Ue\frac{x}{r} - \frac{1}{2}uy^2$, so wird:

$$y\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right) = 0,$$

d. h. die Gleichung

$$\nu Ue\frac{x}{r} - \frac{1}{2}uy^2 = \text{Const}$$

giebt die Strömungskurve des betrachteten Ions. Setzen wir $x = r\cos\varphi$, so kommt die Gleichung auf die Form:

$$\nu Ue\cos\varphi - \frac{1}{2}uy^2 = \text{Const.}$$

Nun habe das Ion in sehr großer Entfernung von der Zerstreuungskugel, d. h. für $\varphi = 0$ den Abstand b von der x-Axe. Führen wir diesen Abstand an Stelle der Constanten in die vorhergehende Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$b^2 - y^2 = \frac{2\nu Ue}{u}(1-\cos\varphi),$$

oder:

$$b^2 - r^2\sin^2\varphi = \frac{2\nu Ue}{u}(1-\cos\varphi).$$

Für $\varphi = \pi/2$ wird:

$$y^2 = r^2 = b^2 - \frac{2\nu Ue}{u},$$

für $\varphi = \pi$:

$$y^2 = b^2 - \frac{4\nu Ue}{u}.$$

Ferner wird $r = 0$ für

$$\frac{2\nu Ue}{u}\cos\varphi = \frac{2\nu Ue}{u} - b^2.$$

Im Besonderen ergeben sich hieraus die folgenden Verhältnisse:

a) Unter den Curven der ganzen Schaar nimmt diejenige eine ausgezeichnete Stellung ein, für welche

$$b^2 = \frac{4\nu Ue}{u}.$$

Ihre Gleichung wird:

$$r^2\sin^2\varphi = \frac{2\nu Ue}{u}(1+\cos\varphi).$$

Für $\varphi = \pi/2$ ergiebt sich:

$$r^2 = \frac{2\nu Ue}{u}.$$

Für $\varphi = \pi$:

$$r^2 = \frac{2\nu Ue}{u}\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = \frac{\nu Ue}{u}.$$

b) Ist $b^2 > \frac{4\nu Ue}{u}$, so hat die Gleichung

$$\cos\varphi = 1 - \frac{b^2}{2\nu Ue/u}$$

keine reelle Lösung mehr; die Bahnen der Theilchen, für welche $b^2 > \frac{4\nu Ue}{u}$ ist, gehen also nicht mehr durch den Anfangspunkt des Coordinatensystems.

Für $\varphi = \pi$ wird:

$$y^2 = b^2 - \frac{4\nu Ue}{u}.$$

c) Ist $b^2 = \frac{2\nu Ue}{u}$, so ist $y = 0$ für $\varphi = \pi/2$; die entsprechende Bahnkurve berührt im Anfangspunkte die y-Axe.

d) Ist

$$\frac{4\nu Ue}{u} > b^2 > \frac{2\nu Ue}{u},$$

so mündet die Curve im Anfangspunkte des Coordinatensystems unter einem Winkel, der bestimmt ist durch die Gleichung

$$\cos\varphi = -\frac{b^2}{2\nu Ue/u} + 1;$$

sie schneidet die y-Axe in einem Punkte für den

$$y^2 = b^2 - \frac{2\nu Ue}{u}.$$

e) Ist

$$\frac{2\nu Ue}{u} > b^2 > 0,$$

so wird $r = 0$ für

$$\cos\varphi = 1 - \frac{b^2}{2\nu Ue/u}$$

Ein zweiter Schnittpunkt mit der y-Axe ist nicht vorhanden.

2. Bahn eines negativen Ions. Die Gleichungen für die Geschwindigkeit sind:

$$\frac{dx}{dt} = -u + \nu Ve \frac{x}{r^3},$$

$$\frac{dy}{dt} = \nu Ve \frac{y}{r^3}.$$

$$y\frac{dx}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y}\left\{\nu Ve \frac{x}{r} + \tfrac{1}{2} u y^2\right\},$$

$$y\frac{dy}{dt} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\nu Ve \frac{x}{r} + \tfrac{1}{2} u y^2\right\}.$$

Die Gleichung der Bahnkurve ist:

$$\nu Ve \cos\varphi + \tfrac{1}{2} u y^2 = \text{Const.}$$

Setzen wir wieder für $\varphi = 0$ den Abstand $y = b$, so ergiebt sich:

$$y^2 - b^2 = \frac{2\nu Ve}{u}(1 - \cos\varphi).$$

Eine ausgezeichnete Rolle spielt die Curve, für welche $b = 0$ ist. Ihre Gleichung wird:

$$y^2 = \frac{2\nu Ve}{u}(1 - \cos\varphi),$$

$$\text{also wird für } \varphi = \pi/2\text{: } y^2 = \frac{2\nu Ve}{u},$$

$$\text{für } \varphi = \pi\text{: } y^2 = \frac{4\nu Ve}{u}.$$

Endlich wird für $\varphi = 0$:

$$y = 0 \text{ und } r^2 = \frac{\nu Ve}{u}.$$

Für irgend einen anderen Werth von b wird:

$$y^2 = b^2 + \frac{2\nu Ve}{u}(1 - \cos\varphi).$$

Von $\varphi = 0$ bis zu $\varphi = \pi$ wächst daher y^2 von b^2 bis zu $b^2 + \frac{4\nu Ve}{u}$.

3. Zur Erläuterung der Zeichnung. Von der Gestalt der Bahnkurven giebt die beigegebene Figur eine Anschauung. Die ausgezogenen Kurven beziehen sich auf positive, die gestrichelten auf negative Ionen. O bezeichnet den Mittelpunkt der Zerstreuungskugel. Die Kurven ABO und CBO entsprechen dem

ausgezeichneten Falle, in dem

$$b^2 = \frac{4\nu Ue}{u}.$$

Es ist also

$$DA = DC = 2\sqrt{\frac{\nu Ue}{u}}.$$

Die Curven DEF und DEG entsprechen dem Falle $b = 0$. Der Raum FEG würde von den negativen Ionen vollkommen entblößt werden, wenn keine Neubildung von Ionen und keine Diffusion vorhanden wäre.

4. Die Zerstreuung. Läßt man die Curve AB um BD als Axe rotieren, so umschreibt sie den Raum, in welchem alle in O endigenden Ionenbahnen enthalten sind. Beschreibt man um O eine Kugel, deren Halbmesser gleich OB oder kleiner als OB ist, so werden alle positiven Ionen, die sich in dem Raume ABC bewegen, ihre Ladung an die Oberfläche dieser Kugel abgeben.

In größerem Abstande von O geht die Begrenzung des Raumes ABC in eine Cylinderfläche über, deren Querschnitt gleich $\pi \times DA^2$ ist. Die Zahl der Ionen, die in einer Sekunde durch den Querschnitt gehen, ist:

$$\pi \times DA^2 \times u\overset{+}{N}.$$

Hier bezeichnet $\overset{+}{N}$ die Anzahl der positiven Ionen in der Volumeneinheit. Die Menge von positiver Elektricität, welche in 1 sec durch den Querschnitt des Cylinders hindurchgeht, ist:

$$\pi \times DA^2 \times u\overset{+}{N}\varepsilon.$$

Dieselbe Elektricitätsmenge muß sich im stationären Zustande in 1 sec auf der Oberfläche der Zerstreuungskugel niederschlagen. Ist also e die Größe ihrer negativen Ladung, so ist die Abnahme in 1 sec:

$$\delta e = \pi \times DA^2 \times u\overset{+}{N}\varepsilon,$$

oder, wenn man für DA seinen Werth setzt:

$$\delta e = 4\pi\nu Ue\overset{+}{N}\varepsilon.$$

Die Zerstreuung ist unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich die Luft bewegt.

Derselbe Werth der Zerstreuung ergiebt sich in Uebereinstimmung hiermit auch für ruhende Luft, wenn man absieht von dem Einflusse der Neubildung und der Diffusion der Ionen. Dieser

Einfluß wird im allgemeinen um so mehr hervortreten, je kleiner die Strömungsgeschwindigkeit der Luft ist; er wird am größten bei ruhender Luft.

5. Numerische Verhältnisse. Um eine Vorstellung von den Größenverhältnissen zu bekommen, wie sie in der Wirklichkeit möglich sind, setzen wir beispielsweise:

$$\varepsilon = 1 \text{ und } u = 100 \text{ cm/sec},$$

also

$$\varepsilon/u = 0{,}01.$$

Dann wird

$$\begin{aligned} DA = DC &= 4{,}05 \text{ cm}, \\ OB &= 2{,}02 \text{ cm}, \\ \tfrac{1}{2}GF &= 4{,}25 \text{ cm}, \\ O\varepsilon &= 2{,}12 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Machen wir den Halbmesser der Zerstreuungskugel gleich OB, so muß ihr Potential auf 148 Volt gebracht werden. Für die Zerstreuung in der freien atmosphärischen Luft ergiebt sich aus Beobachtungen, welche Herr Dr. Cuomo auf Capri angestellt hat, bei positiver Ladung des Zerstreuungskörpers ein mittlerer Werth von 2,85 % in der Minute. Benützen wir diesen in der Formel

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = 4\pi\nu U \cdot \overset{+}{N}\varepsilon,$$

so ergiebt sich

$$\overset{+}{N}\varepsilon = 977 \times 10^{-10}.$$

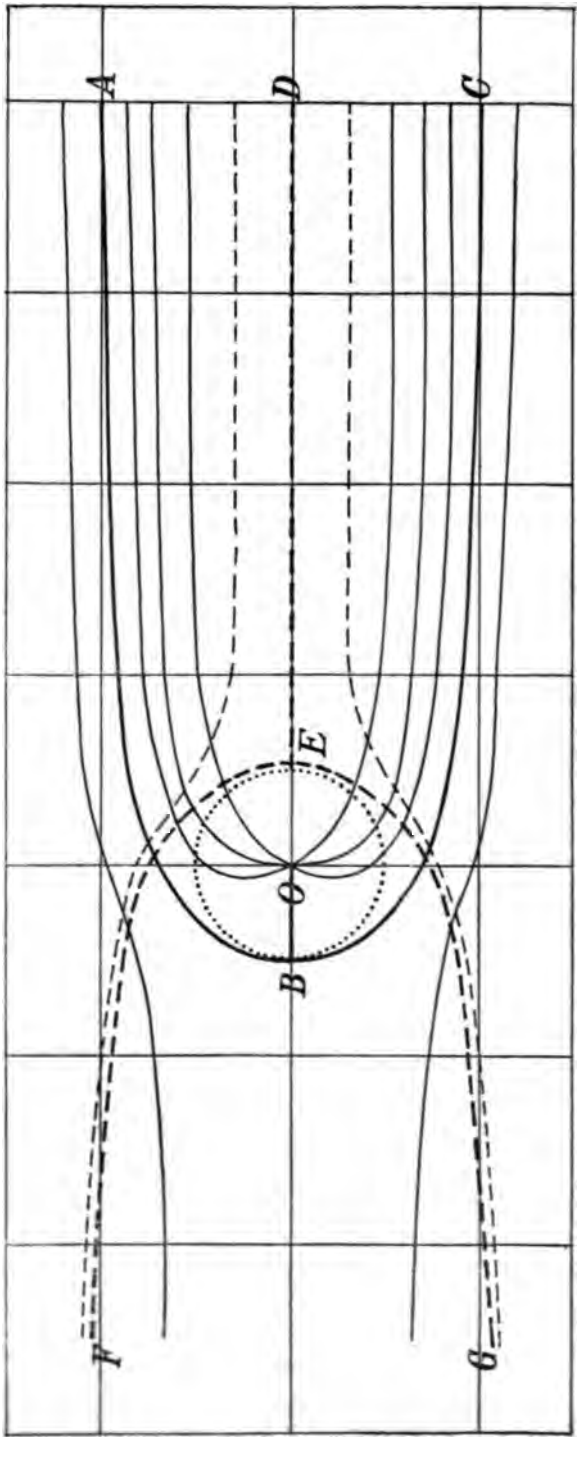
Für die Zerstreuung negativer Elektricität gilt die Formel:

$$\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} = 4\pi\nu V\overline{N}\varepsilon.$$

Nun ist nach den Beobachtungen Cuomos für negative Elektricität $\delta\varepsilon/\varepsilon$ im Mittel gleich 2,87 % in der Minute; daraus folgt:

$$\overline{N}\varepsilon = 840 \times 10^{-10}.$$

Für U und V sind hier die Werthe $1{,}29 \times 10^{-6}$ und $1{,}51 \times 10^{-6}$ genommen, die sich aus Laboratoriumsversuchen für feuchte Luft ergeben haben.


A
D
C
E
O
B
F
G

Beiträge zu der Lehre von der Luftelectricität.

Von

Eduard Riecke.

III. Ueber die Masse der in der Luft enthaltenen Ionen.

Vorgelegt in der Sitzung d. K. Ges. d. Wiss. vom 21. Februar 1903.

1. Der Diffusionscoëfficient und die Beweglichkeit der Ionen. Ein positives Ion befinde sich in einem elektrostatischen Felde von der Intensität $\mathfrak{F}$ in elektrostatischem Maaße. Die elektrische Ladung des Ion bezeichnen wir mit ε; die Geschwindigkeit, die es unter der Wirkung der elektrischen Kraft erhält, sei $\overset{+}{\mathfrak{g}}$. Dann ist

$$\overset{+}{\mathfrak{g}} = \overset{+}{U}\varepsilon\mathfrak{F}.$$

Im 66. Bande der Wiedemannschen Annalen habe ich eine Theorie der Elektricitätsleitung in Metallen veröffentlicht, deren Resultate auch auf die Ionenleitung der Gase übertragen werden können. Darnach hängt der Faktor $\overset{+}{U}$ ab von der mittleren Weglänge, von der Masse und von der molekularen Geschwindigkeit der Ionen. Bezeichnen wir die Masse eines einzelnen positiven Ions mit μ_p, seine mittlere Weglänge mit l_p, seine molekulare Geschwindigkeit mit u_p, so ist:

$$\overset{+}{U} = \tfrac{2}{3}\frac{l_p}{\mu_p u_p} = \tfrac{2}{3}\frac{l_p u_p}{\mu_p u_p^2}.$$

Die Konstante des Gasgesetzes habe für die positiven Ionen den Werth R_p, dann ist:

$$u_p^2 = 3R_p T,$$

und:

$$\overset{+}{U} = \frac{2l_p u_p}{9\mu_p R_p T}.$$

Die Zahl der positiven Ionen in der Volumeneinheit sei $\overset{+}{N}$; aus dem Gasgesetze folgt dann für den Partialdruck der positiven Ionen der Werth:

$$\overset{+}{p} = \overset{+}{N}\mu_p R_p T.$$

Daher wird:

$$\overset{+}{U} = \tfrac{2}{3} l_p u_p \frac{\overset{+}{N}}{\overset{+}{p}}.$$

Der Faktor $\overset{+}{U}$ steht mit der sogenannten absoluten Beweglichkeit U der positiven Ionen in der Beziehung[1]):

$$\varepsilon \overset{+}{U} = \nu U,$$

wo ν die Lichtgeschwindigkeit bezeichnet. Führen wir in unserer Gleichung an Stelle von $\overset{+}{U}$ diese absolute Beweglichkeit ein, so ergiebt sich:

$$U = \tfrac{2}{3} l_p u_p \frac{\varepsilon \overset{+}{N}}{\nu \overset{+}{p}}.$$

Auf der anderen Seite besteht zwischen dem Diffusionskoëfficienten $\overset{+}{R}$ der positiven Ionen und ihrer absoluten Beweglichkeit die Beziehung[2]):

$$U = \overset{+}{k} \frac{\varepsilon \overset{+}{N}}{\nu \overset{+}{p}}.$$

Somit erhält man für den Diffusionskoëfficienten den Ausdruck:

$$\overset{+}{k} = \tfrac{2}{3} l_p u_p.$$

Ebenso gilt für die negativen Ionen:

$$\bar{k} = \tfrac{2}{3} l_p u_p.$$

2. Die moleculare Weglänge der Ionen. In seiner dynamischen Theorie der Gase hat Maxwell den Fall einer Mischung zweier Gase behandelt und Formeln für die mittleren Weglängen abgeleitet. Bei dem ersten Gase sei die Zahl der Moleküle in der Volumeinheit N_1, ihr Durchmesser s_1, die mittlere molekulare Geschwindigkeit α_1, die mittlere Weglänge l_1. Für das zweite Gas gelten dieselben Bezeichnungen mit dem Index 2. Dann ist nach Maxwell:

1) Riecke, Lehrbuch d. Physik. II. Aufl., II. Bd., S. 366.
2) ibidem II. Bd., S. 381.

$$\frac{1}{l_1} = \pi\sqrt{2}\,N_1 s_1^2 + \frac{\pi}{4} N_2 (s_1+s_2)^2 \sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_1^2}},$$

$$\frac{1}{l_2} = \frac{\pi}{4} N_1 (s_1+s_2)^2 \sqrt{\frac{\alpha_1^2+\alpha_2^2}{\alpha_2^2}} + \pi\sqrt{2}\,N_2 s_2^2.$$

Wir werden diese Formeln auf ein ionisiertes Gas anwenden, und zwar zuerst auf das neutrale Gas und auf die in ihm enthaltenen positiven Ionen. Für die Moleküle des neutralen Gases brauchen wir die Zeichen N, l, s, α, für die positiven Ionen die Zeichen $\overset{+}{N}$, l_p, s_p, u_p. Nun ist die Dichte der positiven Ionen verschwindend klein gegenüber der Dichte der Gasionen; wir können also die mit $\overset{+}{N}$ behafteten Glieder in den Werthen der Weglängen weglassen. Dann ergiebt sich:

$$\frac{1}{l} = \pi\sqrt{2}\,N s^2, \quad \frac{1}{l_p} = \frac{\pi}{4} N (s+s_p)^2 \sqrt{\frac{\alpha^2+u_p^2}{u_p^2}}.$$

Die Weglänge der Gasmoleküle wird durch die Gegenwart der positiven Ionen nicht verändert, wir können für sie den aus der Gastheorie bekannten Werth benützen. Für das Verhältniß der Weglängen ergiebt sich:

$$\frac{l_p}{l} = \frac{4\sqrt{2}}{\left(1+\frac{s_p}{s}\right)^2} \cdot \sqrt{\frac{u_p^2}{\alpha^2+u_p^2}}.$$

Außerdem besteht zwischen l_p und u_p noch die Beziehung:

$$l_p u_p = \tfrac{8}{3}\overset{+}{k}.$$

Ebenso ergeben sich für die negativen Ionen die Gleichungen:

$$\frac{l_n}{l} = \frac{4\sqrt{2}}{\left(1+\frac{s_n}{s}\right)^2} \sqrt{\frac{u_n^2}{\alpha^2+u_n^2}}.$$

$$l_n u_n = \tfrac{8}{3}\bar{k}.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$a_p = \tfrac{9}{16}\left(1+\frac{s_p}{s}\right)^2 \frac{\overset{+}{k}}{l}, \quad a_n = \tfrac{9}{16}\left(1+\frac{s_n}{s}\right)^2 \frac{\bar{k}}{l},$$

so wird:

$$u_p^2 = a_p^2 + a_p\sqrt{2\alpha^2+a_p^2}, \quad u_n^2 = a_n^2 + a_n\sqrt{2\alpha^2+a_n^2}.$$

Diese allgemeinen Gleichungen werden wir nun auf die Ionen der Luft in Anwendung bringen. Für diese ist:

$$\overset{+}{k} = 0{,}0274, \qquad \bar{k} = 0{,}0420.$$

Für die mittlere Weglänge der Luftmoleküle setzen wir:

$$l = L = 9{,}1 \times 10^{-6} \text{ cm},$$

für ihre mittlere molekulare Geschwindigkeit:

$$\alpha = 48200 \text{ cm/sec}.$$

Um die Gleichungen zu lösen, nehmen wir für die Verhältnisse s_p/s und s_n/s eine Reihe verschiedener Werthe willkürlich an, und berechnen jedesmal die entsprechenden Werthe von u_p, l_p und u_n, l_n. Die folgende Tabelle enthält die Resultate einer in dieser Weise durchgeführten Rechnung. Dabei bezeichnet M die mittlere Masse, Ω das mittlere Volumen eines Luftmoleküles; ω_p und ω_n die Volumina der positiven und der negativen Ionen; endlich bedeutet h die Masse des Wasserstoffatomes. Die Massenverhältnisse sind berechnet mit Hülfe der Gleichungen:

$$\mu_p u_p^2 = \mu_n u_n^2 = M\alpha^2;$$

M/h ist gleich 29,3.

$\frac{s_p}{s} = \frac{s_n}{s}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	4
u_p^2	2744×10^5	5099×10^5	8423×10^5	12973×10^5	51902×10^5
u_n^2	4338×10^5	8238×10^5	15390×10^5	22294×10^5	103210×10^5
u_p	16560	22580	29020	36020	72040
u_n	20830	28700	39230	47210	101590
$l_p \times 10^6$	7,44	5,46	4,25	3,42	1,71
$l_n \times 10^6$	9,07	6,58	4,82	4,00	1,86
l_p/L	0,82	0,60	0,47	0,38	0,19
l_n/L	0,99	0,72	0,53	0,43	0,20
μ_p/h	248	133	81	52	13
μ_n/h	157	82	44	30	6,6
μ_p/M	8,5	4,5	2,8	1,8	0,4
μ_n/M	5,4	2,8	1,5	1,0	0,2
$\frac{\omega_p}{\Omega} = \frac{\omega_n}{\Omega}$	0,125	1	3,375	8	64

Graphisch sind die Resultate in der beigegebenen Figur dargestellt, die ausgezogenen Curven beziehen sich auf die positiven, die gestrichelten auf die negativen Ionen. Die Werthe s_p/s und s_n/s sind auf der horizontalen Axe abgetragen. Die Curven 1 geben die Werthe von μ_p/M und μ_n/M, die Curve 2 die Volumverhältnisse ω_p/Ω und ω_n/Ω. Die Curven 3 entsprechen den Werthen von $u_p \times 10^{-3}$ und $u_n \times 10^{-3}$, die Curven 4 den Werthen von $l_p \times 10^6$ und $l_n \times 10^6$.

3. Die Masse der Ionen. Mit Bezug auf die Masse der positiven Ionen ergiebt sich aus der Betrachtung der Curven das Folgende. Bis zu dem Werthe $s_p/s = 3$ ist die Masse der positiven Ionen, wie sie aus unseren Rechnungen sich ergiebt, größer als die der Luftmoleküle. Für $s_p/s = 3$ wird sie gleich der Masse der letzteren; gleichzeitig wird aber das berechnete Volumen der Ionen 27 mal so groß, als das der Luftmoleküle. Ein solches Verhalten hat sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich. Man kann also mit ziemlicher Sicherheit den Schluß ziehen, daß die Masse der positiven Ionen größer als die der Luftmoleküle ist. Bei den negativen Ionen wird der berechnete Werth von μ_n/M gleich 1 für s_n/s gleich 2, also für $\omega_n/\Omega = 8$. Auch ein solches Verhältniß ist nicht sehr wahrscheinlich, man kann daher umgekehrt als wahrscheinlich betrachten, daß auch die Masse der negativen Ionen größer als die der Luftmoleküle ist.

Zu bestimmten Werthen für die Massen der Ionen kann man natürlich nur gelangen, wenn man den Gleichungen, die in den beiden ersten Abschnitten aufgestellt worden sind, noch zwei weitere hinzufügt. Die einfachste Annahme, die man zu diesem Zwecke machen kann, ist die, daß die Dichte, das Verhältniß zwischen Masse und Volumen bei den Ionen dasselbe sei, wie bei der Luft.

Man erhält dann noch die Gleichungen:

$$\frac{\mu_p}{\omega_p} = \frac{M}{\Omega}, \quad \text{oder} \quad \frac{\mu_p}{M} = \frac{\omega_p}{\Omega},$$

und:

$$\frac{\mu_n}{\omega_n} = \frac{M}{\Omega}, \quad \text{oder} \quad \frac{\mu_n}{M} = \frac{\omega_n}{\Omega}.$$

Die entsprechenden Werthe von μ_p/M und von μ_n/M werden durch die Schnittpunkte der beiden Curven 1 mit der Curve 2 bestimmt. Daraus ergeben sich dann die folgenden Werthe der für die positiven und für die negativen Ionen charakteristischen Größen:

$$\frac{s_p}{s} = 1{,}42, \qquad \frac{s_n}{s} = 1{,}27,$$

$$\mu_p/M = 2{,}9, \qquad \mu_n/M = 2{,}0,$$

$$u_p = 28100 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}, \qquad u_n = 33600 \frac{\text{cm}}{\text{sec}},$$

$$l_p = 4{,}4 \times 10^{-6}; \qquad l_n = 5{,}6 \times 10^{-6}.$$

Von der gemachten Annahme können die wirklichen Verhältnisse nach der einen oder anderen Seite abweichen; doch ist nicht wahrscheinlich, daß dadurch die Größenordnung der berechneten Werthe verändert wird.

4. Ueber die Masse der durch einen Sättigungsstrom abgeschiedenen Ionen. Wir betrachten einen geschlossenen Raum von der Größe eines Zimmers. Der Halbmesser einer Kugel von gleichem Rauminhalte betrage 250 cm. Um in diesem Raume einen wenigstens nahezu gesättigten Strom zu erhalten, müssen wir darin eine Kugel von 35 cm Halbmesser aufstellen und zu einem Potentiale von etwa 17000 Volt laden [1]). Das Volumen des Hohlraumes ist gleich $65{,}3 \times 10^6$ ccm. Setzen wir die Ladung ε des Ions, das elektrische Elementarquantum, nach Planck [2]) gleich $4{,}69 \times 10^{-10}$, so ergiebt sich aus den Versuchen von Harms [3]) für die Zahl der in einer Sekunde in der Volumeinheit gebildeten Ionen der Werth $q = 43$. Hat die innere Kugel eine negative Ladung, so beträgt die Zahl der positiven Ionen, welche in 1 sec auf ihr abgeschieden werden, $43 \times 65{,}3 \times 10^6 = 28 \times 18^8$. Die Zahl der Luftmoleküle, die in einem Gramm-Molekül Luft enthalten sind, beträgt nach Planck $5{,}57 \times 10^{23}$ [4]). Das mittlere Molekulargewicht der Luft ist gleich 29,3. Somit das mittlere Gewicht eines Luftmoleküls $5{,}26 \times 10^{-23}$ g, und das Gewicht eines positiven Ions der Luft: $1{,}55 \times 10^{-21}$ g. In dem betrachteten Raume werden also durch den Sättigungsstrom in 1 sec $43{,}3 \times 10^{-14}$ g positive Ionen an der inneren Kugel abgeschieden. Sollte die abgeschiedene Menge der Ionen den Betrag von 0,01 mg erreichen, so müßte der Sättigungsstrom während einer Zeit von $2{,}3 \times 10^7$ sec oder 270 Tagen unterhalten werden. Die Aufgabe, die Masse der Ionen der Luft durch eine direkte Wägung zu bestimmen, dürfte hiernach sehr schwer zu lösen sein.

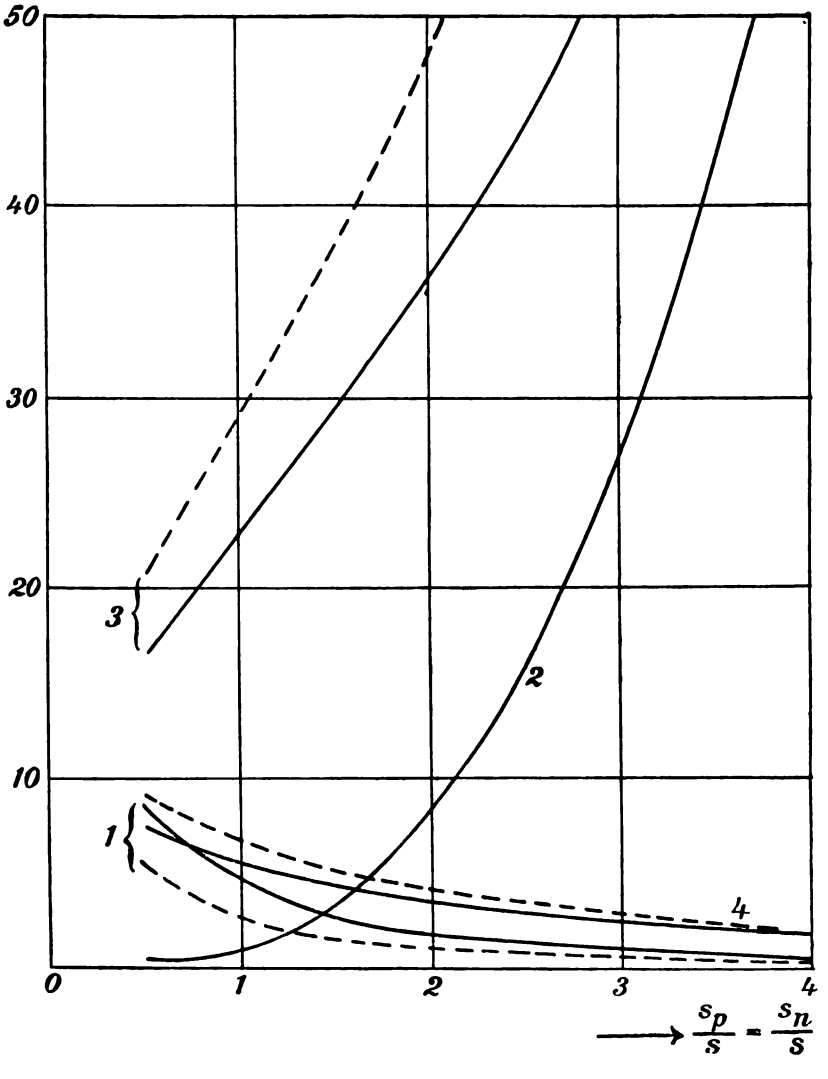
---

1) Riecke, Nachr. d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, math. phys. Cl. 1903. Heft 1.

2) Ann. d. Phys. 1902. Bd. 9. S. 641.

3) Phys. Zeitschrift. 4. Jahrg. S. 11.

4) Ich benütze die Gelegenheit, um einen Rechenfehler auf S. 648 des zweiten Bandes meines Lehrbuches der Physik (II. Aufl.) zu berichtigen. Das Volumen von 2 g Wasserstoff, das Volumen des Gramm-Moleküls im gasförmigen Zustande, ist dort gleich $1{,}11 \times 10^4$ ccm gesetzt, statt gleich $2{,}22 \times 10^4$ ccm. Die Zahl der Gasmoleküle, die bei normalem Drucke und bei einer Temperatur von 0° Cels. in einem ccm enthalten sind, berechnet sich dann zu 25×10^{18}. Die Abweichung von der bei Planck angegebenen Zahl (28×10^{18}) erklärt sich aus einer Vernachlässigung, die ich gemacht habe, um die Rechnung zu erleichtern.


50
40
30
20
10
0
1
2
3
4
3
2
1
4
$\frac{s_p}{s} = \frac{s_n}{s}$

Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers.

Erste Mitteilung.

Von

F. Bernstein.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 21. Februar 1903.

Durch die Beschäftigung mit der komplexen Multiplication der elliptischen Funktionen wurde L. Kronecker[1]) im Jahre 1856 auf die überraschende Entdeckung geführt, daß es zu jedem imaginären quadratischen Zahlkörper einen zugehörigen höheren Zahlkörper „die zu assoziierende Gattung" giebt, in welchem die sämtlichen Ideale des Grundkörpers zu wirklichen ganzen algebraischen Zahlen werden und in welchem alle tieferen auf die Composition und Klasseneintheilung bezüglichen Eigenschaften des quadratischen Grundkörpers in elementarer Weise Darstellung und Abbild finden. Er bezeichnet es als das höchste, erstrebenswerte Ziel der Zahlentheorie, die Natur dieser zu „assoziierenden Gattung" zu ergründen und für einen beliebigen algebraischen Zahlkörper in analoger Weise, wie in dem Falle des imaginären quadratischen Zahlkörpers zu entwickeln. Einen wichtigen Teil der,

1) Kronecker, Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen 519 ff.

auf die komplexe Multiplikation bezüglichen Behauptungen Kroneckers hat H. Weber[1]) bewiesen. Diese Untersuchungen nahm ferner D. Hilbert[2]) auf, indem er die bestimmte Aufgabe stellte, mit den Hilfsmitteln der Zahlentheorie die folgende Behauptung nachzuweisen:

Bedeutet G die (Abel'sche) Gruppe der Idealklassen eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers k, so existiert ein und nur ein in dem Rationalitätsbereich k Abel'scher Körper K, dessen Gruppe der Substitutionen mit der Gruppe G übereinstimmt und welcher die Diskriminante 1 in dem betrachteten Grundkörper hat.

D. Hilbert hat die Behauptungen über die Eigenschaften des Körpers K, welcher von diesen Autoren als Klassenkörper bezeichnet wird, nicht nur wesentlich vermehrt, sondern auch den Existenzbeweis des Klassenkörpers für den Fall erbracht, daß die Klassenanzahl des Grundkörpers $h = 2$ ist.

An diese wichtigen Resultate knüpft die vorliegende Untersuchung an. Sie führt die Konstruktion des Klassenkörpers für einen algebraischen Grundkörper unter bestimmten einschränkenden Voraussetzungen über die Natur desselben durch, enthält jedoch alle wesentlichen Elemente der Construktion des Klassenkörpers im allgemeinen Falle. Um dies genauer zu erklären, diene die folgende elementare Bemerkung: Ist q die Anzahl der verschiedenen, in der Klassenanzahl h des Körpers aufgehenden Primfaktoren, so zerfällt der Klassenkörper (als Abel'scher Körper) offenbar in q verschiedene Teilkörper, deren Grad je eine Primzahlpotenz, z. B. l^ν ist. Es genügt nun, diese Teilkörper einzeln aufzubauen und sie nachher zu vereinigen, um den ganzen Klassenkörper zu erhalten. In der gegenwärtigen Arbeit habe ich mich nun auf einen noch engeren Teilkörper beschränkt. Die Gruppe der Substitutionen, welche diesen Teilkörper bestimmt, ist isomorph der Gruppe aller derjenigen Klassen c in k, deren Exponent die Primzahl l ist (für die also $c^l = 1$ ist). Dieser engere Teilkörper bedeutet also offenbar nur dann einen der eben erwähnten Teilkörper, wenn die Untergruppe, welche dem Faktor l^ν in der Klassenanzahl entspricht, vom Geschlechte $p = \nu$ ist.

---

1) Elliptische Funktionen und algebraische Zahlen Braunschweig 1891 vgl. auch H. Weber, Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern. (Math. Ann. 50. 1897 p. 1.

2) D. Hilbert, Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper (Göttinger Nachr. 1898 p 370).

Ferner wurde angenommen, daß der Grundkörper mit allen seinen Conjugierten, imaginär sei und die $l$te Wurzel der Einheit ζ enthalte. Alle diese Beschränkungen wurden lediglich deswegen getroffen, weil es im Rahmen derselben möglich war, die Theorie der $l$ten Potenzreste, welche für so beschaffene algebraische Zahlkörper hinreichend bekannt ist, zu benutzen. Eine allgemeinere Behandlung hätte dagegen die Voraussetzung der Theorie der l^{μ}ten Potenzreste ($\mu > 1$) gefordert. Diese, obgleich formal völlig analog, liegt bis jetzt nicht entwickelt vor und soll daher zuvor den Gegenstand einer besonderen, Darstellung bilden. Das Wesentliche und Allgemeine in der vorliegenden Construktion liegt jedoch darin, daß der zugrunde gelegte Körper in bezug auf die Primzahl l ein beliebiges Geschlecht[1]) p besitzen darf, während er in dem bisher behandelten Falle $h = 2$ das Geschlecht $p = 1$ besaß.

Aufstellung des Systems der Zahlen $\omega_1, \ldots \omega_p$, aus denen die p unverzweigten cyklischen Körper entstehen.

§ 1.

Definitionen und vorbereitende Sätze.

Es sei k ein algebraischer Zahlkörper vom Grade m; wir machen zunächst die Annahme, daß k selbst nebst seinen konjugierten Körpern $k^1, \ldots k^{(m-1)}$ imaginär sei. Es sei l eine ungrade Primzahl und ζ eine $l$te Wurzel der Einheit. Wir wollen annehmen, daß der Körper k die $l$te Einheitswurzel ζ enthalte. Das Symbol

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right) \tag{1}$$

sei in bekannter Weise gleich $+1$ gesetzt, wenn die beliebige Zahl α des Körpers, der $l$ten Potenz β^l einer Zahl β der Körper nach dem idealen Primfactor $\mathfrak{p}$ als Modul kongruent ist und verschieden von $+1$, wenn die Zahl α nicht einer $l$ten Potenz nach dem Modul $\mathfrak{p}$ kongruent ist. Man kann unter Heranziehung des verallgemeinerten Fermatschen Lehrsatzes leicht das Symbol $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}}\right)$ durch eine Kongruenz so definieren, daß es stets eine $l$te Wurzel der Einheit ζ^{ϱ} bedeutet[2]).

1) Vgl. S. 50.

2) Vgl. Kummer, Ueber allg. Reciprocitätsgesetze für beliebig hohe Potenzreste. Ber. der k. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1850.

Definition. Ein System von Zahlen des Körpers k

$$\alpha_1, \ldots \alpha_n$$

von der Eigenschaft, daß kein Produkt $\alpha_1^{e_1} \ldots \alpha_n^{e_n}$, wo $e_1, \ldots, e_n$ Zahlen der Reihe $0, 1, \ldots, l-1$ bedeuten, die $l$te Potenz einer Zahl der Köper ist, soll ein unabhängiges System von Zahlen heißen. Die Verallgemeinerung eines Satzes von Dirichlet[1]) lehrt die folgende Thatsache:

Satz 1. Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ n unabhängige Zahlen des Körpers, $\zeta^{e_1}, \ldots, \zeta^{e_n}$ ebensoviel vorgegebene $l$te Wurzeln der Einheit, so giebt es stets unendlich viele ideale Primfaktoren $\mathfrak{p}$, welche den Kongruenzbedingungen

$$\left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{e_1}, \quad \left(\frac{\alpha_1}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{e_2}, \ldots, \quad \left(\frac{\alpha_n}{\mathfrak{p}}\right) = \zeta^{e_n} \tag{2}$$

angepaßt sind.

Die Menge dieser Primfaktoren $\mathfrak{p}$ wird genauer durch die folgende Formel abgeschätzt. Es ist erstreckt über alle der Bedingung (2) genügenden Primfaktoren p

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{l^n} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \quad (s > 1), \tag{2a}$$

wo s eine reelle Veränderliche und $f(s)$ eine Funktion derselben bedeutet, die für $s = 1$ zwischen endlichen Grenzen bleibt. $n(\mathfrak{p})$ bedeutet die Norm des idealen Teilers $\mathfrak{p}$, genommen im Körper k.

§ 2.

Die p unverzweigten cyklischen Körper.

Die h Klassen des Körpers k bilden eine endliche Abelsche Gruppe.

Es sei

$$h = l^\nu h' \tag{3}$$

und h' eine zu l prime Zahl. Es kann für die jetzt folgenden Betrachtungen ohne wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit gradezu $h' = 1$ gesetzt werden[2]).

---

1) Dirichlet, Sur l'usage des séries in finies dans la théorie des nombres. Werke Bd. 1. S. 357.

2) Die Modifikationen, welche im Falle h' größer als 1 nötig sind, werden erhalten, wenn man einen erweiterten Begriff der Klasse einführt. Als Haupt-

Es sei

$$c_1 \ldots c_p \tag{4}$$

eine Basis der Gruppe der Klassen, sodaß jede Klasse c eindeutig in der Form

$$c = c_1^{e_1} \ldots c_p^{e_p} \tag{5}$$

dargestellt werden kann, wo $e_1 \ldots e_p$ die Werte $0 \ldots l^{\nu_1}$, $0 \ldots l^{\nu_2}$, $\ldots$, $0 \ldots l^{\nu_p}$ resp. annehmen können. Es wird also

$$h = l^{\nu} = l^{\nu_1} \ldots l^{\nu_p}. \tag{6}$$

Die Zahl p nenne ich das Geschlecht des Körpers k in bezug auf die Primzahl l. In dem Falle, daß der Körper k der quadratische Zahlkörper ist, und die Primzahl l gleich 2 gewählt wird, ist l^p die Anzahl der Geschlechter, in welche die Klassen nach der Einteilung von Gauß zerfallen.

Die Größen $l^{\nu_1}, \ldots, l^{\nu_p}$ heißen die Exponenten der p unabhängigen Grundklassen $c_1 \ldots c_p$.

Wir behaupten den folgenden Satz, der das nächste Ziel der Entwicklungen darstellt:

Satz 2. Es existiren p und nur p Körper

$$K_1, \ldots, K_p \tag{7}$$

welche in dem Rationalitätsbereiche k durch die reinen cyklischen Gleichungen

$$w_1^l = \omega_1, \ldots w_p^l = \omega_p \tag{8}$$

definirt sind, von der Eigenschaft, daß die Diskriminanten derselben bezüglich des Bereiches k gleich 1 ausfallen.

Anmerkung. Enthielte der Körper k nicht die Wurzel der Einheit, so würden gleichwohl p unverzweigte Körper existieren, es würden aber die Gleichungen, durch welche dieselben definiert werden, nicht in der Form reiner Gleichungen auftreten.

---

klasse (im erweiterten Sinne) sei die Gruppe aller der Klassen c, für welche $c^{h'} = 1$ ist, als Nebenklasse (im erweiterten Sinne) seien die Nebengruppeu der genannten Gruppe bezeichnet. Dann gelten die folgenden Sätze wieder in einer der früheren völlig analogen Form.

§ 3.

Die Einteilung der Zahlen des Zahlkörpers k in Arten.

Im Kreiskörper der $l$ten Wurzel der Einheit ζ zerfällt die Primzahl l in $(l-1)$ gleiche Faktoren

$$(l) = \mathfrak{l}^{l-1}, \tag{9}$$

wo der Faktor $\mathfrak{l}$ durch die Gleichung

$$l = (\lambda), \quad \lambda = 1-\zeta \tag{10}$$

definiert ist. Wir bezeichnen als primär[1]) eine Zahl α in k, welche der Kongruenz

$$\alpha \equiv \beta^{l}(\mathfrak{l}^{l}) \tag{11}$$

für irgend eine ganze oder gebrochene Zahl β in k genügt.

Die primären Zahlen bilden offenbar eine Gruppe A_0, da das Produkt primärer Zahlen wieder primäre Zahlen liefert. Die Nebengruppen zu A_0 bezüglich der Gruppe aller ganzen Zahlen des Körpers bezeichnen wir als Arten, die Gruppe der primären Zahlen selbst als Hauptart. Zwei Zahlen in k, deren Quotient primär ist, d. h. der Hauptart angehört, sind in derselben Art enthalten. Die Arten sind offenbar in endlicher Anzahl vorhanden. Ihre Anzahl ist ein Teiler von $\varphi(\mathfrak{l}^{l})$; es bedeutet $\varphi(\mathfrak{l}^{l})$ die Anzahl der nach $\mathfrak{l}^{l}$ inkongruenten Reste.

Hilfssatz 1. Es zerfällt das vollständige Restsystem nach dem Modul $\mathfrak{l}^{l}$ in l^{m} getrennte Systeme, deren jedes Zahlen nur einer Art enthält; es giebt aber l^{m} verschiedene Arten.

Sei

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{\varphi(\mathfrak{l})}$$

ein vollständiges Restsystem nach dem Modul l.

Die Zahlen

$$\alpha_1^{l}, \ldots, \alpha_{\varphi(l)}^{l} \tag{12}$$

sind einander und dem Modul $\mathfrak{l}^{l}$ inkongruent. Denn aus

---

1) E. E. Kummer, Ueber die Ergänzungssätze in den allgemeinen Reciprocitätsgesetzen. Journ. für Math. Bd. 44. 1851.

D. Hilbert, Ueber die Theorie des relativ-Abelschen Zahlkörpers. Nachr. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen 1898 Heft 4 pg. 5.

$$\alpha'_\nu \equiv \alpha'_\mu (\mathfrak{l}') \qquad (\nu, \mu \text{ sind Zahlen aus der Reihe } 0 \ldots \varphi(\mathfrak{l})$$

folgt sogleich

$$\alpha_\nu \equiv \alpha_\mu \zeta^r (\mathfrak{l}),$$

wäre nun

$$r \not\equiv 0,$$

so hätte man

$$\alpha_n \zeta^r \equiv \alpha_\mu (\mathfrak{l})$$

und also

$$\alpha_\mu \equiv \alpha_\nu (\mathfrak{l});$$

dasselbe folgt für $r = 0$, also ist $\mu = \nu$.

Jede Zahl der Hauptart ist nun offenbar einer Zahl der Reihe (12) kongruent. Er giebt also im Sinne der Kongruenz nach dem Modul $\mathfrak{l}'$ genau $\varphi(\mathfrak{l})$ primäre Zahlen. Da es im ganzen $\varphi(\mathfrak{l}')$ Reste giebt, welche im Sinne der Kongruenz eine gewöhnliche Abelsche Gruppe bilden, so ist die Anzahl der Arten gleich dem Grade $\left(\frac{\varphi(\mathfrak{l}')}{\varphi(\mathfrak{l})}\right)$ der zur Hauptart reciproken Gruppe.

Es ist:

$$\varphi(\mathfrak{l}') = N(\mathfrak{l}')\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_2)}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_n)}\right)$$

$$\varphi(\mathfrak{l}) = N(\mathfrak{l})\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_1)}\right)\left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_2)}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{N(\mathfrak{l}_n)}\right) \tag{13}$$

wenn $\mathfrak{l}_1 \ldots \mathfrak{l}_n$ die Primfaktoren von $\mathfrak{l}$ in k sind.

Es ist aber:

$$\frac{\varphi(\mathfrak{l}')}{\varphi(\mathfrak{l})} = N(\mathfrak{l}'^{-1}) = \mathfrak{l}^{m'(l-1)} = l^m;$$

m' bedeutet den Grad des Körpers k bezüglich des Kreiskörpers der $l$ten Wurzel der Einheit.

§ 4.

Die Konstruktion der Zahlen $\omega_1, \ldots, \omega_p$.

Es bedeute

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{\frac{m}{2}-1}, \tag{14}$$

ein vollständiges System von Grundeinheiten in Körper k. Wir bezeichnen der Gleichförmigkeit halber die höchste vorkommende Einheitswurzel ϱ mit $\varepsilon_{\frac{m}{2}}$. Aus den Klassen

$$c_1, \ldots, c_p$$

wählen wir die zu l primen Ideale

$$\mathfrak{r}_1, \ldots, \mathfrak{r}_p \tag{15}$$

aus und setzen die Zahlen $\varrho_1 \ldots \varrho_p$

$$(\varrho_1) = \mathfrak{r}_1^{\nu_1}, \ldots, (\varrho_p) = \mathfrak{r}_p^{\nu_p}. \tag{16}$$

Wir wollen $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ mit dem System (14) vereinigen, indem wir schreiben

$$\varrho_1 = \varepsilon_{\frac{m}{2}+1}, \ldots \varrho_p = \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}. \tag{17}$$

Es besteht der Satz:

„Jede Zahl ξ, welche die $l$te Potenz eines Ideals ist, hat die Form

$$\xi = \varepsilon_1^{x_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}^{x_{\frac{m}{2}+p}} \alpha^l, \tag{18}$$

wo $x_1 \ldots x_{\frac{m}{2}+p}$ Zahlen der Reihe $0 \ldots l-1$ sind

und wo α eine ganze oder gebrochene Zahl in k_ν bedeutet".

Wir bestimmen aufgrund des Satzes 1 ein System von Primidealen in k, die zu l prim sind, so daß

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) = \zeta, \quad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_j}\right) = +1 \qquad (i \neq j) \tag{19}$$

$$\left(i, j = 1, 2, \ldots \frac{m}{2}+p\right)$$

wird. Ferner suchen wir solche Exponenten

$$\overline{w}_{1,i}, \ldots, \overline{w}_{p,i},$$

daß die Produkte

$$\mathfrak{q}_i \mathfrak{r}_1^{\overline{w}_{1,i}} \ldots \mathfrak{r}_p^{\overline{w}_{p,i}} = (\varkappa_i) \tag{20}$$

Hauptideale in k werden.

Wir setzen noch

$$w_{\varkappa\iota} \equiv \overline{w}_{\varkappa\iota}(l) \; (0 \leq w_{\varkappa\iota} \leq l-1)$$

und bestimmen ein System von Zahlen

$$v_1, \ldots v_{\frac{m}{2}+p}$$

durch die folgenden Kongruenzen

$$v_1 w_{1,1} + \cdots + v_{\frac{m}{2}+p}\, w_{1,\frac{m}{2}+p} \equiv 0 \ (l),$$

$$v_1 w_{2,1} + \cdots + v_{\frac{m}{2}+p}\, w_{2,\frac{m}{2}+p} \equiv 0 \ (l),$$

$$v_1 w_{p,1} + \cdots + v_{\frac{m}{2}+p}\, w_{p,\frac{m}{2}+p} \equiv 0 \ (l). \tag{21}$$

Wir bilden nunmehr die Größen

$$\omega^* = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}^{u_{\frac{m}{2}+p}} k_1^{v_1} \ldots k_{\frac{m}{2}+p}^{v_{\frac{m}{2}+p}}, \tag{22}$$

wo aber $u_1 \ldots, u_{1\frac{m}{2}+p}, v_1 \ldots, v_{\frac{m}{2}+p}$ Zahlen der Reihe $0 \ldots l-1$ darstellen. Die linken Seiten der Kongruenzen (21) sind bis auf Vielfache von l die Exponenten von $r_1, \ldots r_p$. Infolge der genannten Kongruenzen kommt also $r_1 \ldots r_p$ in (22) nur in einem durch l teilbaren Exponenten vor.

Der Ausdruck ω^* stellt mindestens, und wenn die Bedingungen (21) unabhängig sind. genau l^{m+p} verschiedene Werte dar. Die Anzahl der Arten im Körper k beträgt, wie gezeigt, l^m. Es giebt mithin sicher eine Art A, in der mindestens l^p Zahlen der Gestalt ω^* vorkommen.

Für die Reihe

$$(v_{\frac{m}{2}+2}, v_{\frac{m}{2}+3}, \cdots, v_{\frac{m}{2}+p}) \tag{23}$$

sind l^{p-1} Wertfolgen denkbar. Es müssen daher unter den l^p Zahlen der Art A mindestens l ein und dieselbe bestimmte Wertfolge (23) aufweisen. Der Quotient zweier solcher Zahlen wird (multipliciert mit einer geeigneten l Potenz einer Zahl) eine ganze primäre Zahl des Körpers, von der Gestalt

$$\omega_1 = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}^{u_{\frac{m}{2}+p}} k_1^{v_1} \ldots k_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} k_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} \alpha_1^l. \tag{24}$$

Die Exponenten

$$u_1, \ldots, u_{\frac{m}{2}+p}, \ v_1 \ldots v_{\frac{m}{2}+1}$$

haben Werte aus der Reihe $0, \ldots, l-1$ und sind nicht sämtlich Null; α ist eine ganze oder gebrochene Zahl des Körpers.

Für die Folgende sollen zwei Zahlen des Körpers „gleich-

wertig" oder „ungleichwertig" heißen, je nachdem der Quotient die $l$te Potenz einer ganzen oder gebrochenen Zahl des Körpers ist, oder nicht.

Die Zahlen ω^* der Form (22) sind sämtlich ungleichwertig.

Jetzt denke ich mir alle Zahlen der Art A mit $\omega_1, \omega_1', \ldots \omega_1^{l-1}$ multipliziert. Da ω_1, sowie seine Potenzen primär sind, so entstehen immer wieder Zahlen derselben Art A. Es erleiden die Elemente der Art durch die Multiplikation cyklische Vertauschungen. Es zerfällt also A in lauter Cyklen der Form

$$C = (\omega \omega_1^{e_1}) \; (e_1 = 0, 1, \cdots, l-1)$$

von je l Elementen. Eine Zahl ω^* der Form (22) erzeugt einen Cyklus

$$C^* = (\omega^* \omega_1^{e_1}),$$

dessen sämtliche l Elemente l bestimmten Elementen der Form (22) gleichwertig sind. Es entspricht also dem Cyklus C^* ein System S_1 von l Elementen der Form (22). Dasselbe System S_1 entspricht sämtlichen Cyklen, deren Elemente mit den Elementen von S_1 gleichwertig sind. Es zerfallen die Zahlen ω^* der Form (22), welche der Art A angehören in lauter getrennte Systeme S_1 von je l Elementen. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwei Größen ω^* und ω^{**} der Form (22) demselben System S_1 angehören, lautet

$$\omega^{**} = \omega^* \omega_1^{e_1} \alpha^l, \tag{25}$$

wo α eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl des Körpers bedeutet.

Die Art A enthält mindestens l^p (ungleichwertige) Zahlen ω^*, es giebt also mindestens l^{p-1} Systeme S_1 von l Elementen, in welche dieselben zerfallen.

Die Reihe

$$(v_{\frac{p}{2}+3}, \; v_{\frac{p}{2}+4}, \cdots, v_{\frac{p}{2}+p}) \tag{26}$$

erlaubt l^{p-2} Wertfolgen. Greifen wir aus jedem System S_1 ein Element heraus, so haben wir l^{p-1} Elemente von der Formel (22), welche durch keine Relation von dem Typus (25) verbunden sind.

Unter diesen müssen mindestens l dieselbe Wertfolge (26) aufweisen. Der Quotient $\frac{\omega^*}{\omega^{**}}$ zweier derselben ist gleichwertig einer primären Zahl ω_2 der Gestalt

$$\omega_2 = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}^{u_{\frac{m}{2}+p}} k_1^{v_1} \ldots k_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}} k_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} k_{\frac{m}{2}+2}^{v_{\frac{m}{2}+2}} \alpha_2^i, \tag{27}$$

wo die u und v Exponenten wie vorher bedeuten, die nicht sämtlich Null sind und α_2 eine ganze oder gebrochene Zahl des Körpers ist. Es findet keine Relation:

$$\omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} = \beta^l \qquad (e_1, e_2 = 0, 1 \ldots, l-1) \tag{28}$$

statt. Denn aus (28) würde sofort eine Relation von der Form (25) folgen. Daraus würde man aber schließen, das ω^* und ω^{**} demselben System S_1 angehören und so zu einem Widerspruch gelangen.

Jetzt denken wir uns alle Zahlen der Art A mit den l^2 Größen

$$\omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \quad (e_1, e_2 = 0 \cdots l-1)$$

multipliziert. Es entsteht wiederum jedesmal die Art A, und die Elemente erleiden gewisse Vertauschungen. Sei ω eine Zahl in A. Die Zahlen der zweifachen Cyklus

$$C_2 = (\omega \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2}) \quad (e_1, e_2 = 0, 1 \cdots l-1)$$

haben die Eigenschaft, daß sie sich untereinander vertauschen, wenn man sie in der angegebenen Weise multipliciert. Aus jeder Zahl ω in A entsteht ein solcher Cyklus C_2. Zwei Cyklen, die ein Element gemeinsam haben, sind identisch. Infolgedessen zerfällt die Art A in lauter getrennte Cyklen von l^2 Elementen.

Aus einer Zahl ω^* der Form (22) entsteht ein Cyklus $C_2^* = (\omega^* \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2})$ dessen Elemente sämtlich gewissen l^2 Zahlen der Form ω^* gleichwertig sind. Es entspricht aber dem Cyklus C_2^* ein System S_2 von l^2 Elementen der Formel (22). Dasselbe System S_2 entspricht sämtlichen Cyklen, deren Elemente mit den Elementen von S_1 gleichwertig sind. Aus jeder Zahl ω^* der Art A entspringt ein Cyklus C_2, also auch ein System S_2. Zwei Systeme S_2, welche auch nur ein gleichwertiges Element haben sind identisch. Infolgedessen zerfallen die Zahlen ω^* in lauter getrennte Systeme S_2 von ungleichwertigen Elementen. Damit ω^* und ω^{**} demselben Cyklus angehören, muß also notwendige und hinreichende Bedingung die Relation

$$\omega^{**} = \omega^* \omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \alpha^i \tag{29}$$

bestehen, wo e_1, e_2 Exponenten $0 \ldots l-1$ und α eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl in k bedeutet.

Die Anzahl der Systeme S_2 beträgt mindestens l^{r-2}.

Die Reihe

$$(v_{\frac{m}{2}+1},\ v_{\frac{m}{2}+2},\ \cdots,\ v_{\frac{m}{2}+p}) \tag{30}$$

erlaubt l^{r-2} Wertfolgen. Greifen wir aus jedem System S_2 ein Element heraus, so haben wir l^{r-2} ungleichwertige Elemente. Infolgedessen müssen mindestens l dieselbe Wertfolge aufweisen.

Der Quotient $\frac{\omega^*}{\omega^{**}}$ zweier derselben ist gleichwertig einer ganzen primären Zahl ω_2 von der Form

$$\omega_2 = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{\frac{m}{2}+p}^{u_{\frac{m}{2}+p}} k_1^{v_1} \ldots k_{\frac{m}{2}}^{v_{\frac{m}{2}}}\ k_{\frac{m}{2}+1}^{v_{\frac{m}{2}+1}} k_{\frac{m}{2}+2}^{v_{\frac{m}{2}+2}} k_{\frac{m}{2}+3}^{v_{\frac{m}{2}+3}}.$$

Die Exponenten sind nicht sämtlich Null. Es besteht ferner im Hinblick auf die Relation (29) keine Gleichung.

$$\omega_1^{e_1} \omega_1^{e_2} \omega_2^{e_3} = \alpha^l, \tag{31}$$

wo e_1, e_2, e_3 Zahlen der Reihe $0, \cdots, l-1$

sind und α eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl des Körpers bedeutet.

Auf die gleiche Weise fahren wir nun fort. Es ist ersichtlich, daß wir so p Zahlen

$$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$$

gewinnen, die sämtlich primär und von der Form (22) sind und zwischen denen keine Relation

$$\omega_1^{e_1} \omega_2^{e_2} \ldots \omega_p^{e_p} = \alpha^l \tag{32}$$

besteht, wo die Exponenten $e_1 \ldots e_p$ sämtlich von Null verschiedene ganze rationale Zahlen sind und α eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl des Körpers bedeutet.

Die Gleichungen

$$x_1^l = \omega_1,\ x_2^l = \omega_2,\ \cdots x_p^l = \omega_p \tag{33}$$

definieren p relativcyklische Körper

$$k(x_1), \ldots k(x_p).$$

Die Diskriminanten dieser p Körper bezüglich des Grundkörpers k sind infolge des Umstandes, daß $\omega_1 \ldots \omega_p$ primär sind, zu l prim. Sie können nur solche ideale Primfaktoren enthalten, welche in den Größen $k_1 \ldots k_{\frac{n}{2}+1}, \ldots$ aufgehen. Gelingt es nachzuweisen, daß die Exponenten $v_1, \ldots v_{\frac{n}{2}+1}$ sämtlich Null sind, so folgt daraus, daß diese Diskriminanten keinen Teiler enthalten und also 1 sind. Dieser Nachweis ist das Ziel der nächstfolgenden Entwicklungen.

Theorie der Polarisationscapacität.

Von

F. Krüger.

(Aus dem Institut für physik. Chemie an der Universität Göttingen.)

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Febr. 1903 von W. Nernst.

Eine weitergehende Entwicklung der Theorie der Polarisationscapacität begann erst, nachdem von F. Kohlrausch[1]) die ältere, in zahlreichen Arbeiten benutzte Meßmethode mittelst Gleichstrom durch die weit elegantere mittelst Wechselstrom ersetzt war. Kohlrausch selbst faßt die Elektrode als Kondensator auf, d. h. er setzt das Verhältnis der durch eine elektrolytische Zelle geflossenen Elektricitätsmenge zu der Polarisation p an der Elektrode gleich einer Konstanten $\mathfrak{C}$, der Polarisationscapacität; also wenn mit i die Stromstärke und mit t die Zeit bezeichnet wird

$$\frac{\int i\,dt}{p} = \mathfrak{C}, \quad \text{oder } p = \frac{1}{\mathfrak{C}}\int i\,dt. \tag{1}$$

Für einen harmonischen Wechselstrom $i = a \sin mt$, wo a die Amplitude, $\frac{m}{2\pi} = N$ die Wechselzahl bedeutet, ergiebt sich daraus

$$p = \frac{a}{\mathfrak{C}}\int \sin mt\,dt = \frac{a}{m\mathfrak{C}} \sin\left(mt - \frac{\pi}{2}\right). \tag{2}$$

Die elektromotorische Kraft der Polarisation ist hiernach gegenüber dem Strom in der Phase um $\pi/2$ verschoben.

Speziellere Vorstellungen entwickelte, ausgehend von wesentlich anderer Grundlage, Warburg[2]) in seiner Theorie der Polari-

---

1) F. Kohlrausch, Pogg. Ann. 148, p. 443. 1872.
2) Warburg, Wied. Ann. 67, p. 493. 1899.

sationscapacität sogenannter umkehrbarer Elektroden, d. h. von Elektroden in den Lösungen der Salze ihrer Metalle. Nach dieser ist die Polarisation im wesentlichen bedingt durch die vom Strome bewirkte Konzentrationsveränderung der Lösung und die damit verbundene Diffusion. Die mathematische Verfolgung dieses Gedankens ergab als Hauptresultat, daß die von der Stromamplitude unabhängige Polarisationscapacität, d. h. die sogenannte Initialcapacität, umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl sein muß, und zweitens, daß die Phasenverschiebung der Polarisation gegenüber der Stromstärke nur $\pi/4$, statt nach Kohlrausch $\pi/2$, beträgt. Diese Theorie, die im Gegensatz zu der ersteren, der Ladungsstromtheorie, als Leitungsstromtheorie bezeichnet wird, wurde bekanntlich von Elsa Neumann[1]) für Hg-Elektroden in H_2SO_3-Lösung, gesättigt mit Hg_2SO_4, sowie für Ag-Elektroden in HNO_3-Lösung, versetzt mit $AgNO_3$, im allgemeinen gut bestätigt. Allein es waren schon früher von M. Wien[2]) an blanken unbeladenen Platinelektroden und von Orlich[3]) an Quecksilberelektroden in den Lösungen der Salze leichter Metalle für die durch die allgemein geltende Gleichung

$$p = \frac{a}{\mathfrak{C}.m} \cdot \sin\left(mt - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right) \tag{3}$$

definierte Phasenverschiebung ϑ Werte von $3° - 20°$ gefunden, die doch nach Warburg 45° betragen sollte. Ferner war in diesen Fällen die Capacität $\mathfrak{C}$ selbst konstant oder kam wenigstens einer Konstanten näher als $\mathfrak{C}.\sqrt{m}$. Dies Letztere fand auch E. Neumann bei Ag-Elektroden in HNO_3, der kein $AgNO_3$ zugesetzt war. Es unterlag hiernach keinem Zweifel, daß in gewissen Fällen außer der Diffusion noch ein anderer Faktor eine Rolle bei der Polarisation spielt, bei dessen Ueberwiegen sich das Verhalten der Elektrode dem von Kohlrausch formulierten Grenzfall nähert, für den $\vartheta = 0$ und $\mathfrak{C} =$ konst. charakteristisch ist, während, wenn sein Einfluß gegenüber dem der Diffusion verschwindet, die Gesetze $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und $\mathfrak{C}.\sqrt{m} =$ konst. gelten.

Betrachten wir die Vorgänge an der Elektrode im Lichte der neueren elektrochemischen Theorien, so läßt sich dies Verhalten in der That erwarten. Wie nämlich zuerst Helmholtz näher aus-

---

1) E. Neumann, Wied. Ann. 67, p. 499. 1899.
2) M. Wien, Wied. Ann. 58, p. 37. 1896.
3) E. Orlich, Inaugur.-Diss. Berlin 1896.

führte, muß sich an der Grenzfläche zweier auf verschiedenem Potential befindlichen Körper, also speziell an der Berührungsstelle Metall-Lösung eine elektrische Doppelschicht ausbilden. Diese Folgerung aus den Grundsätzen der Elektricitätslehre liegt bekanntlich auch der Nernstschen Theorie der Lösungstension zu Grunde, nach der die Belegung der Doppelschicht in der Lösung von Ionen gebildet wird. Die Flächendichte der Elektricität ist eine Funktion der Potentialdifferenz und, da diese nach der bekannten Nernstschen Formel

$$E = \frac{RT}{n} ln \frac{P}{p}$$

von dem osmotischen Druck p der Ionen oder der diesen proportionalen Konzentration c abhängt, auch eine Funktion von c. Ein durch eine Zelle fließender Strom ändert primär in bekannter Weise die Konzentration c an der Elektrode, damit aber indirekt die Flächendichte der Doppelschicht. Diese Aenderung der Flächendichte mit der Aenderung der Konzentration erfolgt, ohne daß von außen Elektricität zugeführt zu werden braucht, ebenso wie sich beim Eintauchen eines Metalles in eine Lösung die Doppelschicht ohne Ladungsstrom ausbildet, eine Auffassung, die bekanntlich die Grundlage der durch die Palmaerschen[1]) Versuche glänzend bestätigten Nernstschen Theorie der Tropfelektroden bildet. Die Ausbildung der Flächenbelegung resp. die Aenderung ihrer Dichte bedingt aber bekanntlich eine geringe Aenderung der Konzentration an der Elektrode, die, wie eine leichte Ueberlegung zeigt, stets die durch die Elektrolyse bewirkte Conzentrationsänderung vermindert um die zur Aenderung der Doppelschicht notwendige Menge, d. h. die Doppelschicht verhält sich ganz wie ein Kondensator, der einen Teil der durch die Zelle geflossenen Elektricitätsmenge in sich aufnimmt. Ist diese Menge groß, so sind wir dem Falle nahe, wo $\mathfrak{C} = \text{const}$ und $\vartheta = 0$; ist sie klein, so gelten die Warburgschen Regeln $\mathfrak{C} . \sqrt{m} = \text{const}$ und $\vartheta = \pi/4$.

Es soll hier lediglich die sogenannte Initialcapacität behandelt werden. Gegenüber den schwachen Strömen, die zu ihrer Messung verwandt werden dürfen, kann man die Doppelschichtencapacität jedenfalls als eine Konstante betrachten. Die Formeln sollen der Einfachheit halber für Elektroden in Lösung ihrer Salze ent-

---

1) W. Palmaer, Zeitschr. f. phys. Chem. 25, p. 265. 1898.

wickelt werden, der ein Ueberschuß eines Elektrolyten mit gleichem Anion zugesetzt ist[1]).

Die z-Achse stehe senkrecht auf der Elektrode mit der positiven Richtung nach der Lösung zu, dann gilt für die Diffusion in dieser die bekannte Gleichung

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \varkappa \cdot \frac{\partial^2 c}{\partial z^2}, \tag{4}$$

wo c die Konzentration des als vollkommen dissociirt angenommenen Elektrolyten, $\varkappa$ dessen Diffusionskonstante bedeutet.

Käme die Doppelschicht nicht in Betracht, so würde nach der Rechnung von E. Neumann die Vermehrung des Metallsalzes an der Elektrode, an der $z = 0$ ist, betragen

$$\mu = \frac{i}{\varepsilon}$$

in Grammäquivalenten, wo ε die Ladung eines gr-Ions bedeutet. Da aber die Elektricitätsmenge $\frac{dQ}{dt}$ zur Ladung der Doppelschicht verbraucht wird, wobei Q die Dichte der Elektricität pro Flächeneinheit bedeutet, so haben wir für die Vermehrung der Concentration

$$\mu' = \frac{i}{\varepsilon} - \frac{q}{\varepsilon}\frac{\partial Q}{\partial t} = \frac{i}{\varepsilon} - \frac{q}{\varepsilon} \cdot C' \cdot \frac{\partial E}{\partial t},$$

da die Doppelschichtencapacität

$$C' = \frac{Q}{E}.$$

ist. q bedeutet hier die Oberfläche.

Diese durch den Strom an die Elektrode herangeführte Salzmenge muß nun im stationären Zustande gleich der durch den entstehenden Diffusionsstrom fortströmenden sein. Diese letztere Menge beträgt aber

$$q\varkappa\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0},$$

also muß sein

$$0 = \mu' + q\varkappa\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0} = \frac{i}{\varepsilon} - \frac{q}{\varepsilon} \cdot C' \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + q\varkappa\left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0}$$

---

1) Der Gang der Rechnung ist analog der von Warburg neuerdings (Ann. d. Phys. 6, p. 125. 1901) in seiner in formaler Beziehung teilweise übereinstimmenden Theorie der Polarisationscapacität des Platins gegebenen, bezüglich deren Erörterung auf meine demnächst erscheinende Dissertation verwiesen werden muß.

oder für einen Wechselstrom $i = a \sin mt$

$$\frac{a}{q \cdot \varepsilon} \sin mt = -\varkappa \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0} + \frac{C'}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Da nun E bekanntlich eine Funktion von c ist, so können wir schreiben

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \frac{\partial c}{\partial t},$$

also ist:

$$\text{für } z = 0 \left| \frac{a}{q \cdot \varepsilon} \sin mt = -\varkappa \left(\frac{\partial c}{\partial z}\right)_{z=0} + \frac{C'}{\varepsilon} \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}. \right. \quad (5)$$

Als zweite Bedingungsgleichung bekommen wir, da im Innern der Lösung die Konzentration constant bleibt, für

$$z = \infty \mid c = c_0. \quad (6)$$

Unseren drei Gleichungen genügt das Integral

$$c = c_0 - B \frac{a}{q \cdot \varepsilon} \cdot e^{-\frac{z}{\zeta}} \cdot \cos\left(mt - \frac{z}{\zeta} + \vartheta\right), \quad (7)$$

worin

$$\zeta = \sqrt{\frac{2\varkappa}{m}},$$

ferner

$$tg\,\vartheta = \frac{1}{1 + \frac{C'}{\varepsilon}\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}}$$

und

$$B = \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{\varkappa m}{2}}}.$$

Für sehr schwache Ströme können wir setzen

$$\frac{\partial E}{\partial c} = \frac{E - E_0}{c - c_0} = \frac{p}{c - c_0},$$

wo p die elektromotorische Kraft der Polarisation bedeutet. Also ist

$$p = (c - c_0)_{z=0} \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} = -B \frac{a}{q \cdot \varepsilon} \cos(mt + \vartheta) \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}$$

$$= \frac{a}{q \cdot \varepsilon} \cdot \frac{\sin\vartheta}{\sqrt{\frac{\varkappa m}{2}}} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sin\left(mt - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right).$$

Andererseits gilt für die Polarisation die oben erwähnte empirische Formel

$$p = \frac{a}{\mathfrak{C} \cdot m} \cdot \sin\left(mt - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right).$$

Durch Vergleichung beider Ausdrücke findet man für die Capacität pro Flächeneinheit

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mathfrak{C}}{q} = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{\varkappa}{2m}}}{\sin\vartheta} \tag{8}$$

und für die Phasenverschiebung

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{1 + \frac{C'}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}}. \tag{9}$$

Ist nun

$$\frac{C'}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}$$

sehr groß gegen 1, so ist

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\frac{C'}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}} \tag{10}$$

sehr klein und kann gleich $\sin\vartheta$ gesetzt werden. In diesem Falle nähert sich also ϑ der Null. Setzen wir ferner diesen Wert für ϑ in den Ausdruck für $\mathfrak{C}_1$ ein, so ergiebt sich

$$\mathfrak{C}_1 = C', \tag{11}$$

also gleich der Capacität der Doppelschicht.

Da nun bekanntlich

$$E = \frac{RT}{n} ln \frac{c}{c_0}$$

ist, also

$$\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} = \frac{RT}{n \cdot c_0} = \frac{k}{c_0}$$

ist, so wird dieser Fall dann eintreten, wenn c_0 klein ist. Ist andererseits c_0 groß, so wird

$$\frac{C'}{\varepsilon} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sqrt{\frac{2m}{\varkappa}}$$

sehr klein gegen 1, es wird dann also

$$\operatorname{tg}\vartheta = 1, \quad \vartheta = \frac{\pi}{4}, \quad \sin\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{12}$$

und

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\varepsilon}{\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa}{m}} = \frac{k'}{\sqrt{m}}. \tag{13}$$

Hier haben wir also den Fall, der der von Warburg aufgestellten Theorie entspricht, wo also der Einfluß der Diffusion den der Doppelschichtenbildung überwiegt.

Nach der hier entwickelten Theorie läßt sich also ganz allgemein bei allen Metallen in der Lösung ihrer Salze voraussehen, daß bei großer Ionenkonzentration die Polarisationscapacität umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl und ϑ gleich $\frac{\pi}{4}$ ist, daß dagegen bei geringer Konzentration die Capacität konstant und ϑ gleich Null ist. Da nun wahrscheinlich die Doppelschichtencapacität sich mit der Natur des Metalls und der die Belegung bildenden Ionen, wenn auch etwas, so doch nicht beträchtlich, zum mindesten nicht in der Größenordnung ändert, so haben wir im letzteren Falle nicht nur eine konstante, sondern auch für alle Metalle angenähert gleiche Capacität zu erwarten. Für sehr schnelle Schwingungen, d. h. für sehr großes m wird der Einfluß der Diffusion, wie die Formeln zeigen, auch bei großer Ionenkonzentration verschwinden, daher lediglich die konstante Doppelschichtencapacität zur Geltung kommen. Da sich die Ionenkonzentration in der Nähe einer Elektrode durch eine angelegte Gleichstromspannung beliebig ändern läßt, so kann man voraussagen, daß mit Zunahme einer kathodischen Polarisation, z. B. an einer Hg-Elektrode, also mit Abnahme der Ionenkonzentration, die Capacität, die anfangs dem Gesetz $\mathfrak{C} = \frac{k}{\sqrt{m}}$ gehorcht, mehr und mehr von m unabhängig wird und ϑ von $\frac{\pi}{4}$ aus sich der Null nähert.

Dieselben Ueberlegungen gelten natürlich ebenso für Platin- oder Palladiumelektroden, die z. B. elektrolytisch, sei es kathodisch oder anodisch, mit Gas beladen sind. Nur wird hier durch den Strom nicht die Ionenkonzentration in der Lösung geändert, sondern die Beladung der Elektrode, also in der Formel

$$E = \frac{RT}{n} ln \frac{P}{p}$$

nicht p, sondern die Lösungstension P, die der Gasbeladung parallel geht. Da die Gasbeladung mit der Erhöhung einer, sei es kathodischen oder anodischen Gleichstrompolarisation zunimmt, so wird hier mit Zunahme der angelegten Spannung mehr und mehr der Einfluß der Diffusion im Metall zur Wirkung kommen, also die Capacität wachsen und umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Schwingungszahl werden, wie Ersteres schon Scott[1]), Letzteres Schönherr[2]) an Platinelektroden, die stark mit Wasserstoff beladen waren, fand.

Die Theorie ließ sich besonders in Bezug auf die Aenderung der Abhängigkeit der Capacität von der Schwingungszahl mit der Konzentration bestätigen einmal in $n.H_2SO_4$, gesättigt mit Hg_2SO_4, wobei die Konzentration an der Elektrode durch eine angelegte Gleichstromspannung variirt wurde. Im unpolarisirten Zustande wurden in Uebereinstimmung mit den Resultaten E. Neumanns die Warburgschen Gesetze $\mathfrak{C} = \frac{k}{\sqrt{m}}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ bestätigt. Nur änderte sich die Capacität etwas stärker mit der Schwingungszahl als umgekehrt proportional $\sqrt{m}$, ein Gang, der undeutlicher auch in den Messungen E. Neumanns zu erkennen ist und aus dem später noch zu besprechenden Einflusse der nicht völligen Dissoziation zu erklären sein dürfte. Wie die Theorie voraussehen läßt, sank schon bei kathodischer Polarisation mit ca. 0,1 Volt, durch welche die Ionenkonzentration auf etwa den 3000. Teil herabgesetzt wird, die Capacität auf den 30.—40. Teil ihres ursprünglichen Wertes und näherte sich merklich der Konstanz. Von einer Polarisation mit 0,2 Volt an zeigt sich dann die Capacität bis auf wenige Prozente als unabhängig von der Schwingungszahl, wofür folgende Tabellen ein Beispiel geben:

Tabelle 1.

Hg-Elektrode mit einem Durchmesser von 4,5 mm, ca. 36 Stunden kathodisch polarisirt mit 0,322 Volt, Potentialdifferenz gegen die H_2-Elektrode: — 0,329 Volt.

N	C	$C.\sqrt{m}$
250 anf.	5,10	202
250 end.	5,24	208
125	4,75	133
62,5	5,72	113

1) Scott, Wied. Ann. 67, p. 388. 1899.
2) P. Schönherr, Ann. d. Phys. 6, p. 116, 1901.

Tabelle 2.

Hg-Elektrode mit einem Durchmesser von 1,15 cm, ca. 8 Stunden kathodisch polarisirt mit 1,120 Volt, Potentialdifferenz gegen die H_2-Elektrode: + 0,469 Volt.

N	C	$C.\sqrt{m}$
250 anf.	8,78	348
250 end.	8,32	330
125	9,03	253
62,5	9,33	185

Eine geringe Zunahme der Capacität mit der Schwingungszahl ist in den meisten Versuchen noch erkennbar und dürfte auf einen geringen Einfluß der Diffusion zu schieben sein. Im wesentlichen aber ist mit Abnahme der Konzentration die Capacität unabhängig von der Schwingungszahl geworden, wird also nur noch durch die Doppelschichtenbildung bedingt. Dies Resultat ergab sich ebenso in Lösungen von $n \cdot KCNS + \frac{1}{100} n \cdot HgCNS$, von $KJ + \frac{1}{100} n \cdot HgJ_2$, sowie in $n \cdot K_2S + \frac{1}{100} n \cdot HgS$. In letzterer Lösung war die Capacität schon im unpolarisirten Zustande der Elektrode sehr angenähert konstant, was sich leicht daraus erklärt, daß in dieser Lösung die Hg-Ionenkonzentration schon an und für sich ganz außerordentlich gering ist. Die Uebereinstimmung des allerdings nur angenähert bestimmbaren Wertes der Capacität pro cm^2 zu 6—7 M.F, mit dem von Schönherr[1]) für Platin, dem intensiv die Gasbeladung entzogen war, gefundenen (7 M.F.) dürfte als weitere Bestätigung der Theorie aufzufassen sein. Hinsichtlich des weiteren experimentellen Materials muß auf die Dissertation verwiesen werden.

An unpolarisirten Hg-Elektroden in Lösungen von KCNS und KJ versetzt mit den entsprechenden komplexen Hg-Salzen zeigte sich die auffallende Thatsache, daß die Capacität trotz der äußerst geringen Ionenkonzentration außerordentlich groß war und mit der Schwingungszahl stärker veränderlich als umgekehrt proportional $\sqrt{m}$. (Tabellen siehe Dissertation.)

Die erste Thatsache erklärt sich ohne weiteres aus dem bekannten Verhalten der Komplexsalze, die die herauselektrolysirten Hg-Ionen sehr schnell nachliefern. Die letztere dagegen läßt sich aus dem alleinigen Einfluß der Diffusion der komplexen Anionen nicht deuten, dagegen führt zu ihrer Erklärung die Annahme einer

1) loc. cit.

endlichen Geschwindigkeit der Dissociation derselben in die Hg-Ionen und die entsprechenden Anionen. Die Geschwindigkeit von Ionenreaktionen ist nun zwar bekanntlich sehr groß, d. h. sie zählt nach Bruchteilen einer Sekunde, jedoch berechtigt nichts dazu, sie als unendlich groß zu betrachten. Es wurde vielmehr auch bereits die Annahme einer endlichen Dissociationsgeschwindigkeit von Nernst[1]) benutzt bei der Erklärung des anodischen Zersetzungspunktes bei 1,08 Volt aus der Dissociation

$$\overline{OH} = \overline{\overline{O}} + \overset{+}{H},$$

ferner von Caspari[2]) bei der Deutung seiner Versuche über Ag-Abscheidung. Betrachten wir also die Geschwindigkeit von Ionenreaktionen als kommensurabel mit der Schwingungsdauer unserer Wechselströme, so muß deren Einfluß hier in Erscheinung treten.

Bei einer sehr geringen Konzentration des nur teilweise dissociirten Salzes wird der Einfluß der Dissociation ebenso wie der der Diffusion von dem der Doppelschichtenbildung überwogen. In einer Lösung mittlerer Konzentration dagegen kann sowohl der Einfluß der Diffusion wie der der Dissociation zur Geltung kommen. Der der letzteren ist nun offenbar folgender. Da die erwähnte Reaktion mit endlicher Geschwindigkeit verläuft, so wird die in jedem Moment vorhandene Hg-Ionenkonzentration nicht die dem Gleichgewicht entsprechende sein. Die Polarisation hängt nun aber nach der Nernstschen Formel lediglich von der Ionenkonzentration ab, diese, also auch die Polarisation ist daher eine andere, als sie bei unendlich großer Reaktionsgeschwindigkeit sein würde, und zwar ist, wie leicht einzusehen, die Polarisation stets größer, die Capacität also kleiner als ohne diesen Einfluß. Diese Differenz zwischen der dem Reaktionsgleichgewicht entsprechenden Polarisation und der thatsächlich vorhandenen wird jedoch im Vergleich zu der Gesamtpolarisation klein sein, solange diese selbst relativ groß ist. In dem Gebiete mittelstarker Konzentration wird daher der Einfluß der Dissociationsgeschwindigkeit gegenüber dem der Diffusion nur gering sein, d. h. hier gelten wenigstens angenähert die Gesetze $\mathfrak{C} = \frac{k}{\sqrt{m}}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{4}$.

Bei sehr hoher Konzentration des Salzes würde die Elektrode, wenn die Reaktionsgeschwindigkeit unendlich groß wäre, schließlich unpolarisirbar werden. Da die Geschwindigkeit jedoch endlich

1) Nernst, Ber. d. deutsch. chem. Gesellsch. 30 (2), p. 1547. 1897.
2) Caspari, Zeitschr. f. phys. Chem. 30, p. 89. 1899.

ist, wird auch noch Polarisation in diesem Grenzfalle vorhanden sein. Die Diffusion spielt hier keine Rolle mehr, also muß im stationären Zustande in dem an der Grenzfläche gelegenen Volumen der Lösung von der sehr geringen Dicke δx, in dem die Polarisationserscheinungen sich abspielen, die in jedem Moment durch den Strom hinzugeführte $\overset{+}{\mathrm{Hg}}$-Ionenmenge gleich der infolge der Reaktion

$$\overset{+}{\mathrm{Hg}} + \bar{\mathrm{A}} = \mathrm{HgA},$$

wo A ein beliebiges Anion bezeichnet, verschwindenden sein. Bezeichnet also c die Konzentration der Hg-Ionen, c' die des undissociirten Bestandteils, so ist bekanntlich

$$-\frac{dc}{dt} = k_1 . c^2 - k_2 . c', \tag{14}$$

wo k_1 und k_2 die Geschwindigkeitskoëffizienten bedeuten. Es sei ferner r die in gr-Aequ. ausgedrückte, in dem Volumen von der Grundfläche q und der Dicke δx enthaltenen Menge von Hg-Ionen, so ist

$$r = \delta x . q . c,$$

also

$$-\frac{dr}{dt} = k_1 . \delta x . q . c^2 - k_2 . \delta x q . c'.$$

Die Konzentration des undissociirten Bestandtheiles c' ist hier nach dem Obigen als konstant zu betrachten, sodaß wir auch schreiben können

$$-\frac{dr}{dt} = k_1' c^2 - k_2', \tag{15}$$

wo

$$k_1' = k_1 . \delta x . q \quad \text{und} \quad k_2' = k_2 . \delta x . q . c'.$$

Die in der Zeiteinheit demselben Volum durch den Strom $i = a \sin mt$ zugeführte Menge ist

$$\frac{a}{\varepsilon} . \sin mt = g \sin mt,$$

wo ε die an ein gr-Ion gebundene Elektricitätsmenge bedeutet und $g = \frac{a}{\varepsilon}$ gesetzt ist.

Also haben wir

$$k_1' c^2 - k_2' = g \sin mt, \tag{16}$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{k_2'}{k_1'} + \frac{g}{k_1'} \sin mt}, \tag{17}$$

$$= \sqrt{k_1'' + k_2'' \sin mt},$$

wo

$$k_1'' = \frac{k_2'}{k_1'} \quad \text{und} \quad k_2'' = \frac{g}{k_1'}.$$

Bekanntlich ist die Polarisation oder die Potentialdifferenz der polarisirten Elektrode gegen eine andere, ihr gegenüberstehende und im Vergleich mit ihr sehr großen, sodaß an dieser keine Polarisation auftritt, sondern die ursprüngliche Konzentration c_0 erhalten bleibt,

$$E = p = \frac{RT}{n} ln \frac{c}{c_0}.$$

Setzen wir für c den obigen Wert ein, so ergiebt sich

$$(18) \qquad p = \frac{RT}{n} ln \frac{\sqrt{k_1'' + k_2'' \sin mt}}{c_0}$$

$$= \frac{RT}{2n} ln \left(\frac{k_1''}{c_0^2} + \frac{k_2''}{c_0^2} \sin mt \right),$$

oder, nach Einsetzung der Werte für k_1'' und k_2'',

$$= \frac{RT}{2n} ln \left(\frac{c'}{c_0^2} \cdot \frac{k_2}{k_1} + \frac{g}{q \cdot \delta x \cdot k_1 \cdot c_0^2} \cdot \sin mt \right).$$

Nun ist

$$\frac{c'}{c_0^2} = k,$$

wo k die Dissociationskonstante bedeutet, und ferner bekanntlich [1])

$$k = \frac{k_1}{k_2},$$

also ergiebt sich

$$(19) \qquad p = \frac{RT}{2n} ln \left(1 + \frac{a}{\varepsilon \cdot q \cdot \delta x \cdot c_0^2} \cdot \sin mt \right),$$

nachdem für g wieder $\frac{a}{\varepsilon}$ gesetzt ist.

Der Ausdruck $\frac{a}{\varepsilon \cdot q \cdot \delta x \cdot c_0^2} \cdot \sin mt$ ist aber klein gegen 1, da in seinem Zähler die Stromamplitude a steht, welche wir ja von vornherein in Rücksicht auf die Initialcapacität sehr klein gewählt haben. Entwickeln wir daher den Logarithmus in eine Reihe, so können wir uns auf das erste Glied beschränken und erhalten

$$(20) \qquad p = \frac{RT}{2n} \cdot \frac{a}{\varepsilon \cdot q \cdot \delta x \cdot c_0^2} \cdot \sin mt.$$

---

1) cf. Nernst, Theoret. Chem. III. Aufl. p. 404.

Da wir als allgemeine Gleichung für die Polarisation bei sinusförmigem Wechselstrom wieder haben

$$p = \frac{a}{\mathfrak{C} \cdot m} \cdot \sin\left(mt - \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right),$$

so ergiebt sich aus dem Vergleich beider Formeln für die Capacität

$$\mathfrak{C} = \frac{2 \cdot n \cdot \varepsilon \cdot q \cdot \delta x \cdot c_0^2}{R \cdot T \cdot m} = \frac{k'}{m}, \qquad (21)$$

wenn wir setzen

$$k' = \frac{2n \varepsilon q \delta x c_0^2}{RT},$$

und für die Phasenverschiebung

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} = 90^0. \qquad (22)$$

In diesem Grenzfalle ist also die Capacität umgekehrt proportional der Schwingungszahl m und direkt proportional dem Quadrat der Hg-Ionenkonzentration oder der ersten Potenz der Konzentration des undissociirten Bestandteiles.

Bei sehr hohen Schwingungszahlen kann wiederum der Einfluß der Doppelschichtencapacität sich bemerkbar machen, er soll daher hier noch in Rechnung gezogen werden. Da die infolge der Doppelschichtenbildung in jedem Moment fortgenommene Ionenmenge gleich $\frac{q}{\varepsilon} \cdot C' \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \frac{\partial c}{\partial t}$ ist, so bekommen wir, wenn wir wieder beachten, daß in jedem Moment die an die Elektrode herangeführte Menge im stationären Zustande gleich der fortströmenden sein muß,

$$q \cdot k_1 \delta x c^2 - q \cdot k_2 \cdot \delta x \cdot c' + \frac{q}{\varepsilon} \cdot C' \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \frac{\partial c}{\partial t} = g \sin mt. \qquad (23)$$

Es ist dies eine Ricatische Differentialgleichung mit einem transcendenten Coëfficienten. Da ihre Integration durch Quadratur daher ausgeschlossen, die durch Reihenentwickelung die Behandlung der Frage jedoch komplicirter machen würde, soll hier der Einfachheit halber der Fall betrachtet werden, daß die Reaktionsgeschwindigkeit nicht der zweiten, sondern der ersten Potenz der Ionenkonzentration proportional ist, wodurch der Charakter der Erscheinung nicht wesentlich geändert wird. Man würde diesen Fall bekommen, wenn man der Lösung ein zweites, aber stark dissociirtes Salz mit dem gleichen Anion zusetzte; denn dann würde, da ja die Anionenkonzentration konstant bliebe, die Ab-

nahmegeschwindigkeit der Metallionen proportional der ersten Potenz ihrer eigenen Konzentration sein.

Die Gleichung geht dann über in

$$(24)\quad q.k_1.\delta x.\eta.c - q.k_2.\delta x.c' + \frac{q}{\varepsilon}\cdot C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}\cdot\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{a}{\varepsilon}\sin mt,$$

wo η die konstante Konzentration der Anionen bedeutet. Durch Umformung ergiebt sich

$$(25)\quad \frac{dc}{dt} = -\frac{\varepsilon.k_1.\delta x.\eta.c}{C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}} + \frac{\varepsilon.k_2.\delta x.c'}{C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}} + \frac{a}{q.C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}}\cdot\sin mt$$

$$= -k_1'.c + k_2' + k_3'.\sin mt,$$

wo

$$k_1' = \frac{\varepsilon.k_1.\delta x.\eta}{C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}},\quad k_2' = \frac{\varepsilon.k_2.\delta x.c'}{C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}},\quad k_3' = \frac{a}{q\cdot C'\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}}.$$

Die Integration der Gleichung ergiebt

$$c = \frac{k_2'}{k_1'} + \frac{k_3'}{k_1'^2+m^2}(k_1'\sin mt - m\cos mt) + K.e^{-k_1't},$$

wo K eine Integrationskonstante bedeutet. Das mit ihr multiplicirte Glied wird für $t = \infty$ gleich Null, praktisch ist es schon nach einiger Zeit zu vernachlässigen. Unter Berücksichtigung dieses Umstandes und durch Umformung findet man

$$(26)\quad c = \frac{k_2'}{k_1'} + \frac{k_3'}{\sqrt{k_1'^2+m^2}}\cdot\sin(mt-\psi),$$

wo

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m}{k_1'}.$$

Auf demselben Wege wie oben erhält man für die Polarisation

$$(27)\quad p = \frac{RT}{n}\cdot\frac{k_3'}{c_0\cdot\sqrt{k_1'^2+m^2}}\cdot\sin(mt-\psi),$$

und durch Vergleichung mit dem allgemeinen Ansatze für p

$$(28)\quad \psi = \frac{\pi}{2} - \vartheta = \operatorname{arc\,tg}\frac{m}{k_1'}$$

und

$$(29)\quad \mathfrak{C} = \frac{a.n.c_0.\sqrt{k_1'^2+m^2}}{k_3'.RT.m}.$$

Durch Einsetzen der ursprünglichen Größen ergiebt sich

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right) = \frac{m \cdot C' \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}}{\varepsilon \cdot k_1 \cdot \delta x \cdot \eta},$$

oder, da

$$\left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} = \frac{RT}{n \cdot c_0},$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{m \cdot R \cdot T \cdot C'}{\varepsilon \cdot k_1 \cdot \delta x \cdot n \cdot \eta \cdot c_0}. \tag{30}$$

Die Tangente des Winkels ψ, der die Abweichung der Phasenverschiebung von 90° darstellt, ist also direkt proportional m.

Für die Capacität finden wir

$$\mathfrak{C} = \frac{n \cdot q \cdot c_0 \cdot C'}{m \cdot RT} \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0} \cdot \sqrt{\left(\frac{\varepsilon \cdot k_1 \cdot \delta x \cdot \eta}{C' \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}}\right)^2 + m^2} \tag{31}$$

Falls m^2 klein gegenüber dem andern Glied unter der Wurzel ist, also für nicht sehr hohe Schwingungszahlen, ist

$$\mathfrak{C} = \frac{q \cdot \varepsilon \cdot k_1 \cdot \delta x \cdot n \cdot \eta \cdot c_0}{m \cdot RT},$$

oder für die Capacität pro Flächeneinheit

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\mathfrak{C}}{q} = \frac{\varepsilon \cdot k_1 \cdot \delta x \cdot n \cdot \eta \cdot c_0}{m \cdot RT}. \tag{32}$$

Die Capacität ist also auch hier umgekehrt proportional m.

In diesem Falle wird

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{C'}{\mathfrak{C}_1}, \tag{33}$$

ψ also jedenfalls sehr klein.

Für hohe Schwingungszahlen aber ergiebt sich

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{n \cdot c_0 \cdot C' \cdot \left(\frac{\partial E}{\partial c}\right)_{c=c_0}}{RT} = C', \tag{34}$$

also gleich der Doppelschichtencapacität.

Das Verhalten der Hg-Elektroden in den erwähnten Komplexsalzlösungen fällt in das Zwischengebiet, in dem sowohl Diffusion wie endliche Dissociationsgeschwindigkeit wirksam sind, da in ihnen die Konzentration des Salzes noch nicht groß genug ist, um als konstant betrachtet werden zu können. Es dürfte nicht ausge-

schlossen sein, daß man durch diesbezügliche Messungen zu einer wenigstens angenäherten Bestimmung der Geschwindigkeit von Ionenreaktionen gelangen könnte.

Nach den Versuchen von M. Wien[1]) nähert sich ferner das Verhalten des mit Palladiumschwarz überzogenen und mit Wasserstoff stark beladenen Palladiums sehr stark dem Grenzfall, in dem $\mathfrak{C} = \frac{k'}{m}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist. Es erklärt sich dies nach dem Obigen, wenn man mit Hoitsema[2]) annimmt, daß der Wasserstoff im Palladium bei starker Beladung teils ein-, teils zweiatomig gelöst ist, also die Reaktion

$$2\overset{+}{\mathrm{H}} = \mathrm{H}_2$$

erfolgte. Die Annahme einer Palladiumwasserstofflegirung dürfte allerdings ebenso zu einer Erklärung führen.

Unter Berücksichtigung von Doppelschichtenbildung, Diffusion und endlicher Dissociationsgeschwindigkeit ergiebt sich also eine das ganze Gebiet einigermaßen umfassende Erklärung der Polarisationserscheinungen, deren drei Grenzfälle wir sämtlich am Palladium beobachten können: Im unbeladenen Zustande herrscht nur der Einfluß der Doppelschichtenbildung, daher ist $\mathfrak{C}$ = konst und $\vartheta = 0$ oder wenigstens klein; bei mittlerer Beladung oder Wasserstoffkonzentration der der Diffusion, hier gelten die Warburgschen Gesetze $\mathfrak{C} = \frac{k}{\sqrt{m}}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{4}$; bei starker Beladung der der endlichen Dissociationsgeschwindigkeit, für die $\mathfrak{C} = \frac{k'}{m}$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ charakteristisch ist. Für sehr schnelle Schwingungen aber müßte sich in allen drei Fällen die von der Schwingungszahl m unabhängige Doppelschichtencapacität ergeben.

Für die Anregung zu dieser Arbeit, sowie für das stete, fördernde Interesse an meinen Versuchen spreche ich Herrn Prof. Nernst meinen wärmsten Dank aus.

1) M. Wien, Ann. d. Phys. 8, p. 372. 1902.
2) Hoitsema, Zeitschr. f. phys. Chem. 17, p. 1. 1895.

Ueber Molekulargewichtsbestimmungen bei sehr hohen Temperaturen.

(Mit 1 Figur.)

Von

W. Nernst.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. März 1903.

Die höchsten bei Dampfdichtebestimmungen bisher von Nilson und Petterson, V. Meyer und neuerdings von Biltz[1]) erreichten Temperaturen liegen bei etwa 1700°—1800°; der Schmelzpunkt der bisher benutzten Platin- oder Porzellangefäße bot eine unübersteigbare Schranke.

Bei der großen Bedeutung, welche Dampfdichtebestimmungen für die Chemie der hohen Temperaturen besitzen, und angesichts der Thatsache, daß schon bei einer Steigerung der Temperatur um einige hundert Grade zahlreiche Substanzen den Gaszustand annehmen, die bei den bisher der Messung zugänglichen Teperaturen eine zu kleine Dampfspannung besitzen, habe ich mich bereits seit einer Reihe von Jahren mit diesem Probleme beschäftigt; nach zahlreichen vergeblichen Vorversuchen in dieser Hinsicht kann ich nunmehr eine Methode beschreiben, die bis zu ca. 2000° und vielleicht noch höher relativ sichere und genaue Messungen ermöglicht.

1. Gefäßmaterial. Versuche, aus Gemischen seltener Erden gasdichte Gefäße zu brennen, führten bisher nicht zum Ziele, doch möchte ich es keineswegs für hoffnungslos ansehn, aus solchen Materialien porzellanartige, dabei aber in hohem Grade feuerfeste Gefäße herzustellen. Nachdem aber die Firma Heraeus in neuester Zeit es zu Wege gebracht hat, das bekanntlich sehr

1) Zeitschr. physik. Chemie; **19**, 385 (1896).

spröde Iridium bearbeiten zu können, war die Möglichkeit der Herstellung von Gefäßen gegeben, die Temperaturen von 2000° und mehr vertragen können.

2. Meßmethode. Als solche kommt wohl nur das V. Meyer'sche Luftverdrängungsverfahren in Frage. Freilich nöthigte die Schwierigkeit, größere Gefäße längere Zeit konstant auf ca. 2000° zu erhalten, einerseits, der hohe Preis des Iridiums andererseits, die Methode in äußerst kleine Dimensionen einzuzwängen. Das Volumen des auf nahe gleich hoher Temperatur befindlichen Theiles der Birne betrug bei den definitiven Versuchen ca. 2,5 ccm und dementsprechend durfte das Volumen der vergasten Substanz den Werth von 1 ccm jedenfalls nicht erheblich übersteigen. Bei Zimmertemperatur gemessen beträgt das verdrängte Luftvolum dann nur ca. 0,13 ccm, das genau bestimmt werden mußte; es gelang dies in einfachster Weise durch Messung der Verschiebung, die ein kleiner Quecksilberfaden in einer getheilten und kalibrierten Glaskapillare infolge der aus dem Iridiumgefäß verdrängten Luft erfuhr.

Natürlich handelt es sich dabei um sehr geringe Substanzmengen, die zur Verdampfung gelangten und häufig nur nach Bruchtheilen eines Milligramms zählten. Die gewöhnlichen Wagen versagten also und ich mußte mir daher für meine Zwecke eine ungewöhnlich empfindliche Wage konstruiren. Da bei der Wägung eine Genauigkeit von Bruchtheilen eines Prozentes mehr als ausreichend ist, so gelang die Lösung dieses Problems verhältnismäßig einfach; ich baute mir nämlich aus einem dünnen Glasfaden eine Wage, die nach Art einer gewöhnlichen Briefwage funktionierte; anstatt einer Schneide diente ein auf den geeignet gebogenen Glasfaden aufgekitteter Quarzfaden, der von einem gabelförmigen Messingstativ gehalten wurde, d. h. ich benutzte das Prinzip einer Torsionswage. Der Glasfaden lief in einem Zeiger aus, der über einer in 0,5 mm getheilten Glasskala spielte und mittelst Fernrohr abgelesen wurde. Der einfache Apparat bewährte sich vorzüglich; er soll, da er auch für chemische Analysen (Atomgewichtsbestimmungen) mit sehr kleinen Substanzmengen sich brauchbar erwiesen hat, an anderer Stelle eingehend beschrieben werden. Hier sei nur noch mitgetheilt, daß bei Beginn der definitiven Messungen ein Theilstrich (0,5 mm) 0,0378 mgr, nach Abschluß derselben 0,0380 mgr entsprach; durch mehrfache Wiederholung der Wägung konnte die Genauigkeit derselben leicht auf 1—2 Tausendstel mgr gesteigert werden. Die Aichung der Wage geschah mittelst eines genau gewogenen dünnen Platindrahtes, der in eine

Anzahl möglichst gleicher Theile von ca. 1 mgr Gewicht zerschnitten wurde.

3. Heizvorichtung. Mit Hülfe eines größeren Knallgasgebläses würden sich leicht die gewünschten, hohen Temperaturen erzielen, schwieriger aber konstant erhalten lassen. Der fürchterliche Lärm eines solchen Gebläses macht das Arbeiten damit aber keinesfalls zu einer Annehmlichkeit; eine gut regulirbare elektrische Heizung war jedenfalls vorzuziehen. Zunächst suchte ich röhrenförmige Widerstandsöfen aus geeigneten feuerfesten Leitern zweiter Klasse zu verwenden, die sich aber schließlich für den vorliegenden Zweck in mehrfacher Hinsicht weniger brauchbar erwiesen; hingegen bewährten sich ausgezeichnet Iridiumröhren, die mit Hülfe eines niedriggespannten Wechselstromes erhitzt und von der Firma Heraeus in größter Vollkommenheit hergestellt wurden.

4. Temperaturmessung[1]). Dieselbe geschah auf photometrischem Wege; unterhalb des senkrecht angeordneten Iridiumofens (vgl. Figur) befand sich ein elektrolytischer Glühstift, der für verschiedene Stromstärken photometriert worden war. Indem mit Hülfe gefärbter Gläser die Helligkeit des Stiftes der des Iridiumgefäßes gleich reguliert und der dazugehörige Strom des Stiftes gemessen wurde, konnte die Lichtemission E der Iridiumbirne pro mm^2 ohne weiteres berechnet werden. Da ferner letztere innerhalb des auf gleicher Temperatur befindlichen Iridiumrohres sich befand, so konnten unbedenklich die Strahlungsgesetze des schwarzen Körpers als gültig angenommen werden: ob der Vergleichsstift als schwarzer Körper strahlt oder nicht, kommt dabei nicht in Frage.

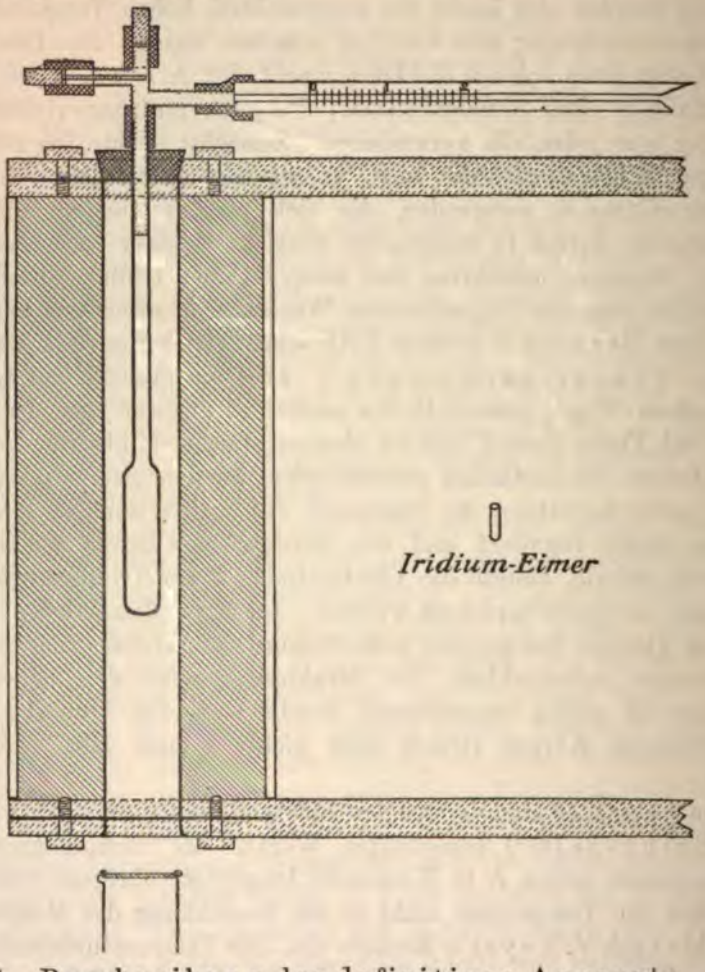
Im Folgenden sind die aus den Lichtemissionen nach Lummer und Pringsheim[2]) berechneten Werthe der Temperaturen in Celsiusgraden neben E in Klammern beigefügt; übrigens geht bekanntlich die Temperatur nicht in die Berechnung des Molekulargewichts nach V. Meyer's Methode ein. Die Temperaturberechnung ist zur Zeit nur eine annähernde, dürfte aber demnächst, sobald wir im Besitze weiterer Messungen der optischen Helligkeit in ihrer Abhängigkeit von der Temperatur sein werden, relativ genau werden. Im Folgenden sind aus dem Werthe 0,5 Hefnerkerzeen

---

1) Die hier beschriebene Methode, die ich bereits seit längerer Zeit verwende, läuft im Prinzip auf das inzwischen von Holborn und Kurlbaum (Berl. Acad. Ber. 1901, S. 712) beschriebene optische Pyrometer hinaus, dürfte aber bei so hohen Temperaturen durch Verwendung elektrolytischer Glühstifte besonders einfach und genau werden.

2) Vgl. dazu Rothmund, diese Nachrichten, 1901, Heft 3.

pro mm² bei 1690° die Temperaturen unter der Annahme berechnet worden, daß die Helligkeit mit der vierzehnten Potenz der Temperatur ansteigt[1]).



5. Beschreibung des definitiven Apparats. Alles Nähere dürfte nunmehr aus beiliegender Zeichnung verständlich werden. Starke Kupferleitungen führten zu dem aus einem Iridiumrohr gefertigten und mit angelötheten Platinscheiben versehenen Ofen, der ca. 2000—3000 Watt von der dickdräthigen Wickelung eines Oeltransformators empfing. Zum Wärmeschutze war das Iridiumrohr von gebrannter Magnesia und diese von einem Asbestmantel umgeben. Nach unten blieb das Iridiumrohr offen;

1) Vgl. dazu Lummer, Electrotechn. Zeitschr. **23**, 812 (1902).

es konnte so mittelst eines unter dem Lichtstift befindlichen Spiegelchens bequem die Strahlung des letzteren mit der des Iridiumgefäßes verglichen werden.

Als Iridiumgefäß diente bei den ersten Versuchen ein reagenzglasähnliches Gefäß, das oben mit Platin verschlossen wurde; um dem Innern einen birnenförmigen Inhalt zu geben, befand sich im oberen Theile ein Magnesiarohr. Auch hiermit wurden leidliche Zahlen gewonnen; Herr Dr. Riesenfeld, der diese Messungen ausgeführt hat, wird darüber an anderer Stelle berichten. Vor einigen Monaten jedoch überraschte mich die Firma Heraeus, die an all diesen Arbeiten stets das wärmste, thatkräftigste Interesse nahm, mit einer richtigen „Iridiumbirne", die ein Kunstwerk ersten Ranges ist und mir mit größter Liberalität von der Firma Heraeus zur Verfügung gestellt wurde; dieselbe wurde bei den hier mitgetheilten Versuchen ausschließlich benutzt.

An die Birne, deren oberer, kapillarer Theil durch eine von Wasser durchströmte Kupferspirale gekühlt wurde, schloß sich mit Gummiverbindungen die Fallvorrichtung an, die in der bekannten Form aus Messing gefertigt war. Die zur Ablesung der verdrängten Luftvolumina dienende Glaskapillare war ebenfalls mit Gummi dicht angesetzt.

Die gewogenen Substanzmengen wurden in Iridiumeimerchen der beigezeichneten Größe gefüllt und vor dem Versuch auf die Fallvorrichtung gebracht. Nach jedem Versuch wurde, ohne sonst etwas zu ändern, das Iridiumgefäß mit einer Platinkapillare ausgeblasen, sodaß in der Regel 3—4 Versuche rasch hintereinander ausgeführt werden konnten.

Versuchsergebnisse.

1. Kohlensäure. Als Substanz zur Prüfung des Apparats benutzte ich Kohlensäure, die sich nach Hineinbringen eines Stückchen gewogenen Kalkspaths in genau bekannter Menge entwickelte. Eine merkliche Dissociation ist, solange Sauerstoff im Ueberschuß vorhanden ist, bei den hier in Betracht kommenden Temperaturen ausgeschlossen. In den folgenden Tabellen bedeutet n den an der Skala abgelesenen Ausschlag, g die vergaste Substanzmenge in mgr, welche in diesem Falle durch Multiplikation der angewandten Kalkspathsubstanz mit 0,4396 erhalten wird.

Da der Werth eines ca. 0,5 cm langen und in fünf Unterabtheilungen getheilten Skalentheils 0,0215 ccm beträgt, so berechnet sich das Molekulargewicht der vergasten Substanz, wenn n den

Ausschlag in Skalentheilen bedeutet, zu

$$M = 28{,}88 \frac{(1+\alpha t)\,760}{0{,}001293 - 0{,}0215\,B} \cdot \frac{g}{n};$$

die Temperatur t der Glaskapillare betrug bei der folgenden Versuchsreihe 15°, der Barometerstand B 751 mm; es wird dann, wenn wir außerdem g in Milligramm, anstatt in Gramm, ausdrücken:

$$M = 1109 \frac{g}{n}.$$

g	n	M
0,3017	7,58	44,1
0,5117	13,50	42,0
1,222	32,34	41,9

Es betrug E 3,11 Hefnerkerzen (1970°).

Die Zahlen liegen dem theoretischen Werthe (44) hinreichend nahe. Vielleicht ist der Umstand, daß bei Anwendung größerer Substanzmengen die Zahlen etwas kleiner werden, so zu deuten, daß dann der vorhandene Luftsauerstoff nicht ausreicht, um die Dissociation völlig zurückzudrängen; es kann sich aber auch um Versuchsfehler handeln.

1. Quecksilber. Bei den nachfolgend beschriebenen Versuchen, in denen es sich nicht, wie bei der Kohlensäure, um eine bei Zimmertemperatur gasförmige Substanz handelt, zeigt sich stets die Erscheinung, daß der Quecksilberfaden, der sofort nach dem Einbringen der Substanz einen Ausschlag gab, hierauf allmählich zurückging, wie folgende Tabelle zeigt:

Zeit in Sekunden.	Stand des Quecksilberfadens.
0	16,20
15	16,60
30	17,10
45	17,60
60*	17,88
67	23,10
75	22,70
90	22,00
105	21,36
120	21,46.

Bei 60 ließ man die Substanz hineinfallen; man sieht, wie der Ausschlag anfänglich rasch, dann langsam zurückgeht. Je größer die angewandte Substanzmenge war, um so stärker war dieser Rückgang.

Die Ursache davon ist kaum lediglich in der Diffusion der vergasten Substanz zu den kälteren Theilen des Apparats hin zu erblicken; es scheint vielmehr die Vergasung so explosionsartig rasch zu erfolgen, daß ein kleiner Bruchtheil der Substanz in den kälteren kapillaren Theil des Iridiumgefäßes mitgerissen wird, wodurch nothwendig die Ausschläge zu klein, die Molekulargewichte daher zu groß werden. In Ermangelung eines Besseren wurde daher der Ausschlag auf den Zeitpunkt des Einfallens der Substanz extrapoliert, also im obigen Falle nicht 23,10 sondern 23,50 als maximaler Ausschlag gewählt.

Bei weiterer Verfeinerung der Methode wird sich dieser Fehler einschränken oder ganz beseitigen lassen; die nachfolgend mitgetheilten Zahlen der Molekulargewichte dürften sämtlich, weil die angebrachte Korrektion offenbar etwas zu klein ist, um einige Prozente zu hoch ausgefallen sein und zwar um so mehr, je größer die angewandte Substanzmenge war.

g	n	M
1,069	5,62	213
2,308	11,40	226.

Der Barometerstand betrug 738 mm, die Temperatur 14,0°; die Berechnung geschah nach der Formel

$$M = 1120 \frac{g}{n}.$$

Es betrug E 3,11 (1970°).

Wasser. Für die Dissociation dieser Substanz gilt das für Kohlensäure Gesagte; die Substanzmenge wurde in Gestalt von gewogenen Opalstückchen dosiert, deren Wassergehalt auf der Quarzwage zu 7,82, 8,22, 8,20, 7,63, 7,67 Mittel 7,91 % ermittelt wurde.

g	n	M
0,1596	9,8	18,4
0,1961	13,0	17,1.

Es war E 3,11 (1970°), ferner $B = 728$, $t = 15°$; somit

$$M = 1130 \frac{g}{n}.$$

Chlornatrium. Die Substanz verdampfte auch hier explosionsartig rasch; die Werthe waren

g	n	M
0,1622	3,4	52,9
0,479	8,8	60,4
0,8645	15,2	63,1.

Barometerstand und Temperatur wie bei den Kohlensäureversuchen. $E = 3{,}11$ (1970°).

Chlorkalium.

g	n	M
0,700	9,54	81,5
0,818	10,6	85,6.

Es betrug E 3,47 (1980°); im Uebrigen gilt das beim Chlornatrium Gesagte; in beiden Fällen sind die Werthe, wenn wir von dem ersten, wegen gar zu kleiner Substanz unsicheren Chlornatriumversuch absehen, um 8—10 % höher, als die theoretischen Zahlen (58,5 und 74,6). Das normale Molekulargewicht scheint für diese Substanzen, zumal wenn wir die Quecksilberversuche, die um nahe gleiche Beträge zu hoch ausfielen, damit in Parallele setzen, völlig sicher gestellt.

Nach Abschluß der soeben beschriebenen Versuche habe ich noch geprüft, ob thatsächlich im Sinne der beim Quecksilber mitgetheilten Resultate ein Mitreißen der vergasten Substanz zu den kälteren Theilen des Apparats erfolgt, ob also bei verminderter Verdampfungsgeschwindigkeit kleinere Werthe des Molekulargewichts sich ergeben. Zu diesem Zwecke wurden die Iridiumeimerchen mit starken Stopfen aus Zirkonstiften versehen, sodaß dadurch jedenfalls die Verdampfung verlangsamt werden mußte. Die erhaltenen Zahlen [($B = 752$, $t = 14{,}5°$, $E = 2{,}72$ (1943°)] waren:

g	n	M
1,615	8,96	200
1,760	9,54	204.

Die Annäherung an den theoretischen Werth (200) läßt nunmehr nichts zu wünschen übrig.

Im Vorstehenden glaube ich eine relativ einfache und sichere Methode zur Molekulargewichtsbestimmung bis zu ca. 2000° angegeben zu haben; die weitere Aufgabe wird es sein, die Methode zu verfeinern und auf möglichst zahlreiche Fälle anzuwenden. Gleichzeitig dürfte es möglich werden, Dissociationsspannungen, Siedepunkte und chemische Gleichgewichte bis zu so hohen Temperaturen messend zu verfolgen. — Bei Ausführung dieser Arbeit hat mich mein Privatassistent, Herr Dr. Riesenfeld, mit größtem Eifer und sachkundigem Interesse auf das wirksamste unterstützt.

Göttingen, Physik. chem. Inst. März 1903.

Beiträge zu der Lehre von der Luftelectricität.

Von

Eduard Riecke.

IV. Ueber Ionenadsorption an der Oberfläche der Erde.

Vorgelegt in der Sitzung d. K. Ges. d. Wiss. vom 7. März 1903.

Wie bei dem Erdmagnetismus, so kann man auch bei der Luftelectricität zwischen einem beharrlichen Theile der Erscheinung und zwischen einem veränderlichen unterscheiden. Nur überwiegen auf dem Gebiete der Luftelectricität die wechselnden Vorgänge so, daß der bleibende Kern nur schwer zu erkennen ist. Wir nehmen bei den folgenden Betrachtungen an, daß den luftelectrischen Erscheinungen eine zeitlich konstante negative Ladung der Erdoberfläche zu Grunde liege; ihr entspreche eine bestimmte, ebenso unveränderliche Vertheilung von positiven und von negativen Ionen in der Luft. Es liegt dann die wohl zuerst von Elster und Geitel aufgeworfene Frage nahe, ob zwischen der negativen Ladung der Erdoberfläche und der Vertheilung der positiven und negativen Ionen in der Atmosphäre nicht ein bestimmter Zusammenhang bestehe. In der That wird ein solcher wahrscheinlich gemacht durch die sogenannte Adsorption der Ionen[1]). Wenn wir irgend einen Körper mit einem ionisierten Gase in Berührung bringen, so werden die Ionen in Folge ihrer molekularen Bewegung mit seiner Oberfläche zusammenstoßen. Der Ionengehalt der Luft wird dabei verringert, sei es nun, daß die Ionen selbst an der Oberfläche des Körpers haften bleiben, oder daß sie nur ihre elektrische Ladung an dieselbe abgeben. Das Gesetz dieser Ionenadsorption kann hypothetisch in folgender Weise formuliert werden. Die Zahl der Ionen, die sich in einer Sekunde auf einem qcm der Oberfläche niederschlagen, ist proportional

1) Stark, Die Electricität in Gasen S. 373.

ihrer molekularen Geschwindigkeit und proportional ihrer Dichte. Wir können hiernach die Zahlen von positiven und von negativen Ionen, die in 1 sec auf einem qcm niedergeschlagen werden durch die Ausdrücke darstellen:

$$x u_p \overset{+}{n}, \quad y u_n \overset{-}{n}.$$

Hier sind x und y konstante Coëfficienten, die wir als die Coëfficienten der Adsorption bezeichnen wollen; u_p und u_n sind die molekularen Geschwindigkeiten, $\overset{+}{n}$ und $\overset{-}{n}$ die Ionendichten. Man kann die vorstehenden Ansätze auf mancherlei andere Formen bringen, wenn man an Stelle von u_p und u_n Größen einführt, die mit ihnen proportional sind, z. B. die absoluten Beweglichkeiten, die Diffusionskoëfficienten. Wir werden diese Möglichkeiten nicht verfolgen, sondern bei den ursprünglichen Ansätzen bleiben.

Wenn die negative Ladung der Erdoberfläche auf Ionenadsorption beruhen soll, so muß die Adsorption der negativen Ionen größer sein als die der positiven. Sobald aber eine negative Ladung sich gebildet hat, tritt zu der Wirkung der Adsorption noch die der electrischen Verschiebung hinzu. Die gegen die Erde gerichtete electrostatische Kraft habe unmittelbar an der Oberfläche den Werth $\mathfrak{E}$. Sie ertheilt den positiven Ionen die Geschwindigkeit $cU\mathfrak{E}$, den negativen die Geschwindigkeit $cV\mathfrak{E}$. Hier bedeutet c die Lichtgeschwindigkeit, U und V sind die absoluten Beweglichkeiten der Ionen. Die Produkte xu_p und yu_n kann man als Geschwindigkeiten betrachten, die aus der Adsorption resultieren. Bei den positiven Ionen summieren sich aber die Wirkungen von Adsorption und von electrischer Verschiebung, bei den negativen ist diese letztere Wirkung der ersteren entgegengerichtet. Somit ergeben sich für die Mengen der positiven und der negativen Ionen, die in 1 sec auf einem qcm der Erdoberfläche abgeschieden werden, die Ausdrücke:

$$x u_p \overset{+}{n} + cU\mathfrak{E}.\overset{+}{n} \quad \text{und} \quad y u_n \overset{-}{n} - cV\mathfrak{E}.\overset{-}{n}.$$

Soll die Ladung der Erde keine Aenderung erleiden, so müssen diese Ausdrücke einander gleich sein, und wir erhalten:

$$c(U\overset{+}{n} + V\overset{-}{n})\mathfrak{E} = y u_n \overset{-}{n} - x u_p \overset{+}{n}.$$

An Stelle der molekularen Geschwindigkeiten u_p und u_n können wir mit Hülfe der in dem dritten Beitrage angegebenen Formeln die absoluten Beweglichkeiten U und V einführen. Setzen wir auf Grund des Avogadroschen Gesetzes:

$$\mu_p R_p = \mu_n R_n = 83 \times 10^6 = P,$$

so wird:

$$u_p = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{c}{\varepsilon} \cdot PT \cdot \frac{U}{l_p},$$

$$u_n = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{c}{\varepsilon} \cdot PT \cdot \frac{V}{l_n}.$$

Hier bezeichnen l_p und l_n die molekularen Weglängen der positiven und der negativen Ionen.

Substituieren wir diese Werthe in der vorhergehenden Gleichung so ergiebt sich:

$$\text{I.} \qquad c(\overset{+}{U}n + \overset{-}{V}n)\mathfrak{E} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{c}{\varepsilon} \cdot PT \cdot \left(\frac{y\overset{-}{V}n}{l_n} - \frac{x\overset{+}{U}n}{l_p}\right).$$

Wir nehmen weiter an, daß zwischen den Produkten $\overset{+}{U}n$, $\overset{-}{V}n$ und den Zerstreuungskoëfficienten $\overset{+}{a}$ und $\overset{-}{a}$ die im zweiten Beitrage abgeleitete Beziehung bestehe:

$$\overset{+}{a} : \overset{-}{a} = \overset{-}{V}n : \overset{+}{U}n.$$

Dann kann man die Gleichung I auch auf die folgende Form bringen:

$$(\overset{-}{a} + \overset{+}{a})\mathfrak{E} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{PT}{\varepsilon}\left(\frac{y}{l_n}\overset{+}{a} - \frac{x}{l_p}\overset{-}{a}\right)$$

oder

$$\text{II.} \qquad \mathfrak{E} = \tfrac{2}{3} \cdot \frac{PT}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{y}{l_n} - \frac{x}{l_p}\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}}{\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}} + 1}.$$

Aus der letzten Gleichung lassen sich zwei allgemeine Folgerungen ziehen:

1. Es muß jedenfalls

$$y > x \cdot \frac{l_n}{l_p} \cdot \frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}},$$

der Adsorptionskoëfficient der negativen Ionen größer als der der positiven sein.

2. Die elektrische Kraft und die Dichte der negativen Ladung der Erdoberfläche müssen um so kleiner sein, je mehr die Zerstreuung negativer Ladungen über die positiver überwiegt.

Die Sätze folgen aus der Annahme, daß die negative Ladung der Erdoberfläche eine Folge der Ionenadsorption sei. Man sieht aber leicht, daß noch eine zweite Annahme hinzutreten muß. Die Ionenadsorption bedingt eine fortwährende Abnahme der Ionendichte;

soll der betrachtete Zustand ein wirklich stationärer sein, so muß dieser Verlust immer wieder ausgeglichen werden, sei es durch Neubildung von Ionen, sei es durch Diffusion oder durch strömende Bewegungen, welche immer neue Luftmengen von normalem Ionengehalt der Erdoberfläche zuführen.

Es ist von Interesse, die Gleichungen I und II, so weit möglich in numerischer Form zu schreiben.

Bei Gleichung I möge für $\mathfrak{E}$ der aus den Beobachtungen von Elster und Geitel folgende Werth $300\,\mathfrak{E} = 2{,}21$ benutzt werden. Für U und V setzen wir die für feuchte Luft geltenden Werthe $U = 1{,}37$, $V = 1{,}51$. Dann ergiebt sich:

$$\text{I}'.\quad 2{,}21 \times (1{,}37\overset{+}{n} + 1{,}51\overset{-}{n}) = 650 \times 10^{20}\left(1{,}51\frac{y}{l_n}\overset{-}{n} - 1{,}37\frac{x}{l_p}\overset{+}{n}\right).$$

Die Zahl der positiven Ionen, die blos in Folge der electrischen Anziehung in 1 sec auf einem qcm des Erdbodens niedergeschlagen werden, beträgt

$$2{,}21 \times 1{,}37 \times \overset{+}{n} = 3{,}02 \times \overset{+}{n};$$

die Menge von positiver Electricität, die dadurch in einer Sekunde einem qcm der Erdoberfläche zugeführt wird, $14{,}2 \times \overset{+}{n} \times 10^{-10}$ elektrische Einheiten. Dabei kann man für die Dichte der konstanten negativen Ladung der Erdoberfläche nach den Beobachtungen von Elster und Geitel den Werth von 59×10^{-5} electrostatischen Einheiten annehmen.

Bei der numerischen Fassung von Gleichung II benutzen wir den Werth von $\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}}$, der sich aus den Beobachtungen von Dr. Cuomo auf Capri ergeben hat,

$$\frac{\overset{-}{a}}{\overset{+}{a}} = 1{,}01.$$

Wir erhalten dann:

$$\text{II}'.\qquad \mathfrak{E} = 1{,}08 \times 10^{20}\left(\frac{y}{l_n} - 1{,}01\frac{x}{l_p}\right).$$

Daraus folgt:

$$y = 1{,}01\frac{l_n}{l_p}x + 0{,}93 \times 10^{-20} \times \mathfrak{E} l_n,$$

also da $l_n > l_p$, auch y jedenfalls größer als x.

Eine Prüfung der abgeleiteten Formeln ist nicht möglich, da es an zusammenhängenden Reihen von Messungen fehlt.

Fragen der Krystallphysik. I.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 21. Februar 1903.

Ueber die rotatorischen Constanten der Wärmeleitung von Apatit und Dolomit.

Mit der experimentellen Aufsuchung der rotatorischen Erscheinungen der Wärmeleitung, die durch Herrn Stokes[1]) theoretisch deducirt worden sind, hat sich Herr Soret[2]) beschäftigt; aber die von ihm benutzten Methoden sind nicht eben sehr empfindlich, auch theoretisch nicht ganz unbedenklich, und so erschien das mit ihnen gewonnene absolut negative Resultat im Wesentlichen nur als ein vorläufiges. Eine leistungsfähigere und theoretisch unanfechtbare Methode habe ich[3]) vor einigen Jahren angegeben; ihre Anwendung ist durch den Mangel an brauchbarem Material bisher verzögert worden.

Der Gedanke der Methode ist kurz der. Aus einem thermisch einaxigen Krystall, der nach seiner Symmetrie rotatorische Qualitäten besitzen kann, wird eine Platte normal zur Axe dieser Rotation, d. h. zur thermischen Hauptaxe hergestellt und in zwei Hälften zerlegt, die nach Umklappung der einen wieder zusammen gekittet werden. Diese Zwillingsplatte wird dann durch Schnitte parallel und normal zu der Kittfläche derartig begrenzt, daß eine rechteckige Platte entsteht, die durch die Kittfläche halbirt wird. Bringt man das ursprünglich gleichförmig temperirte Prä-

1) G. G. Stokes, Cambr. and Dublin Math. Journ. **6**, 215, 1851.

2) Ch. Soret, Arch. de Genève, **29**, No. 4, 1893, **32**, No. 12, 1894.

3) W. Voigt, Wied. Ann. **60**, 350, 1897.

parat mit einer der seitlich begrenzenden Flächen, die normal zur Kittfläche stehen, in Berührung mit einem höher und gleichförmig temperirten Körper, so muß nach Symmetrie die Wärmeströmung in der Mitte des Präparates parallel zu der Kittfläche verlaufen.

Legen wir die X- und Y-Coordinatenaxen in die Plattenebene parallel und senkrecht zur Kittfläche, so lauten unter den gemachten Voraussetzungen über die Natur des Krystalles die Wärmeleitungsgleichungen für die eine Hälfte des Präparates

$$-u_1 = \lambda \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} - \lambda' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y}, \quad -v_1 = \lambda \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x},$$

für die andere

$$-u_2 = \lambda \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x} + \lambda' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y}, \quad -v_2 = \lambda \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} - \lambda' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x},$$

wobei ϑ die Temperatur, u und v die Strömungscomponenten, λ die thermische Leitfähigkeit normal zur Hauptaxe, λ' die rotatorische Constante bezeichnet.

Da nun unter den vorausgesetzten Umständen in der Mitte des Präparates eine Strömungscomponente parallel Y nicht zu Stande kommen kann, so muß dort gelten

$$0 = \lambda \frac{\partial \vartheta_1}{\partial y} + \lambda' \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x}, \quad 0 = \lambda \frac{\partial \vartheta_2}{\partial y} - \lambda' \frac{\partial \vartheta_2}{\partial x},$$

d. h., die Isothermen in der Plattenebene müssen beim Ueberschreiten der Grenzlinie einen Knick erleiden um einen (jedenfalls kleinen) Winkel

$$\alpha = \frac{2\lambda'}{\lambda}.$$

Diese Beziehung gilt für den stationären, wie für den veränderlichen Zustand und ist von der äußeren Leitfähigkeit vollständig unabhängig.

Bei den Beobachtungen wurden die Isothermen durch Auftragen einer dünnen gleichmäßigen Schicht eines Gemisches von Elaidin-Säure und Wachs sichtbar gemacht, in der sich die Schmelzgrenze überaus scharf markirt. Ueber die Art der Erzeugung der Wärmeströmung habe ich früher[1]) gesprochen.

Giebt man dem Heizkörper einigermaßen hohe Temperatur, sodaß ein starkes Temperaturgefälle in der Krystallplatte entsteht, so sind die Isothermen in jeder Plattenhälfte in sehr großer Annäherung gerade Linien.

1) W. Voigt, l. c. S. 364.

Der Beobachtung unterworfen wurden zwei Apatite aus Canada, der eine roth, der andere grün, ein wasserheller Apatit aus Tyrol und ein ebensolcher Dolomit aus Traversella. Die Präparate waren von Dr. W. Steeg und Reuter in Kirdorf-Homburg angefertigt. Bei keinem von ihnen ließen die Isothermen einen Knick an der Kittstelle erkennen, und die Beobachtung war ziemlich scharf, da die Isothermen meist über die ganze Doppelplatte hinweg streng geradlinig erschienen.

Um über die obere Grenze, die sich hieraus für das Verhältniß λ'/λ ergiebt, ein Urtheil zu gewinnen, bestimmte ich, wie genau sich nach Augenmaß zwei Stücke von Geraden, die von einem Punkt ausgehen, in dieselbe Richtung legen lassen, d. h. also, wie groß die Unsicherheit der Beurtheilung eines gestreckten Winkels ist. Um die Verhältnisse denjenigen bei der Isothermenbeobachtung möglichst anzuähneln wurde auf zwei kleinen Stücken Carton von dieser Form je eine feine Linie gezogen, die den stumpfen Winkel oben ungefähr halbirte; das eine Stück wurde auf den drehbaren Kreis eines Spectrometers, das andere an dessen Gestell befestigt, derart, daß die Scheitel der beiden stumpfen Winkel in der Drehungsaxe zusammenstießen, und es wurde durch Drehung von der einen oder von der anderen Seite her die Position aufgesucht, in der die beiden Striche in eine Gerade zu fallen schienen. Die Ablesung ergab Abweichungen vom Mittel, die niemals 4′ erreichten. Es ist daher wahrscheinlich, daß der Knickungswinkel der Isothermen gleichfalls 4′ nicht merklich übertroffen hat.

Hieraus würde folgen, daß bei den untersuchten Apatiten und dem Dolomit das Verhältniß der rotatorischen Constanten λ' zur thermischen Leitfähigkeit λ in der Richtung normal zur Hauptaxe den Werth 1/2000 nicht übertrifft, was practisch der Null gleich zu achten ist.

Entsinnt man sich, wie bedeutend die rotatorische Qualität des Dolomit sich bei dessen elastischem Verhalten geltend macht[1]), so wird man diesen kleinen Werth überraschend finden.

1) W. Voigt, Wied. Ann. **40**, 642, 1890.

Göttingen im Februar 1903.

Ueber die „Elektromagnetische Masse" der Elektronen.

Von

W. Kaufmann.

Vorgelegt in der Sitzung vom 7. März 1903.

Einleitung:

In einigen früheren Mitteilungen[1]) habe ich gezeigt, daß sich aus der magnetischen und elektrischen Ablenkung der Becquerelstrahlen die Veränderlichkeit der „Masse" der Elektronen mit wachsender Geschwindigkeit nachweisen lasse; durch die nach Abschluß meiner ersten Mitteilung erschienenen theoretischen Untersuchungen von Hrn. Abraham[2]) wurde die Möglichkeit gegeben, die Frage nach der Art der Zusammensetzung dieser „Masse" aus „mechanischer" und „elektromagnetischer" Masse exakt zu lösen, sobald nur genügend genaue Messungen nach der schon früher beschriebenen Methode vorlagen. Dies der Grund, daß ich die Versuche nochmals aufnahm, mit dem Ziel die Genauigkeit der Messungen soweit wie irgend möglich zu treiben; Haupterforderniß hierbei war: 1) Möglichst feine Kurven, 2) möglichst große Ablenkung zu erhalten.

Das erste Postulat setzt eine sehr kleine Strahlungsquelle voraus, d. h. ein sehr kleines Körnchen Radiumsalz. Soll jedoch die Expositionsdauer hierdurch nicht ungebührlich verlängert werden so ist allerstärkste Aktivität erforderlich. Durch die große Liebenswürdigkeit des Herrn Curie, dem ich auch an dieser

---

1) Gött. Nachr. Hft. 2, 1901. ibid. Hft. 5, 1902, Physik. Ztschr. **4**, 55, 1902. Im folgenden mit L. c. 1; L. c. 2; L. c. 3 bezeichnet.

2) Gött. Nachr. Hft. 1, 1902; Ann. d. Phys. (4) **10**, 105, 1903.

Stelle meinen besten Dank ausspreche, gelangte ich in den Besitz von etwa 1 mg reinen Radiumchlorids, über dessen Herstellung Frau Curie[1]) kürzlich berichtet hat. Später wurde, nachdem die kleine Quantität des Curieschen Präparates durch verschiedene kleine Unfälle verloren gegangen war, ein gleich hervorragendes Präparat benützt, das unter der Leitung des Hrn. F. Giesel von der „Braunschweiger Chininfabrik" hergestellte und in den Handel gebrachte „reine Radiumbromid". Mit diesen Präparaten gelang es unter Benutzung eines Körnchens von nur 0,2 mm Durchmesser und eines etwa gleich großen Diaphragmas bei nur 20-stündiger Exposition für jeden Kurvenast Kurven von großer Feinheit und doch genügender Deutlichkeit zu erhalten (s. Figur).

Die zweite oben erwähnte Forderung einer möglichst großen Ablenkung war zwar bezüglich der magnetischen Ablenkung ohne Schwierigkeit zu erfüllen, dagegen erforderte die Erzeugung und völlige Konstanthaltung eines genügend starken elektrischen Feldes andere Hülfsmittel, als mir früher zur Verfügung standen; durch die gütige Gewährung einer beträchtlichen Unterstützung seitens des Kgl. Kultusministeriums wurde es mir ermöglicht, eine Hochspannungsbatterie von 1600 Akkumulatoren anzuschaffen, so daß mir durch Hinzunahme der bereits im Institut vorhandenen Batterie von 1008 Zellen eine konstante Spannung von im Ganzen etwa 5200 Volt zur Verfügung stand. Ich spreche dem Hrn. Ministerialdirektor Althoff, dessen gütiger Vermittlung ich die Gewährung der erwähnten Mittel verdanke, auch hier meinen ergebensten Dank aus.

Mein Dank gebührt ferner der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, die mir die Mittel zur Anschaffung einer Oelluftpumpe, sowie einiger Meßinstrumente gewährte. Im Gegensatz zu den vielen Störungen beim Gebrauch automatischer Quecksilberluftpumpen arbeitet die Oelpumpe mit fast absoluter Sicherheit und großer Schnelligkeit[2]).

1) Die Versuchsanordnung ist bis auf die im Obigen angedeuteten Verbesserungen im wesentlichen dieselbe wie früher (L. c. 1). Der selbsttätige Umschalter zur Erhöhung der elektrischen Feldintensität fiel nunmehr natürlich fort; der das Radium

1) C. R. 1902.

2) Eine Beschreibung der von A. Pfeiffer in Wetzlar bezogenen Pumpe befindet sich in der Zeitschr. f. Unterr. 14, 285, 1901. Ich bemerke, daß ich mit der Pumpe eine Röntgenröhre auf etwa 3 cm Funkenstrecke auspumpen konnte. Allerdings muß zur Entfernung der letzten Luftreste der Gang der Pumpe auf das äußerste verlangsamt werden (6 bis 8 Umdr./Min.).

und die photographische Platte enthaltende kleine Messingapparat war konstruktiv etwas verändert, um das Auswechseln der Platten zu erleichtern. Die das elektrische Feld hervorrufenden beiden Kondensatorplatten im Innern des Apparates waren so nahe aneinander gebracht, als es mit Rücksicht auf die freie Bahn der abgelenkten Strahlen möglich war; d. h. auf etwa 1 mm Abstand.

Das Radiumkörnchen befand sich am Boden des Apparates in einer kleinen Vertiefung mit etwas Klebwachs befestigt und mit einer dünnen Kollodiumhaut überzogen. Letzteres war nötig, weil das Salz im Vakuum verwittert und dann auseinander fällt, sodaß man statt der anfänglichen scharfen Kurven bald breite und verwaschene erhält, wenn nicht durch die Kollodiumhaut das Salz zusammengehalten wird. Uebrigens war die Verwitterung bei dem Curieschen Radiumchlorid viel stärker als bei dem Gieselschen Bromid. Endlich sei noch erwähnt, daß die Platte gegen etwaige leuchtende Entladungen zwischen den Kondensatorplatten durch eine Aluminiumfolie geschützt war. Nach jedem Versuch wurde der Apparat völlig auseinander genommen und einige Tage offen liegen gelassen um die induzierte Aktivität zu beseitigen, die sonst die Platten stark verschleiert haben würde.

Zur Erregung des Elektromagneten diente eine Akkumulatorenbatterie von 30 Volt und hinreichender Kapazität, um während der ganzen Expositionsdauer einen völlig konstanten Strom liefern zu können. Da diese Batterie natürlich auch zu anderen Zwecken im Institut viel gebraucht wurde, so konnte ich meine Versuche nur während der Ferien oder von Sonnabend bis Montag ausführen; dies mag zur Entschuldigung dienen, daß die Zahl der ausgeführten Versuche nicht groß ist. Im Winter machte auch die Konstanthaltung der Zimmertemperatur einige Schwierigkeit; die Widerstandsänderung der Elektromagnetwicklung bei veränderlicher Temperatur bewirkte kleine Stromschwankungen von 1 bis 2%.

Das Feld des Elektromagneten wurde in derselben Weise ausgewertet wie früher (L. c. 1) (Messungsprotokoll s. w. u.).

Zur Ausmessung der Platten diente ein Doppelmikrometer mit zwei rechtwinklig zu einander beweglichen Schrauben, mittels deren der Platte eine Bewegung längs der Richtung der magnetischen oder der elektrischen Ablenkung gegeben werden konnte. Das Mikrometer war auf einer dicken Steinplatte unverrückbar befestigt; und durch ein auf derselben Platte montirtes schwach (ca. 3mal) vergrößerndes Mikroskop wurder die Kurven beobachtet und ausgemessen.

2) Fehlerquellen und Genauigkeitsgrenze:

Wie bereits früher (L. c. 2 und 3) auseinandergesetzt, geschah die Berechnung der Resultate derart, dass die Dimensionen des Apparates direkt nur in Korrektionsgliedern vorkommen, sodaß kleine Fehler in ihrer Bestimmung das Resultat nicht wesentlich beeinflussen. Die ganze Berechnung basirt allein auf der relativen Ausmessung der erhaltenen Kurven; nur bei der Berechnung des Wertes von ε/μ_0 für Kathodenstrahlen kommen noch der Absolutwert der magnetischen Feldintensität, sowie eine von den Apparatdimensionen abhängige Größe als Faktoren hinzu. Es genügt also zunächst die Diskussion der bei der Ausmessung der Platten in Betracht kommenden Fehlerquellen.

Die Ausmessung geschah derart, daß die in Richtung der magnetischen Ablenkung bewegende Schraube (z-Schraube) von 0,5 mm Ganghöhe successive um je 1 oder $^1/_2$ Umdrehung weiter bewegt wurde, und dann mit der dazu senkrecht beweglichen y-Schraube, von 0,254 mm Ganghöhe, der Abstand der beiden Kurvenäste, d. h. die doppelte elektrische Ablenkung gemessen wurde. Bei 10maliger Einstellung auf jeden Punkt betrugen die maximalen Abweichungen vom Mittel selten mehr als 5 bis 10 Trommelteile, d. h. 0,013 bis 0,025 mm bei einer Breite der Kurven von etwa 0,2 mm und einem Abstand beider Aeste von 0,8 mm für die am schwächsten, bis etwa 4 mm für die am stärksten ablenkbaren Strahlen.

Man sollte demnach erwarten, daß in den mittleren Teilen der Kurven die Abweichung der Mittelwerte vom theoretischen Verlauf keinesfalls größer als etwa 0,5 % sein dürften, wenn anders man die Resultate als Bestätigung der Theorie ansehn will.

In Wirklichkeit sind die Abweichungen bedeutend größer als sie auf Grund der zufälligen Einstellungsfehler sein dürften. Der Grund hierfür ist in dem Wesen der photographischen Methode zu suchen: Die Einstellung des Fadenkreuzes auf die Mitte einer Kurve mit nicht ganz scharfen Rändern ist ein Akt subjektiven Urteils, bei dem jede noch so kleine Unregelmäßigkeit der Platte von großem Einfluß ist. Ein kleiner heller oder dunkler Fleck auf der Platte von Fabrikations- oder Entwicklungsfehlern herrührend, beeinflußt das Urteil in ganz bestimmter Weise, sodaß die hierdurch bedingten Fehler durch eine Vermehrung der Einzeleinstellungen durchaus nicht beseitigt werden können. Die Zufälligkeit dieser bis zu etwa 4% betragenden Abweichungen ergiebt sich jedoch unzweifelhaft aus ihrer ganz unregelmäßigen und bei den einzelnen Platten durchaus verschiedenen Verteilung. Man

kann nach einiger Uebung geradezu jeder Platte vorher ansehn, ob größere Abweichungen der eben geschilderten Art bei ihrer Auswertung zu erwarten sind oder nicht. Je weniger sichtbare Flecke und Intensitätsunterschiede eine Platte aufweist, desto geringer sind die Abweichungen. Bloß für die am schwächsten ablenkbaren Strahlen gewinnen die Abweichungen anscheidend systematischen Charakter:

Berechnet man nämlich die Konstanten der Kurven aus den gemessenen Punkten unter Auslassung der beiden innersten, so ergiebt sich für den innersten Punkt fast stets ein Geschwindigkeitswert, der ein wenig, etwa 4%, über Lichtgeschwindigkeit liegt, was nach der Theorie unmöglich sein sollte (s. z. B. Tab. II IV und V). Ich glaube, daß der Grund hierfür in einer systematischen Urteilstäuschung liegt, welche ihren Grund in der schon äußerst schwachen Intensität der innersten Kurvenenden hat; die Einstellung auf diese Punkte ist infolgedessen bereits ziemlich schwierig und man stellt unwillkürlich in die Verlängerung des stärker abgelenkten anschließenden Kurvenastes ein, d. h. zu weit nach innen, wodurch sich ein Fehler der angedeuteten Art ergiebt.

Aus diesem Grunde sind bei der Berechnung der Konstanten stets die beiden innersten Punkte nicht mitbenutzt, umsomehr als die äußerst rapide Zunahme der „Masse" bei großer Annäherung an die Lichtgeschwindigkeit bereits bei Fehlern von nur wenigen % in den Ablenkungen, sehr große Fehler in den Werten für die Masse hervorruft (s. d. Bemerkungen zu Tab. II).

3) Art der Berechnung:

Die direkt gemessenen magnetischen Ablenkungen sind den Ablenkbarkeiten nicht völlig proportional, vielmehr kommt für die magnetische Ablenkbarkeit der Krümmungsradius der Bahnprojektion auf eine senkrecht zur magnetischen Feldrichtung gelegene Ebene in Betracht und die elektrischen Ablenkungen müssen mit Rücksicht auf die durch gleichzeitige magnetische Ablenkung veränderte Weglänge korrigirt werden.

Schreibt man die Gl. 6) (L. c. 1) in folgender Form (die Bedeutung der Zeichen ist dieselbe wie früher):

$$1) \qquad \varrho = \frac{x_1^2 + x_1 x_2}{2 z_0} + \frac{z_0}{2}\left(1 + \frac{x_1^2}{2(z_0^2 + x_2^2 + x_1 x_2)}\right)$$

und setzt

$$2) \qquad z' = \frac{x_2^2 + x_1 x_2}{2\varrho},$$

so stellt z' eine von z nur wenig verschiedene Größe dar, die im

folgenden als „reduzirte magnetische Ablenkung“ bezeichnet werden soll. In ganz entsprechender Weise erhält man eine „reduzirte elektrische Ablenkung“ im Anschluß an die Gl. (8) (L. c. 1). Betrachte man nämlich mit für die Korrektionsbetrachtung genügender Genauigkeit das elektrische Feld als homogen im ganzen Zwischenraum der beiden Kondensatorplatten, als verschwindend klein außerhalb desselben, so ist der Grenzwert von $s_1 s_2$ für unendlich kleine Ablenkungen gleich $hx_2/2$ und die reduzirte elektrische Ablenkung ist zu setzen:

3) $$y' = y_0 h x_2/2 s_1 s_2.$$

Dann erhält man für die Bahngeschwindigkeit nach Gl. (9) unter Vernachlässigung der Korrektion nach Gl. (11) (L. c. 1):

4) $$q = \frac{\varepsilon' h x_2 F}{y'(x_2^2 + x_1 x_2) H}.$$

(Ich bezeichne die Geschwindigkeit mit q, statt wie früher mit v, um Uebereinstimmung mit der Bezeichnungsweise der Abrahamschen Arbeit zu erzielen.)

Endlich erhält man nach Gl. (10) (L. c. 1):

5) $$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon'^2 2 x_2 h F}{y'(x_2^2 + x_1 x_2)^2 H^2}.$$

Eine Ausmessung des Apparates ergab:

$$x_2 = 2{,}05, \qquad x_1 = 2{,}024 \qquad h = 1{,}70.$$

Daraus ergiebt sich:

6) $$\varepsilon' = 4{,}176/\varrho,$$

7) $$y' = y_0 \cdot 1{,}743/s_1 s_2$$

und

8) $$q = 0{,}4175 \cdot \varepsilon' F/y' H.$$

9) $$\frac{\varepsilon}{\mu} = 0{,}100 \cdot \varepsilon'^2 F/y' H^2.$$

Es wäre nun wenig rationell, wie schon (L. c. 2) auseinandergesetzt, wenn man Gl. (8) und (9) direkt zur Prüfung der Theorie benutzen wollte. Kleine Abweichungen in den Absolutwerten von F und H, die Unmöglichkeit den wirklichen Verlauf des elektrischen Feldes genau zu bestimmen, würden namentlich in unmittelbarer Nähe der Lichtgeschwindigkeit ungeheure Abweichungen bedingen.

Viel rationeller ist es, zunächst die Gleichung der photographirten Kurve mit der von der Theorie verlangten zu vergleichen, indem man die Konstanten der Kurve aus den Messungen selbst empirisch ermittelt. Ergiebt sich dann Uebereinstimmung der beobachteten mit der theoretischen Kurvenform, so kann man nachträglich die aus der Kurve ermittelten mit den aus den Apparatdimensionen sich ergebenden Konstanten vergleichen.

Es sei c die Lichtgeschwindigkeit, $\beta = q\,c$, und nach M. Abraham (l. c.):

10) $$\frac{\varepsilon}{\mu} = \frac{\varepsilon}{\mu_0} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\psi(\beta)}.$$

wobei $\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ der Wert von $\frac{\varepsilon}{\mu}$ für sehr langsame Geschwingkeiten, und

$$\psi(\beta) = \frac{1}{\beta^2}\left[\frac{1-\beta^2}{2\beta} \lg \frac{1+\beta}{1-\beta} - 1\right].$$

Dann erhält man aus (8) und (9):

11) $$\beta = K_1 x' y'.$$

12) $$\psi(\beta) = K_2 y'/x'^2$$

und als Gleichung der reduzirten Kurve

13) $$\frac{x'^2}{y} = \frac{K_2}{\psi(K_1 x' y')}.$$

wobei K_1 und K_2 zwei Konstanten, die aus den beobachteten Kurvenpunkten nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen sind.

Der Wert der Konstanten nach den Apparatdimensionen ist:

14) $$K_1 = 0{,}4175\, F\, Hc.$$

15) $$K_2 = 5{,}57\, H/K_1 c.$$

Bequemer und genauere Resultate liefernd, als die Vergleichung der aus (13) ermittelten Werte der Konstanten mit den aus (14) und (15) berechneten ist die Berechnung von

16) $$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = K_1 K_2 3 \cdot 3 \cdot 10^{10}/H \cdot 4 \cdot 4.176$$

oder

$$\frac{\varepsilon}{\mu_0} = K_1 K_2 \cdot 539 \cdot 10^7/H.$$

Diese Gleichung enthält von absolut zu messenden Größen nur noch solche, die sich auf den Verlauf der magnetischen Ablenkung und die Stärke des Magnetfeldes H beziehen, das fast völlig homogen ist (s. w. u.). Daß übrigens die Absolutwerte der Konstanten von den aus den Dimensionen des Apparates und der elektrischen Feldintensität bestimmten nur um wenige % abweichen, habe ich bereits früher (L. c. 2) nachgewiesen.

Der aus Gl. (16) sich ergebende Wert für ε/μ_0 kann direkt mit dem aus Kathodenstrahlmessungen gefundenen verglichen werden.

Bei der Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Gl. (13) ergiebt sich eine eigentümliche Schwierigkeit: Für eine transcendente Gleichung, wie Gl. (13) werden die Konstanten meist so bestimmt, daß man zuerst Annäherungswerte ermittelt, und dann für die noch übrig bleibenden Korrektionen durch Entwicklung nach dem Taylorschen Satze und Abbrechen nach dem ersten Gliede lineare Gleichungen herstellt (s. Kohlrausch, Lb. d. pr. Phys. p. 15).

Wenn man dieses Verfahren nun auf die hier vorliegenden Beobachtungen anwenden will, so zeigt sich, wegen des äußerst rapiden Ansteigens von ψ (β) bei den am wenigsten abgelenkten Punkten, für die β fast gleich 1 ist, daß das Abbrechen der Reihe nach dem ersten Gliede zu durchaus falschen Resultaten führt, es sei denn, daß die vorher durch Ausprobiren ermittelten Annäherungswerte bereits ganz außerordentlich genau sind, so genau, daß die noch zu ermittelnde Korrektion gar nicht mehr in Betracht kommt.

Ich schlug deshalb folgendes Verfahren ein: Für eine Reihe wenig von einander verschiedener, dem richtigen bereits sehr nahe kommender Werte von K_1 wurde $\psi(K_1 z'/y')$ für sämmtliche Kurvenpunkte berechnet und die gefundenen Werte mit z'^2/y' multiplizirt. Die Produkte sollen nach Gl. (13) gleich K_2 sein.

Aus den so gefundenen Werten wurde das Mittel $\overline{K_2}$ und die Summe $\sum(K_2-\overline{K_2})^2$ gebildet. Von den verschiedenen Wertepaaren von K_1 und K_2 ist dann dasjenige das wahrscheinlichste, für das die genannte Summe ein Minimum ist.

4) Resultate:

Ich teile im folgenden einige Messungsresultate mit; dabe sei in Betreff der Berechnung von $\psi(\beta)$ bemerkt, daß die Berechnung für eine Reihe passend gewählter Werte von β ein für allemal durchgeführt und dann für die dazwischen liegenden Werte von β durch graphische Interpolation $\psi(\beta)$ bestimmt wurde. Ebenso wurde $s_1 s_2$ für die in allen Tabellen gleichen

Werte von ε' aus einer vorher berechneten Hülfstabelle entnommen.

a) Platte No 15:

Die oben auseinandergesetzte Methode der Konstantenbestimmung ergab:

Tabelle I.

K_1	K_2	$(K_2-\overline{K_2})^2$
0,274	2,42	0,0155
0,272	2,38	0,0078
0,2705	2,36	0,0051
0,270	2,35	0,0054
0,268	2,32	0,0099.

Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind also:

$$K_1 = 0{,}2705 \qquad K_2 = 2{,}36.$$

Die Bestimmung ist wie man aus Tab. I sieht auf etwa 0,3 % sicher. Die folgende Tabelle zeigt die Berechnung der Kurve mit diesen beiden Konstanten:

Tabelle II.

ε_0	y_0	ε'	y'	β	$\psi(\beta)$	$\psi(\beta)\cdot\varepsilon'^2/y'$	δ
0,15	0,0389	0,1495	0,0388	1,04	—	—	
0,20	0,0550	0,199	0,0548	0,982	3,86	(2,79)	
0,25	0,0720	0,2475	0,0716	0,935	2,75	2,355	− 0,005
0,30	0,0904	0,296	0,0896	0,893	2,38	2,325	− 0,035
0,35	0,1094	0,3435	0,1080	0,860	2,195	2,40	+ 0,04
0,40	0,1312	0,391	0,1290	0,820	2,02	2,39	+ 0,03
0,45	0,1560	0,437	0,1524	0,776	1,885	2,365	+ 0,005
0,50	0,1841	0,4825	0,1788	0,730	1,78	2,325	− 0,035
0,55	0,2107	0,5265	0,2033	0,701	1,725	2,35	− 0,01.
						Mittel: 2,36.	

Die Abweichungen vom Mittel der letzten Zeile der Tabelle betragen im Maximum etwa 1,7 %, wenn man von dem Werte in der zweiten Zeile absieht, der auch bei der Berechnung des Mittels nicht berücksichtigt wurde. Dies Verfahren rechtfertigt sich aus dem bereits mehrfach erwähnten Umstande, daß für die kleinsten Ablenkungen, d. h. für β nahezu gleich 1, eine minimale Abweichung, in der Bestimmung von y' bereits einen sehr großen

Fehler in $\psi(\beta)$ hervorruft. In der Tat würde man für $\psi(\beta) \cdot \varepsilon'^2/y'$ in der zweiten Zeile den Wert 2,36 erhalten, wenn $y = 0{,}557$, d. h. 1,6 % größer als beobachtet wäre. Aehnliches gilt für die erste Zeile, wo eine Vergrößerung von y' auf 0,041, d. h. um den hart an der Fehlergrenze liegenden Betrag von 0,002 cm bereits einen annähernd richtigen Wert für K_2 liefert. (β ergiebt sich dann gleich 0,987).

b) Platte No 19:

Die Konstantenbestimmung ergab:

$$K_1 = 0{,}257 \qquad K_2 = 2{,}561.$$

Tabelle III.

ε_0	y_0	ε'	y'	β	(β)	$(\beta)\varepsilon'^2/y'$	
0,15	0,04055	0,1495	0,04045	0,951	3,00	(1,66)	—
0,20	0,0531	0,199	0,0529	0,967	3,32	(2,49)	—
0,25	0,0682	0,247	0,0678	0,938	2,79	2,525	− 0,036
0,30	0,0842	0,296	0,0834	0,912	2,52	2,645	+ 0,084
0,35	0,1032	0,3435	0,1019	0,865	2,22	2,57	+ 0,009
0,40	9,1240	0,391	0,1219	0,825	2,04	2,56	− 0,001
0,45	0,1460	0,437	0,1429	0,787	1,915	2,565	+ 0,004
0,50	0,1710	0,4825	0,1660	0,747	1,82	2,55	− 0,011
0,55	0,1985	0,5265	0,1916	0,707	1,74	2,515	− 0,046.

c) Platte No 18:

$$K_1 = 0{,}276 \qquad K_2 = 2{,}61.$$

Tabelle IV.

ε_0	y_0	ε'	y'	β	(β)	$(\beta)\varepsilon'^2/y'$	
0,150	0,0398	0,1495	0,0397	1,04	—	—	—
0,175	0,0483	0,1744	0,0482	0,999	—	—	—
0,200	0,0566	0,199	0,0564	0,975	3,56	2,49	—
0,225	0,0637	0,223	0,0634	0,971	3,43	2,96	+ 0,08
0,250	0,0729	0,2475	0,0725	0,944	2,875	2,43	− 0,18
0,275	0,0807	0,272	0,0801	0,937	2,775	2,565	− 0,045
0,300	0,0888	0,296	0,0880	0,929	2,68	2,67	+ 0,06
0,325	0,0976	0,320	0,0965	0,915	2,55	2,71	+ 0,10
0,350	0,1087	0,3435	0,1073	0,883	2,31	2,54	− 0,07
0,375	0,1184	0,367	0,1166	0,868	2,235	2,59	− 0,02
0,400	0,1305	0,391	0,1283	0,842	2,11	2,73	+ 0,12
0,475	0,1620	0,460	0,1579	0,803	1,965	2,64	+ 0,03
0,500	0,1770	0,4825	0,1719	0,775	1,88	2,55	− 0,06
0,525	0,1885	0,505	0,1825	0,765	1,86	2,60	− 0,01.

d) Platte 24:

$$K_1 = 0{,}236 \qquad K_2 = 2{,}707.$$

Tabelle V.

z_0	y_0	z'	y'	β	(β)	$(\beta)z'^2/y'$	
0,150	0,04100	0,1495	0,0340	(1,04)	—	—	
0,20	0,04895	0,199	0,04875	0,965	3,27	2,65	− 0,057
0,25	0,0627	0,2475	0,0623	0,937	2,77	2,72	+ 0,018
0,30	0,0780	0,296	0,0773	0,904	2,45	2,765	+ 0,058
0,35	0,0959	0,3435	0,0947	0,856	2,18	2,72	+ 0,013
0,40	0,1151	0,391	0,1131	0,816	2,01	2,72	+ 0,013
0,45	0,1372	0,437	0,1340	0,769	1,87	2,665	− 0,042.

Weitere Versuche konnten nicht mehr ausgeführt werden, da ich wegen Fortzugs von Göttingen die Arbeit beenden mußte; doch kann ja auch das Versuchsmaterial der früheren Publikation (L. c. 3) zum Vergleich mit herangezogen werden. Das Resultat läßt sich wohl dahin aussprechen, daß die Gestalt der Kurve durch die Abrahamsche Formel mit genügender Genauigkeit dargestellt wird

5) Bestimmung des magnetischen Feldverlaufs:

Bevor zu der Berechnung von ε/μ_0 übergegangen wird, muß noch der Verlauf des magnetischen Feldes besprochen werden.

Bei den bisherigen Betrachtungen war nämlich das Feld als homogen betrachtet worden, während es in Wirklichkeit, wenn auch nur in geringem Maaße inhomogen ist. Man muß also in die Berechnung einen mittleren Feldwert einführen, und zwar nicht den arithmetischen Mittelwert, sondern einen „effektiven" Mittelwert, der dadurch definirt ist, daß er dieselbe Ablenkung hervorruft, wie das wirkliche Feld. Für im Verhältnis zur Strahlenbahn kleine Ablenkungen läßt sich dieser effektive Mittelwert ohne weiteres berechnen, für größere Ablenkungen tritt er in den Korrektionsgliedern zur Berechnung der reduzirten Ablenkungen (s. o.) in von der Ablenkung selbst abhängiger Größe auf. Man kann jedoch unbedenklich den Einfluß der Inhomogenität auf die Reduktion vernachlässigen und den für sehr kleine Ablenkungen berechneten Effektivwert benutzen, solange der Effektivwert sich vom arithmetischen Mittelwert nur wenig unterscheidet; dies ist aber bei den vorliegenden Versuchen der Fall. (S. w. u.).

Die Ausmessung des Feldes geschah mittels der (L. c. 1) angegebenen Methode. Die bewegliche Meßspule hatte einen Durch-

messer von 1 cm und konnte durch Verschiebung des sie umhüllenden Messingrohres in verschiedene Teile des Feldes gebracht werden. Zur absoluten Auswertung der Konstanten der Spule dienten zwei große Kreisströme, die nach Art der Helmholtz-Gaugainschen Bussole angeordnet waren. Sei die Feldstärke in der Mitte gleich 1 gesetzt, so ergab sich im Abstande von x cm nach oben oder unten:

x	H
0	1,00
1	0,99
2	0,925
3	0,805.

Der Apparat war so orientirt, daß die ungefähr 4 cm lange Strahlenbahn etwa von $x = -2$ bis $x = +2$ reichte. Sei $x_0 = x_1 + x_2$ die gesammte Länge der Strahlenbahn, dann ist der effektive Mittelwert des Feldes gegeben durch die Gleichung:

$$17) \qquad H_0 = \frac{2}{x_0^2 - x_1 x_2}\left[\int_0^{x_0}\int_0^{x} H dx\,dx - \frac{x_0}{x_1}\int_0^{x_1}\int_0^{x} H dx\,dx\right].$$

Die Auswertung der Integrale ergiebt, wenn mit H' der Feldwert für $x = 0$ bezeichnet wird:

$$18) \qquad H_0 = 0{,}993\, H'.$$

Der arithmetische Mittelwert dagegen beträgt:

$$19) \qquad \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} H dx = 0{,}982\, H'$$

ist also, wie bereits erwähnt, vom effektiven nur wenig verschieden.

Es ergiebt sich ferner, daß kleine Verschiebungen des ganzen Apparates in der x-Richtung H_0 nur wenig ändern; steht z. B. der Apparat 0,5 cm höher als oben angegeben, so wird $H_0 = 0{,}989\, H'$, steht er 0,5 cm tiefer, so wird $H_0 = 0{,}988\, H'$.

Ersetzt man in Gl. 16) H durch H_0 so kann man unter Benutzung der in den obigen Tabellen angegebenen Werte von K_1 und K_2 ε/μ_0 berechnen.

6) Bestimmung von ε/μ_0:

In folgender Tabelle sind die Werte von ε/μ_0 angegeben zugleich mit dem Quadrat des mittleren Fehlers (aus den Werten der letzten Zeile in Tab. I — V berechnet) und dem Gewicht $p = 10^{-4}/f^2$.

Tabelle VI.

Pl. No.	K_1	K_2	H'	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$	f^2	p
15	0,2705	2,36	200	1,74	0,0001	1,0
19	0,257	2,561	200	1,80	0,00025	0,4
18	0,276	2,610	200	1,97	0,0007	0,14
24	0,236	2,707	199	1,73	0,0003	0,33.

Das Gesammtmittel unter Berücksichtigung der Gewichte beträgt:

$$\varepsilon/\mu_0 = 1{,}77 \cdot 10^7.$$

Für Kathodenstrahlen hat S. Simon[1]) gefunden:

$$\varepsilon/\mu = 1{,}865 \cdot 10^7$$

bei einem mittleren Entladungspotential von 7500 Volt; daraus folgt für unendlich langsame Strahlen:

$$\varepsilon/\mu_0 = 1{,}845 \cdot 10^7.$$

Die Differenz des mittels der Abrahamschen Gleichung aus Becquerelstrahlen extrapolirten und des bei Kathodenstrahlen gefundenen Wertes beträgt etwa 4 %, eine Abweichung, die man wohl den Beobachtungsfehlern zuschreiben darf. Es sei noch bemerkt, daß die Berechnung des Gewichts bloß nach dem mittleren Fehler hier nicht ganz einwandsfrei ist. Der eingangs erwähnte Einfluß der Plattengüte auf die Genauigkeit sollte eigentlich Veranlassung geben, daß denjenigen Platten das höchste Gewicht gegeben wird, die photographisch am besten geraten sind; die Unmöglichkeit, hierbei genügend willkürfrei zu verfahren, hat mich hiervon absehn lassen; es ist jedoch bemerkenswert, daß gerade die Platte 19, die weitaus das klarste und fehlerfreieste Bild zeigt, auch einen Wert für ε/μ_0 liefert, der dem Kathodenstrahlwert bis auf etwa 2,5 % nahekommt. (Die beiliegende Figur ist

1) S. Simon, Wied. Ann. **69**, 589. 1899.

nach Platte 19 kopirt, ohne jedoch an Deutlichkeit der Platte selbst einigermaßen nahe zu kommen).

Wir können das Resultat der Untersuchung wohl dahin zusammenfassen, daß nicht nur die Becquerelstrahlen sondern auch die Kathodenstrahlen aus Elektronen bestehn, **deren Masse rein elektromagnetischer Natur ist.**

Göttingen, März 1903.

Messungen der Electricitätszerstreuung in der freien Atmosphäre auf Capri.

Von

Dr. V. Cuomo.

Vorgelegt von E. Riecke in der Sitzung der Kgl. Ges. d. Wiss. vom 7. März 190

October 1903.

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt
1./X. 1902.													
2./X. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	23.1 = v. 201.7	16.8 = v. 173	2.04 %							
	h 1.21′	h 1.36′	—	23.4 = v. 202.9	16.1 = v. 169 5	2.40 %	20.8	13.6	75 %	SE	12.5	0	3
	h 1.42′	h 1.57′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.020 %							
3./X. 1902	h 1.13′	h 1.28′	+	23.3 = v. 202.5	16.0 = v. 169	2.41 %							
	h 1.34′	h 1.49′	—	23.8 = v. 204.5	15.3 = v. 165.5	2.83 %	21.4	13.6	72 %	W	2	1	4
	h 1.56′	h 2.11′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.022 %							
4./X. 1902	h 1.36′	h 1.51′	+	21.5 = v. 195.3	12.0 = v. 149	3.05 %							
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.8 = v. 200.5	12.5 = v. 151.5	3.73 %	22.0	11.6	59 %	NW	2	0	5
	h 2.27′	h 2.42′	—	21.5 = v. 195.5	21.3 = v. 194.5	0.016 %							
6./X. 1902	1.05′	h 1.20′	+	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	2.41 %							
	h 1.26′	h 1.41′	—	23.2 = v. 202.1	15.7 = v. 167.5	2.48 %	20.6	12.8	71 %	WSW	16	6	3
	h 1.47′	h 2.02′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %							

tum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
/X. 902	h 1.19′	h 1.34′	+	22.8 = v. 200.5	12.1 = v. 149.5	3.91 %								
	h 1.40′	h 1.55′	—	21.5 = v. 195.3	10.4 = v. 139.3	4.46 %	21.2	13.9	75 %	SW	17.4	5	2	
	h 2.01′	h 2.16′	—	21.1 = v. 193.7	20.9 = v. 192.9	0.023 %								
/X. 902	h 1.35′	h 1.50′	+	22.5 = v. 199.3	14.0 = v. 159	3.01 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.4 = v. 198.9	14.1 = v. 159.5	2.94 %	22.5	15.9	78 %	SW	8	4	4	
	h 2.17′	h 2.32′	—	21.1 = v. 193.7	20.9 = v. 192.9	0.023 %								
/X. 902	h 1.38′	h 1.53′	+	23.9 = v. 204.9	15.2 = v. 165	2.89 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.6 = v. 154.5	13.1 = v. 154.5	3.42 %	22.3	12.4	64 %	S	13	0	5	
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.022 %								
./X. 902	h 1.20′	h 1.35′	+	21.0 = v. 193.3	8.1 = v. 129	4.90 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	21.1 = v. 193.7	8.4 = v. 132	5.14 %	22.8	12.4	60 %	SSE	22	2	5	
	h 2.03′	h 2.18′	—	21.0 = v. 193.3	20.7 = v. 192.1	0.040 %								
./X. 1902.														Stürmisch.
./X. 902	h 1.33′	h 1.48′	+	22.5 = v. 199.3	12.2 = v. 150	3.79 %								
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.6 = v. 199.7	11.6 = v. 146.8	4.08 %	21.0	12.0	65 %	WSW	5	3	5	
	h 2.15′	h 2.30′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
./X. 902	h 1.17′	h 1.32′	+	21.4 = v. 194.9	10.0 = v. 137.7	4.61 %								
	h 1.38′	h 1.53′	—	21 3 = v. 194.5	10.2 = v. 138.5	4.52 %	20.4	13.2	75 %	SE	3	7	4	
	h 2.00′	h 2.15′	—	20.5 = v. 191.3	20.2 = v. 190	0.052 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
14./X. 1902	h 1.53′	h 2.08′	+	22.1 = v. 197.7	11.2 = v. 144.4	4.19 %								
	h 2.15′	h 2.30′	—	22.5 = v. 199.3	12.4 = v. 151	3.70 %	19.6	13.7	81 %	SW	6.5	8	4	
	h 2.36′	h 2.51′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
15./X. 1902	h 1.25′	h 1.30′	+	23.2 = v. 202.1	16.0 = v. 169	2.37 %								
	h 1.37′	h 1.52′	—	23.3 = v. 202.5	15.9 = v. 168.5	2.45 %	19.8	12.6	76 %	W	5.5	2	5	
	h 1.58′	h 2.13′	—	22.5 = v. 199.3	22.2 = v. 198.1	0.044 %								
16./X. 1902	h 1.0′	h 1.15′	+	23.0 = v. 201.3	15.6 = v. 167	2.49 %								
	h 1.21′	h 1.36′	—	22.8 = v. 200.5	15.1 = v. 164.5	2.63 %	20.2	13.0	74 %	SW	5	1	4	
	h 1.43′	h 1.58′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								
17./X. 1902.														Regen
18./X. 1902	h 1.36′	h 1.51′	+	22.4 = v. 198.9	13.4 = v. 156	3.24 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	22.0 = v. 197.3	13.4 = v. 156	4.13 %	17.6	5.6	37 %	W		3	5	
	h 2.18′	h 2.33′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.028 %								
19./X. 1902.														Regen
20./X. 1902	h 1.04′	h 1.19′	+	23.3 = v. 202.5	15.0 = v. 164	2.81 %								
	h 1.25′	h 1.40′	—	23.5 = v. 203.3	15.1 = v. 164.5	2.83 %	18.4	13.3	84 %	W	3	1	5	
	h 1.47′	h 2.02′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.020 %								
21./X. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	24.8 = v. 209.3	18.8 = v. 183	1.77 %								
	h 2.06′	h 2.21′	—	24.0 = v. 205.3	17.8 = v. 117.8	1.91 %	17.8	10.4	68 %	W	4	2	4	
	h 2.27′	h 2.42′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.9	0.028 %								

m	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
	h 1.37′	h 1.52′	+	23.4 = v. 202.9	15.4 = v. 166	2.68 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	23.0 = v. 201.3	15.3 = v. 165.5	2.61 %	18.8	12.1	75 %	SW	4	5	4	
	h 2.20′	h 2.35′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.022 %								
	h 1.48′	h 2.03′	+	22.5 = v. 199.3	16.2 = v. 170	2.12 %								
	h 2.09′	h 2.24′	—	22.4 = v. 198.9	15.2 = v. 165	2.49 %	16.8	12.2	85 %	SSW	4	9	3	
	h 2.31′	h 2.46′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.028 %								
. 1902.														Sehr Windig.
	h 1.12′	h 1.27′	+	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	2.41 %								
	h 1.33′	h 1.48′	—	22.8 = v. 200.5	15.5 = v. 166.5	2.47 %	18.0	10.9	71 %	SE	30	10	3	
	h 1.54′	h 2.09′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								
. 1902.														Wind und Regen.
	h 1.46′	h 2.01′	+	22.1 = v. 197.7	15.0 = v. 164	2.48 %								
	h 2.07′	h 2.22′	—	22.4 = v. 198.9	15.0 = v. 164	2.57 %	17.0	10.1	70 %	S	5	7	4	
	h 2.28′	h 2.43′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.3	0.027 %								
	h 1.32′	h 1.47′	+	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	2.41 %								
	h 1.53′	h 2.08′	—	22.9 = v. 200.9	16.1 = v. 169.5	2.24 %	16.8	10.7	75 %	SW	9	6	4	
	h 2.15′	h 2.30′	—	22.4 = v. 198.9	22.2 = v. 198.1	0.033 %								
	h 1.11′	h 1.26′	+	22.7 = v. 200.1	15.2 = v. 165	2.56 %								
	h 1.32′	h 1.47′	—	22.8 = v. 200.5	15.0 = v. 164	2.81 %	18.0	8.9	58 %	SW	3	1	3	
	h 2.02′	h 2.17′	—	22.1 = v. 197.7	21.9 = v. 196.9	0.022 %								

November 1902.

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
1./XI. 1902	h 1.17′	h 1.32′	+	23.4 = v. 202.9	15.4 = v. 166	2.68 %								
	h 1.38′	h 1.53′	—	23.2 = v. 208.1	15.9 = v. 168.5	2.41 %	18.0	9.5	62 %	SW	2	1	5	
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.022 %								
2./XI. 1902	h 1.13′	h 1.28′	+	23.5 = v. 203.3	15.6 = v. 167	2.63 %								
	h 1.35′	h 1.50′	—	23.3 = v. 202.5	16.0 = v. 169	2.54 %	17.7	9.7	65 %	SE	12	4	4	
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.029 %								
3./XI. 1902	h 1.23′	h 1.38′	+	23.2 = v. 202.1	15.1 = v. 164.5	2.73 %								
	h 1.44′	h 1.59′	—	22.9 = v. 200.9	14.2 = v. 160	3.01 %	17.0	11.5	80 %	N	q. c.	1	4	
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.0 = v. 197.3	21.7 = v. 196.1	0.045 %								
4./XI. 1902	h 1.32′	h 1.47′	+	22.8 = v. 200.5	16.0 = v. 169	2.27 %								
	h 1.53′	h 2.08′	—	22.9 = v. 200.9	15.8 = v. 168	2.36 %	18.0	10.0	65 %	S	5	2	3	
	h 2.15′	h 2.30′	—	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195.7	0.034 %								
5.—27./XI. 1902.														Unterbrechung wegen Reparatur des Evaporometers
28./XI. 1902	h 1.04′	h 1.19′	+	22.7 = v. 200.1	15.2 = v. 165	3.58 %								
	h 1.25′	h 1.40′	—	22.5 =	15.0 =	3.64 %	12.9	7.5	68 %	NW	4	2	4	
						%								

tum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
	h 12.40′	h 12.55′	+	23.0 = v. 201.3	16.1 = v. 169.5	3.13 %								
./XI. 902	h 1.02′	h 1.17′	—	22.8 = v. 200.5	15.1 = v. 164.5	3.76 %	11.6	7.2	71 %	ESE	10	6	3	
	h 1.23′	h 1.38′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.026 %								

Dezember 1902.

	h 1.23′	h 1.38′	+	23.1 = v. 201.7	17.0 = v. 174	2.69 %								
XII. 902	h 1.45′	h 2.0′	–	22.9 = v. 200.9	16.7 = v. 172.5	2.78 %	13.6	7.8	67 %	E	5	10	2	
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.026 %								
	h 12.0′	h 12.15′	+	23.9 = v. 204.9	17.0 = v. 174	2.95 %								
XII. 902	h 12.21′	h 12.36′	—	23.6 = v. 203.7	17.2 = v. 175	2.77 %	13.8	9.4	80 %	SW	8	6	3	
	h 12.42′	h 12.57′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								
XII. 1902.														Regen.
	h 1.35′	h 1.50′	+	22.2 = v. 198.1	17.0 = v. 174	2.41 %								
XII. 902	h 1.57′	h 2.12′	—	22.7 = v. 200.1	17.3 = v. 175.5	2.37 %	10.6	7.4	76 %	SE	6	9	2	
	h 2.18′	h 2.33′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.033 %								
	h 1.45′	h 2.0′	+	23.8 = v. 204.5	18.0 = v. 179	2.26 %								
XII. 902	h 2.06′	h 2.21′	—	23.0 = v. 201.3	17.4 = v. 176	2.38 %	9.4	7.2	81 %	W	8	4	3	
	h 2.28′	h 2.43′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.026 %								
	h 1.31′	h 1.46′	+	23.0 = v. 201.3	17.5 = v. 176.5	2.32 %								
XII. 902	h 1.52′	h 2.07′	—	23.0 = v. 201.3	16.0 = v. 169.0	2.97 %	10.2	7.6	77 %	WNW	10	8	3	
	h 2 13′	h 2.28′	—	23.2 = v. 202.1	23.0 = v. 201.3	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
7./XII. 1902	h 1.38′	h 1.53′	+	23.1 = v. 201.7	17.6 = v. 177.0	2.30 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	23.0 = v. 201.3	18.0 = v. 179.0	2.04 %	9.2	5.9	68 %	NW	2	3	3	
	h 2.20′	h 2.35′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.026 %								
8.—9./XII. 1802.														Wind u Regen
10./XII. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	23.8 = v. 204.5	16.0 = v. 169.0	3.44 %								
	h 1.47′	h 2.02′	—	22.8 = v. 200.5	16.0 = v. 169.0	3.14 %	11.8	6.7	64 %	SW	4,5	1	4	
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.040 %								
11./XII. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	23.0 = v. 201.3	13.5 = v. 156.5	4.40 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	22.4 = v. 198.9	13.0 = v. 154	4.57 %	11.4	4.9	48 %	SE	17.4	1	5	
	h 2.23′	h 2.38′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.040 %								
12./XII. 1902	h 1.37′	h 1.52′	+	23.2 = v. 202.1	18.8 = v. 183.0	1.70 %								
	h 1.58′	h 2.13′	—	23.0 = v. 201.3	18.0 = v. 179	2.04 %	11.6	6.6	67 %	SE	5			
	h 2.20′	h 2.35′	—	22.3 = v. 198.5	22.0 = v. 197.3	0.060 %								
13./XII. 1902	h 1.50′	h 2.05′	+	22.0 = v. 197.3	14.0 = v. 159.0	3.92 %								
	h 2.11′	h 2.26′	—	22.2 = v. 198.1	14.0 = v. 159.0	4.00 %	12.4	7.3	68 %	SE	8	3	5	
	h 2.33′	h 2.48′	—	21.9 = v. 196.9	21.6 = v. 195.7	0.060 %								
14./XII. 1902	h 1.40′	h 1.55′	+	22.0 = v. 197.3	15.0 = v. 164.0	3.45 %								
	h 2.02′	h 2.17′	—	2.22 = v. 198.1	15.0 = v. 164.0	3.40 %	11.7	6.3	61 %	SE	6	2	5	
	h 2.24′	h 2.39′	—	21.0 = v. 193.3	20.7 = v. 192.1	0.060 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
15./XII. 1902	h 1.47′	h 2.02′	+	24.0 = v. 205.3	18.1 = v. 179.5	2.29 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	24.1 = v 205.8	18.8 = v. 183.0	1.96 %	11.2	6.8	69 %	S	2	10	1	
	h 2.30′	h 2.45′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								
16./XII. 1902.														Regen.
17./XII. 1902	h 1.45′	h 2.0′	+	24.5 = v. 207.8	18.6 = v. 182.0	2.56 %								
	h 2.06′	h 2.21′	—	23.2 = v. 202.1	18.0 = v. 179.0	2.12 %	9.8	5.2	58 %	NW	8	0	5	
	h 2.28′	h 2.43′	—	21.2 = v. 194.1	20.0 = v. 189.0	0.040 %								
18./XII. 1902	h 1.51′	h 2.06′	+	24.7 = v. 208.8	17.3 = v. 175.5	2.94 %								
	h 2.22′	h 2.37′	—	24.0 = v. 205.3	17.5 = v. 176.5	2.62 %	11.2	5.7	67 %	SW	6	1	4	
	h 2.43′	h 2.58′	—	21.6 = v. 195.7	21.3 = v. 194.5	0.060 %								
19./XII. 1902	h 1.13′	h 1.28′	+	24.0 = v. 205.3	16.9 = v. 173.5	3.01 %								
	h 1.35′	h 1.50′	—	23.8 = v. 204.5	17.0 = v. 174.0	2.89 %	12.0	7.0	67 %	NW	6	1	5	
	h 1.56′	h 2.11′	—	23.0 = v. 201.3	22.7 = v. 200.1	0.040 %								
21./XII. 1902	h 1.25′	h 1.40′	+	22.0 = v. 197.3	12.4 = v. 145.6	4.81 %								
	h 1.47′	h 2.02′	—	21.0 = v. 193.3	13.5 = v. 151.0	3.74 %	8.6	6.5	78 %	SSE	6	0	5	
	h 2.08′	h 2.23′	—	21.7 = v. 196.1	21.5 = v. 195.3	0.040 %								
22./XII. 1902	h 1.08′	h 1.23′	+	22.9 = v. 200.9	15.0 = v. 164	3.74 %								
	h 1.30′	h 1.45′	—	22.7 = v. 200.1	15.1 = v. 164.5	3.64 %	8.6	4.6	55 %	NNE	10	1	4	
	h 1.51′	h 2.06′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
23.—24./XII. 1902.														Heftige Wind.
25./XII. 1902	h 1.47′	h 2.02′	+	22.1 = v. 197.7	15.0 = v. 164	3.49 %								
	h 2.09′	h 2.24′	—	23.0 = v. 201.3	15.0 = v. 164.0	3.77 %	7.8	4.9	61 %	NW	14	1	5	
	h 2.30′	h 2.45′	—	21.1 = v. 193.7	20.9 = v. 192.9	0.040 %								
26./XII. 1902	h 12.50′	h 1.05′	+	23.1 = v. 201.7	17.2 = v. 175.0	2.56 %								
	h 1.11′	h 1.26′	—	23.2 = v. 202.1	17.0 = v. 174	2.73 %	9.4	7.2	81 %	W	16.5	7	3	
	h 1.33′	h 1.48′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v 198.5	0.033 %								
27./XII. 1902	h 12.0′	h 12.15′	+	26.0 = v. 215.3	19.5 = v. 186.5	2.14 %								
	h 12.22′	h 12.37′	—	25.6 = v. 213.3	19.7 = v. 187.5	1.96 %	10.2	5.6	60 %	SSW	5	6	2	
	h 12.43′	h 12.58′	—	23.6 = v. 203.7	23.4 = v. 202.9	0.026 %								
28./XII. 1962	h 1.20′	h 1.35′	+	22.8 = v. 200.5	14.1 = v. 159.5	4.14 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	23.0 = v. 201.3	14.4 = v. 163	4.10 %	11.2	7.5	75 %	SW	2	8	4	
	h 2.03′	h 2.28′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.033 %								
29./XII. 1902	h 1.47′	h 2.02′	+	23.3 = v. 202.5	17.7 = v. 177.5	2.32 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	23.2 = v. 202.1	17.2 = v. 175	2.60 %	12.2	8.1	76 %	WSW	11	4	4	
	h 2.29′	h 2.44′	—	22.8 = v. 200.5	22.7 = v. 200 1	0.013 %								
30./XII. 1902	h 1.35′	h 1.50′	+	23.1 = v. 201.7	17.8 = v. 178	2.20 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.9 = v. 200.9	17.0 = v. 174	2.62 %	12.0	7.2	69 %	SW	4	6	3	
	h 2.19′	h 2.34′	—	22.0 = v. 197.3	21.9 = v. 196.9	0.020 %								

m	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
	h 12.57′	h 1.12′	+	22.0 = v. 197.3	13.0 = v. 154	4.41 %								
II. 2	h 1.19′	h 1.34′	−	22.3 = v. 198.5	12.8 = v. 153	4.66 %	10.8	7.2	75 %	SW	15	9	4	
	h 1.40′	h 1.55′	−	21.8 = v. 196.5	21.6 = v. 195 7	0.040 %								

Januar 1903.

	h 1.10′	h 1.25′	+	21.9 = v. 196.9	14.5 = v. 161.5	3.62 %								
3	h 1.32′	h 1.47′	−	22.2 = v. 198.1	16.0 = v. 169	2.96 %	9.2	6.6	76 %	NW	14	7	4	
	h 1.53′	h 2.08′	−	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.060 %								
	h 1.27′	h 1.42′	+	22.9 = v. 200.9	15.0 = v. 164	3.74 %								
3	h 1.49′	h 2.04′	−	22.7 = v. 200.1	14.8 = v. 163	3.77 %	10.2	7.1	76 %	SSW	10	0	4	
	h 2.10′	h 2.25′	−	22.4 = v. 198.9	22.2 = v. 198.1	0.040 %								
	h 1.32′	h 1.47′	+	23.2 = v. 202.1	17.0 = v. 174	2.73 %								
3	h 2.02′	h 2.17′	−	23.0 = v. 201.3	16.2 = v. 170	3.08 %	11.8	7.3	71 %	S	8	8	3	
	h 2.23′	h 2.38′	−	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.026 %								
	h 1.28′	h 1.43′	+	23.4 = v. 202.9	18.0 = v. 179	2.17 %								
3	h 1.49′	h 2.04′	−	23.2 = v. 202.1	17.0 = v. 174	2.73 %	11.6	6.1	59 %	SW	8	6	3	
	h 2.10′	h 2.25′	−	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.040 %								
	h 1.23′	h 1.38′	+	23.4 = v. 202.9	17.4 = v. 176	2.52 %								
3	h 1.45′	h 2.0′	−	23.1 = v. 201.7	17.0 = v. 174	2.69 %	11.0	6.7	68 %	NW	2	6	3	
	h 2.06′	h 2.21′	−	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
7./I. 1903	h 1.35′	h 1.50′	+	22.5 = v. 199.3	14.0 = v. 159	4.10 %								
	h 1.56′	h 2.11′	—	22.7 = v. 200.1	14.1 = v. 159.5	4.16 %	12.3	9.1	84 %	S	12	1	4	
	h 2.18′	h 2.33′	–	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.033 %								
8./I. 1903	h 1.31′	h 1.46′	+	22.8 = v. 200.5	15.0 = v. 164	3.72 %								
	h 1.52′	h 2.07′	—	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	3.32 %	10.8	7.5	77 %	S	17.5	2	4	
	h 2.14′	h 2.29′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.040 %								
9./I. 1903	h 1.24′	h 1.39′	+	22.0 = v. 197.3	12.0 = v. 149	5.12 %								
	h 1.46′	h 2.01′	—	21.9 = v. 196.9	12.2 = v. 150	4.94 %	14.0	6.0	50 %	S	12	6	5	
	h 2.07′	h 2.22′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.026 %								
10./I. 1903	h 1.36′	h 1.51′	+	21.0 = v. 193.3	12.0 = v. 149	4.74 %								
	h 1.58′	h 2.13′	—	21.5 = v. 195.3	12.2 = v. 150	4.78 %	14.1	8.2	69 %	SSE	26	9	4	
	h 2.19′	h 2.34′	—	21.1 = v. 193.7	20.8 = v. 192.5	0.060 %								
11./I. 1903	h 12.32′	h 12.47′	+	21.0 = v. 193.3	10.2 = v. 138.5	6.25 %								Die Messung war gleich wiederholt mit demselben Resultate.
	h 12.53′	h 1.08′	—	21.7 = v. 196.1	10.0 = y. 137.7	6.69 %	15.2	8.7	68 %	S	26	8	4	
	h 1.15′	h 1.30′	—	21.8 = v. 196.5	21.5 = v. 195.3	0.060 %								
12./I. 1903.														Regen.
13./I. 1903	h 1.47′	h 2.02′	+	24.0 = v. 205.3	17.0 = v. 174	2.96 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	23.5 = v. 203.3	17.5 = v. 176.5	2.48 %	10.6	7.4	76 %	SW	17	10	2	
	h 2.30′	h 2.45′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.026 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
15./I. 1903	h 1.37′	h 1.52′	+	23.1 = v. 201.7	17.5 = v. 176.5	2.36 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	23.5 = v. 203.3	18.0 = v. 179	2.20 %	7.6	4.7	60 %	N	1	1	3	
	h 2.20′	h 2.35′	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.040 %								
16./I. 1903	h 1.25′	h 1.40′	+	23.2 = v. 202 1	15.0 = v. 164	3.85 %								
	h 1.46′	h 2.01′	—	24.0 = v. 205.3	16.5 = v. 171.5	3.22 %	5.6	3.2	46 %	W	19	6	4	
	h 2.07′	h 2.22′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.027 %								
17./I. 1903	h 12.50′	h 1.05′	+	22.0 = v. 197.3	14.3 = v. 160.5	3.77 %								
	h 1.12′	h 1.27′	—	22.4 = v. 198.9	15.0 = v. 164	3.61 %	5.6	3.2	46 %	WSW	16	0	5	
	h 1.33′	h 1.48′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.040 %								
18./I. 1903	h 1.48′	h 2.03′	+	22.0 = v. 197.3	14.5 = v. 161.5	3.66 %								
	h 2.09′	h 2.24′	—	23.0 = v. 201.3	16.0 = v. 169	3.20 %	6.0	4.1	58 %	N	14.4	6	0	
	h 2.31′	h 2.46′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.026 %								
19./I. 1903	h 1.27′	h 1.42′	+	23 1 = v. 201.7	16.5 = v. 171.5	2.96 %								
	h 1.48′	h 2.03′	—	23.7 = v. 204.1	16.5 = v. 171.5	3.13 %	6.0	3.9	56 %	N	1	1	3	
	h 2.09′	h 2.24′	—	22.7 = v. 200.1	22.5 = v. 199.3	0.026 %								
20./I. 1903	h 1.50′	h 2.05′	+	24.1 = v. 205.8	18.0 = v. 179	2.37 %								
	h 2.12′	h 2.27′	—	23.8 = v. 204.5	16.5 = v. 171.5	3.16 %	7.2	4.2	55 %	E	3	1	3	
	h 2.35′	h 2.50′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.028 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkung
22./I. 1903	h 1.38′	h 1.53′	+	23.0 = v. 201.3	16.5 = v. 171.5	2.92 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.5 = v. 199.3	15.0 = v. 164	3.64 %	9.8	6.9	76 %	NNW	6	8	3	
	h 2.21′	h 2.36′	—	21.0 = v. 193.3	20.8 = v. 192.5	0.040 %								
23.—24./I. 1903.														Regen.
25./I. 1903	h 1.36′	h 1.51′	+	23.0 = v. 201.3	12.9 = v. 153.5	4.80 %								
	h 2.06′	h 2.21′	—	22.9 = v. 200.9	12.6 = v. 152	4.97 %	7.8	7.2	91 %	S	17.5	1	3	
	h 2.27′	h 2.42′	—	22.8 = v. 200.3	22.6 = v. 200.1	0.040 %								
26./I. 1903	h 1.37′	h 1.52′	+	24.0 = v. 205.3	19.2 = v. 185	1.75 %								
	h 1.58′	h 2.13′	—	24.0 = v. 205.3	19.0 = v. 184	1.85 %	10.2	6.2	68 %	N	5.5	1	3	
	h 2.20′	h 2.35′	—	23.1 = v. 201.7	22.9 = v. 200.9	0.033 %								
27./I. 1903	h 1.30′	h 1.45′	+	23.6 = v. 203.7	16.5 = v. 171.5	3.10 %								
	h 1.51′	h 2.06′	—	22.8 = v. 200.5	17.0 = v. 174	2.60 %	10.4	7.0	74 %	NW	10.5	0	4	
	h 2.12′	h 2 27′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.026 %								
28./I. 1903	h 1.18′	h 1.33′	+	23.2 = v. 202.1	17.0 = v. 174	2.73 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	23.1 = v. 201.7	16.3 = v. 173	3.06 %	10.6	8.1	84 %	SW	2	1	4	
	h 2.03′	h 2.18	—	22.3 = v. 198.5	22.1 = v. 197.7	0.040 %								
29./I. 1903	h 1.50′	h 2.05′	+	23.0 = v. 201.3	16.5 = v. 171.5	2.92 %								
	h 2.12′	h 2.27′	—	23.2 = v. 202.1	16.2 = v. 170	3.16 %	10.4	6.6	69 %	NW	6	7	4	
	h 2.33′	h 2.48′	—	22.8 = v. 200.5	22.5 = v. 199.3	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
30./I. 1903	h 1.53′	h 2.08′	+	23.3 = v. 202.5	18.0 = v. 179	2.14 %								
	h 2.15′	h 2.31′	—	24.0 = v. 205.3	17.2 = v. 175	2.82 %	10.5	6.3	67 %	N	1	1	3	
	h 2.38′	h 2.53′	—	23.3 = v. 202.5	23.1 = v. 201.7	0.033 %								
31./I. 1903	h 1.20′	h 1.35′	+	23.5 = v. 203.3	16.0 = v. 169.0	3.36 %								
	h 1.41′	h 1.56′	—	22.9 = v. 200.9	14.5 = v. 161.5	3.96 %	10.0	6.8	74 %	N	5	9	3	
	h 2.02′	h 2.17′	—	22.5 = v. 199.3	22.2 = v. 198.1	0.055 %								

Februar 1903.

1.—4./II. 1903.														Regen und Wind.
5./II. 1903	h 1.27′	h 1.42′	+	23.7 = v. 204.1	16.2 = v. 170	3.29 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	23.9 = v. 204.9	16.0 = v. 169	3.46 %	9.4	4.1	46 %	NW	23	0	4	
	h 2.10′	h 2.25′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.026 %								
6./II. 1903	h 1.40′	h 1.55′	+	23.4 = v. 202.9	17.5 = v. 176.5	2.45 %								
	h 2.01′	h 2.16′	—	23.9 = v. 204.9	17.5 = v. 176.6	2.58 %	10.0	5.9	64 %	N	1	2	3	
	h 2.23′	h 2.38′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								
7./II. 1903	h 2.0′	h 2.15′	+	24.8 = v. 209.3	19.0 = v. 184	2.09 %								
	h 2.21′	h 2.36′	—	24.7 = v. 208.8	20.0 = v. 189	1.61 %	11.0	5.3	54 %	NNW	2	2	2	
	h 2.42′	h 2.57′	—	24.0 = v. 205.3	23.9 = v. 204.9	0.020 %								
8./II. 1903	h 1.0′	h 1.15′	+	23.6 = v. 203.7	15.3 = v. 165.5	3.73 %								
	h 1.21′	h 1.36′	—	23.7 = v. 204.1	15.0 = v. 164	3.98 %	11.0	7.6	77 %	NNW	4	0	5	
	h 1.43′	h 1.58′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkun
9./II. 1903	h 1.35′	h 1.50′	+	23.6 = v. 203.7	17.0 = v. 174	2.84 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	23.0 = v. 201.3	16.3 = v. 170.5	3.02 %	10.8	7.7	80 %	NW	6	6	3	
	h 2.18′	h 2.33′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.026 %								
10./II. 1903	h 1.43′	h 1.58′	+	23.0 = v. 201.3	17.0 = v. 174	2.65 %								
	h 2.04′	h 2.19′	—	23.4 = v. 202.9	16.0 = v. 169	3.33 %	10.8	6.6	68 %	WSW	7	7	4	
	h 2.25′	h 2.40′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								
11./II. 1903	h 1.57′	h 2.12′	+	24.0 = v. 205.3	19.0 = v. 184	1.85 %								
	h 2.19′	h 2.34′	—	23.4 = v. 202.9	17.0 = v. 174	2.78 %	10.0	4.6	50 %	WSW	5	1	3	
	h 2.40′	h 2.55′	—	22.0 = v. 197.3	21.8 = v. 196.5	0.040 %								
12./II. 1903	h 1.23′	h 1.38′	+	23.0 = v. 201.3	14.0 = v. 161.5	3.98 %								
	h 1.44′	h 1.59′	—	23.4 = v. 202.9	15.8 = v. 168	3.45 %	10.4	6.3	68 %	W	9	8	3	
	h 2.07′	h 2.22′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								
13./II. 1903	h 1.45′	h 2.0′	+	23.2 = v. 202.1	14.2 = v. 160.0	4.24 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	3.32 %	10.8	7.2	75 %	SW	18.7	4	5	
	h 2.29′	h 2.44′	—	22.7 = v. 200.1	22.4 = v. 198.9	0.040 %								
14./II. 1903	h 1.27′	h 1.42′	+	23.2 = v. 202.1	14.2 = v. 160	4.24 %								
	h 1.49′	h 2.04′	—	23.1 = v. 201.7	14.0 = v. 159	4.28 %	11.4	6.9	69 %	S	6	8	4	
	h 2.10′	h 2.25′	—	23.0 = v. 201.3	22.8 = v. 200.5	0.026 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkungen
15./II. 1903	h 1.48′	h 2.03′	+	23.7 = v. 204.1	16.2 = v. 170.0	3.29 %								
	h 2.10′	h 2.25′	—	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168.0	3.32 %	11.2	8.0	80 %	NNW	15	9	3	
	h 2.31′	h 2.46′	—	22.6 = v. 199.7	22.4 = v. 198.9	0.026 %								
16.—17.—18./II. 1903.														Heftiger Nord-Wind.
19./II. 1903	h 1.41′	h 1.56′	+	23.0 = v. 201.3	17.2 = v. 175	2.52 %								
	h 2.02′	h 2.17′	—	23.2 = v. 202.1	17.5 = v. 176.5	2.40 %	10.0	4.4	47 %	WSW	11	1	3	
	h 2.24′	h 2.39′	—	23.0 = v. 201.3	22.9 = v. 200.9	0.013 %								
20./II. 1903	h 1.23′	h 1.38′	+	23.3 = v. 202.5	17.3 = v. 175.5	2.56 %								
	h 1.45′	h 2.0′	—	23.1 = v. 201.7	16.9 = v. 173.5	2.74 %	10.4	7.6	80 %	NNW	8.6	9	3	
	h 2.07′	h 2.22′	—	22.2 = v. 198.1	22.0 = v. 197.3	0.040 %								
21./II. 1903	h 2.0′	h 2.15′	+	24.0 = v. 205.3	16.8 = v. 173	3.06 %								
	h 2.22′	h 2.37′	—	24.0 = v. 205.3	16.7 = v. 172.5	3.12 %	12.4	5.8	54 %	N	6.5	0	5	
	h 2.43′	h 2.58′	—	23.0 = v. 201.3	22.7 = v. 200.1	0.040 %								
22./II. 1903	h 1.38′	h 1.53′	+	23.0 = v. 201.3	14.0 = v. 159	4.24 %								
	h 1.59′	h 2.14′	—	22.7 = v. 200.1	13.5 = v. 156.5	4.38 %	11.8	8.3	80 %	S	27.5	6	2	
	h 2.21′	h 2.36′	—	22.6 = v. 199.7	22.3 = v. 198.5	0.040 %								
23./II. 1903	h 2.0′	h 2.15′	+	23.2 = v. 202.1	16.0 = v. 169	3.28 %								
	h 2.21′	h 3.36′	—	23.0 = v. 201.3	15.0 = v. 164	3.70 %	11.8	7.9	76 %	S	12.5	4	4	
	h 2.42′	h 2.57′	—	22.9 = v. 200.9	22.6 = v. 199.7	0.040 %								

Datum	Beobachtet von	bis	Zeichen	V^0	V'	$\frac{200(\log V^0 - \log V')}{15}$	Temperatur	Absolute Feuchtigkeit	Relative Feuchtigkeit	Windrichtung	Windstärke	Bewölkung	Dunstgehalt	Anmerkun
24./II. 1903	h 1.18′	h 1.33′	+	23.8 = v. 204.5	16.0 = v. 169	3.44 %								
	h 1.39′	h 1.54′	—	23.5 = v. 203.3	15.7 = v. 167.5	3.54 %	12.5	9.7	90 %	SSW	24	1	4	
	h 2.1′	h 2.14′	—	22.5 = v. 199.3	22.3 = v. 198.5	0.033 %								
25./II. 1903	h 1.50′	h 2.05′	+	23.2 = v. 202.1	14.1 = v. 159.5	4.28 %								
	h 2.12′	h 2.27′	—	22.7 = v. 200.1	14.0 = v. 159	4.16 %	13.0	9.3	87 %	S	6	8	2	
	h 2.33′	h 2.48′	—	21.9 = v. 196.9	21.7 = v. 196.1	0.040 %								
26./II. 1903	h 1.35′	h 1.50′	+	22.9 = v. 200.9	14.6 = v. 162	3.90 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	22.8 = v. 200.5	14.5 = v. 161.5	3.93 %	14.0	5.8	48 %	S	2	0	4	
	h 2.18′	h 2.33′	—	23.2 = v. 202.1	22.9 = v. 200.9	0.053 %								
27./II. 1903	h 1.47′	h 2.02′	+	23.0 = v. 201.3	14.5 = v. 161.5	3.90 %								
	h 2.08′	h 2.23′	—	22.9 = v. 200.9	14.3 = v. 160.5	4.06 %	13.4	6.7	58 %	W	3	3	5	
	h 2 29′	h 2.44′	—	22.8 = v. 200.5	22.6 = v. 199.7	0.027 %								
28./II. 1903	h 1.35′	h 1.50′	+	23.1 = v. 201.7	16.0 = v. 169	3.24 %								
	h 1.57′	h 2.12′	—	23.0 = v. 201.3	15.8 = v. 168	3.32 %	13.0	8.3	75 %	W	11	7	4	
	h 2.19′	h 2.34′	—	22.9 = v. 200.9	22.7 = v. 200.1	0.027 %								

Zur Theorie der totalen Reflexion.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 16. Mai 1903.

In einer Abhandlung vom vorigen Jahr[1]) beschäftigt sich Herr E. E. Hall mit dem Problem des Durchganges des Lichtes durch eine dünne Schicht, an deren erster Grenzfläche sogenannte totale Reflexion stattfindet. Er bedient sich dabei der gebräuchlichen Anordnung, welche die dünne Schicht auf der einen Seite durch eine ebene, auf der anderen Seite durch eine nach einer Kugelfläche abgerundete Hypothenusenfläche je eines rechtwinkelig gleichseitigen Prismas begrenzt. Einer der Gegenstände seiner Messung ist die Bestimmung der Dimensionen der Ellipse, auf welcher die dünne Schicht durchsichtig erscheint.

Die Formeln für den Vorgang gewinnt Herr Hall aus der electromagnetischen Lichttheorie und knüpft an dieselben eine Polemik gegen die Formeln, die ich vor neunzehn Jahren[2]) für das gleiche Problem aus dem Kirchhoff'schen Princip abgeleitet habe. Insbesondere constatirt er, daß meine Formeln in dem Falle von den seinigen abweichen, daß das erste Medium des zusammengesetzten Systemes von dem dritten verschieden ist, während sie einander identisch sind, wenn das erste und das dritte Medium übereinstimmen. Er schließt aus seinen Beobachtungen, daß die Durchlässigkeit der dünnen Schicht bei entgegengesetzten Beobachtungsrichtungen ein wenig verschieden ist, und findet diese That-

1) E. E. Hall, Phys. Rev. 15, 73, 1902.

2) W. Voigt, Gött. Nachr. v. 1884, S. 49. In dieser Publication habe ich mich durchaus der Lösungen in reeller Form bedient; eine Ableitung der Resultate in complexer Form auf einem sehr kurzen Wege findet sich in meinem Kompendium II. Bd. S. 643 u. f.

sache in seinen Formeln der electromagnetischen Theorie ausgedrückt, während meine Gleichungen das Gegentheil aussagen.

Die factische Sachlage ist etwas complicirt, und deshalb erlaube ich mir, sie im Folgenden aufzuklären. Daß eine Differenz zwischen der elastischen und der electromagnetischen Lichttheorie auf den Gebieten der Reflexion und Brechung an den Grenzen isotroper Medien (wie auf vielen anderen) nicht stattfindet, ist bekannt, und somit kann die Abweichung der Resultate nur auf einer verschiedenen Verwendung der Formeln beruhen.

Ich habe mich in meiner alten Arbeit bezüglich der Definition der Intensität an meinen Lehrer Fr. Neumann angeschlossen, der bei Reflexion und Brechung die Intensitäten einer durch verschiedene Medien fortgepflanzten Welle mißt [1]) durch die lebendigen Kräfte (resp. Energien) correspondirender Volumina in den verschiedenen Medien. Dabei sind correspondirende Volumina enthalten in Cylindern von mit der Wellenlänge proportionaler Höhe, welche seitlich begrenzt sind durch ein System von durch alle Medien fortgepflanzten Strahlen. Diese Definition ist in der fraglichen Arbeit von mir vollständig consequent angewendet worden, und sie ergiebt das von mir ausgesprochene Resultat, daß bei umgekehrtem Verlauf der Strahlen gleicher Intensität im einfallenden Licht auch gleiche Intensität im austretenden entspricht.

Dies Resultat läßt sich auch aus den Grundformeln der elastischen, wie der electromagnetischen Theorie ohne alle Rechnung folgern. Ich will dies an den Formeln zeigen, die Herr Hall [2]) für die Schwingung benutzt, deren electrische Componente normal zur Einfallsebene schwingt. Bezeichnet man die Amplituden in den drei Medien 1, 2, 3 mit E_s, R_s; D'_s, D''_s; D_s und setzt kurz

$$n_h \cos \varphi_h = r_h^2,$$

unter n_h den Brechungsindex, unter φ_h den (reellen oder complexen) Einfallswinkel verstanden, so gilt

$$1) \qquad \begin{aligned} E_s + R_s &= D'_s + D''_s, \\ r_1^2(E_s - R_s) &= r_2^2(D'_s - D''_s); \\ D'_s e^{-u} + D''_s e^{+u} &= D_s e^{-iq}, \\ r_2^2(D'_s e^{-u} - D''_s e^{+u}) &= r_3^2 D_s e^{-iq}. \end{aligned}$$

Die Bedeutung von u und q kommt für uns nicht in Betracht; zu

1) S. z. B. Fr. Neumann, Vorles. über Optik, Leipzig 1885, S. 136.
2) l. c. S. 94.

benutzen ist nur, daß u ausschließlich von dem Vorgange im zweiten Medium abhängt.

Setzen wir nun

$$e^{u} = \varepsilon^{2},$$

$$E_{s}r_{1} = \mathfrak{E}_{s}, \quad R_{s}r_{1} = \mathfrak{R}_{s}, \quad D_{s}r_{3} = \mathfrak{D}_{s},$$

$$\mathfrak{D}'_{s}r_{3}/\varepsilon = \mathfrak{D}_{s}, \quad D''_{s}r_{2}\varepsilon = \mathfrak{D}''_{s},$$

so nehmen die Formeln (1) die Gestalt an

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{s}r_{2} &= -\mathfrak{R}_{s}r_{2} + \mathfrak{D}'_{s}\varepsilon r_{1} + \mathfrak{D}''_{s}r_{1}/\varepsilon, \\ \mathfrak{E}_{s}r_{1} &= +\mathfrak{R}_{s}r_{1} + \mathfrak{D}'_{s}\varepsilon r_{2} - \mathfrak{D}''_{s}r_{2}/\varepsilon, \\ 0 &= \quad -\mathfrak{D}'_{s}r_{3}/\varepsilon - \mathfrak{D}''_{s}\varepsilon r_{3} + \mathfrak{D}_{s}e^{-iq}r_{2}, \\ 0 &= \quad -\mathfrak{D}'_{s}r_{3}/\varepsilon + \mathfrak{D}''_{s}\varepsilon r_{2} + \mathfrak{D}_{s}e^{-iq}r_{3}. \end{aligned} \qquad 2)$$

Der Nenner des hieraus folgenden Ausdruckes für $\mathfrak{D}_{s}e^{-iq}$, nämlich die Determinante,

$$\begin{vmatrix} -r_{2}, & +\varepsilon r_{1}, & +r_{1}/\varepsilon, & 0 \\ +r_{1}, & +\varepsilon r_{2}, & +r_{2}/\varepsilon, & 0 \\ 0, & -r_{3}/\varepsilon, & -\varepsilon r_{3}, & +r_{2} \\ 0, & -r_{2}/\varepsilon, & +\varepsilon r_{2}, & +r_{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -r_{2}, & +\varepsilon r_{3}, & +r_{3}/\varepsilon, & 0 \\ +r_{3}, & +\varepsilon r_{2}, & -r_{2}/\varepsilon, & 0 \\ 0, & -r_{1}/\varepsilon, & -\varepsilon r_{1}, & +r_{2} \\ 0, & -r_{2}/\varepsilon, & +\varepsilon r_{2}, & +r_{1} \end{vmatrix}$$

behält seinen Werth, wenn man den Index 1 mit 3 und 3 mit 1 vertauscht. Das Gleiche gilt von dem Zähler des Ausdruckes für $\mathfrak{D}_{s}e^{-iq}$, nämlich für

$$-\mathfrak{E}_{s}\left\{r_{2}\begin{vmatrix} r_{1}, & \varepsilon r_{2}, & -r_{3}/\varepsilon \\ 0, & -r_{3}/\varepsilon, & -\varepsilon r_{3} \\ 0, & -r_{2}/\varepsilon, & +\varepsilon r_{2} \end{vmatrix} - r_{1}\begin{vmatrix} 0, & -r_{3}/\varepsilon, & -\varepsilon r_{3} \\ 0, & -r_{2}/\varepsilon, & +\varepsilon r_{2} \\ -r_{2}, & \varepsilon r_{1}, & +r_{1}/\varepsilon \end{vmatrix}\right\},$$

d. h. für

$$+2\mathfrak{E}_{s}r_{1}r_{2}\begin{vmatrix} r_{3}/\varepsilon, & \varepsilon r_{3} \\ -r_{2}/\varepsilon, & \varepsilon r_{2} \end{vmatrix} = 4\mathfrak{E}_{s}r_{1}r_{2}^{2}r_{3}.$$

Nun ist das Quadrat des Moduls von $\mathfrak{E}_{s}$ die Intensität des einfallenden, das Analoge von $\mathfrak{D}_{s}$ (resp. $\mathfrak{D}_{s}e^{-iq}$) die Intensität des austretenden Lichtes; bei Zugrundelegung dieser Definition ist also das Phänomen reversibel. Dasselbe gilt für die zweite Schwingungscomponente.

Bei den zu erklärenden Beobachtungen befindet sich aber die Lichtquelle nicht im ersten, der Beobachter nicht im dritten Medium des oben betrachteten Systemes; es kommen also zu den oben behandelten Brechungen noch zwei weitere (gewöhnliche) hinzu. Da aber für diese die Reversibilität des Vorganges bei Zugrunde-

legung der Neumann'schen Definition längst nachgewiesen ist, so ergiebt sich auch die Reversibilität für den ganzen Vorgang.

Allerdings ist zu beachten, daß die Neumann'sche Definition ohne Weiteres nur in den Fällen anwendbar ist, daß die correspondirenden Räume im ersten und letzten Medium (Luft) außer der stets gleichen Höhe auch gleiche Grundflächen besitzen. In den anderen Fällen ist eine Energie, die im ersten Medium durch eine Fläche f hindurchtritt, im letzten auf einer andern f' ausgebreitet, und es wird demgemäß die wahrnehmbare Lichtstärke in dem Verhältniß f/f' geändert sein. Aber diese Veränderung ist so zu sagen keine physikalische; ihre Ursache liegt auch nicht in der dünnen (totalreflectirenden) Schicht sie ist eine rein geometrische, darauf beruhend, daß in Folge der verschiedenen Brechungen das einfallende Lichtbündel am Schlusse etwas ausgebreitet oder zusammengedrängt ist. Sie würde dieselbe sein, wenn die dünne Schicht ganz fehlte, und das erste Medium das dritte direct berührte; sie würde völlig verschwinden, wenn die Winkel der benutzten Glasprismen so gewählt wären, daß der austretende Strahl dem einfallenden parallel verliefe; sie würde dagegen auftreten, wenn das erste und das dritte Medium gleich, aber die Winkel der Prismen so gewählt wären, daß der austretende Strahl dem eintretenden nicht parallel verliefe.

Die theoretischen Entwickelungen Herrn Hall's müßten auf dieselben Resultate führen, wenn er nicht (nach meiner Ansicht) bei der Rechnung einen Fehler begangen hätte. Er berechnet die Amplituden der schwingenden electrischen Kraft innerhalb des Systemes, wendet aber für die Brechungen an der ersten und der letzten Grenze nicht die für die Amplituden geltenden (irreversibeln) Formeln an, sondern die für die Intensitäten nach Neumann'scher Definition geltenden (reversibeln).

Was schließlich die Beobachtungen angeht, so kann man unter der Annahme, daß die Grenze der Durchsichtigkeit von der absoluten Intensität abhängt — eine Annahme, die natürlich nicht unter allen Umständen zulässig ist, da bei starken örtlichen Intensitätsänderungen offenbar noch andere Umstände Einfluß auf die Beobachtung besitzen, — ohne alle Rechnung zunächst den Sinn bestimmen, in dem Beobachtungen, wo das Licht das Prismenpaar in der Richtung Flintglas-Crownglas durchsetzt, abweichen müssen von solchen mit entgegengesetzter Fortpflanzungsrichtung. Im ersteren Falle wird das einfallende Lichtbündel geometrisch zusammengezogen, im letzteren verbreitert; im ersteren Falle muß also die Helligkeit und somit der Durchmesser der Durchsichtig-

keitsellipse wachsen, im letzteren abnehmen. Dies ist in der That das Resultat der Hall'schen Beobachtungen.

Daß auch die Größenordnung der Hall'schen Zahlen mit der vorstehend gegebenen Erklärung stimmt, ergiebt sich durch folgende angenäherte Betrachtung.

Die Schwächung der in die dünne Schicht eindringenden Schwingungen mit dem Abstand z von der Grenzfläche ist durch den Factor

$$e^{-2\pi(z/\lambda)\sqrt{n^2\sin^2\varphi-1}}$$

bestimmt, wobei λ die Wellenlänge in der Schicht, n den Brechungsindex des ersten Mediums und φ den Einfallswinkel bezeichnet. Ist Crownglas das erste Medium, $n = 1{,}516$, und der Einfallswinkel auf die Zwischenschicht gleich 45^0, so hat der Factor von z/λ den Werth von rund 2,4. Die in Wellenlängen ausgedrückte Differenz der beiden Dicken der Schicht, welche die beginnende Undurchsichtigkeit bei der hier vorausgesetzten und bei der entgegengesetzten Strahlenrichtung characterisiren, findet Herr Hall bei nicht sehr genau übereinstimmenden Beobachtungen in der Umgebung des vorausgesetzten Einfallswinkels im Mittel gleich 0,04, dem hiernach ein Intensitätsverhältniß von

$$e^{2\,.\,2{,}4\,.\,0{,}04} = e^{0{,}19} = 1{,}21$$

entsprechen würde. Unter gleichen Umständen ist das Verhältniß der Querschnitte des eintretenden und des austretenden Strahlenbündels etwa gleich 1,08; hiervon ist das Quadrat in Rechnung zu setzen, da die Querschnittsveränderung bei den beiden Beobachtungen im umgekehrten Sinne wirkt. So gelangt man zu einem theoretischen Werth von 1,17, der mit dem aus der Beobachtung folgenden hinreichend übereinstimmt und zugleich die Richtigkeit der vorstehend gegebenen Erklärung und die Sorgfalt der Hall-schen Beobachtungen erweisen dürfte.

Göttingen, April 1903.

Zur Elektrodynamik. I.

Zwei Formen des Princips der kleinsten Action in der Elektronentheorie.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung am 16. Mai 1903 von F. Klein.

§ 1. Eine im Raumelement $d\omega$ befindliche mit der Geschwindigkeit v_x, v_y, v_z bewegte Elektricitätsmenge e erfährt in einem durch die Vektoren der elektrischen und magnetischen Kraft K und H definierten elektrischen Felde eine mechanische Kraft, welche in der Lorentz-Wiechert'schen Elektrodynamik folgendermaßen bestimmt ist[1]):

Bezeichnet man die Componenten der Kraft mit eF_x, eF_y, eF_z, so gilt:

$$1) \qquad F_x = K_x - v_y H_z + v_z H_y$$

nebst den durch cyklische Vertauschung der Indices hervorgehenden Werten der andern Componenten, auf deren Anschreibung ich hier wie in allen späteren analogen Fällen verzichten werde. (Dabei ist die Lichtgeschwindigkeit $V = 1$ gesetzt.)

Führt man statt der elektrischen und magnetischen Kraft nach Maxwell das Potential Φ und das Vektorpotential Γ_x, Γ_y, Γ_z ein mit Hülfe der Relationen:

$$2) \qquad K_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial t} \qquad H_x = \frac{\partial \Gamma_z}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x}$$

so erhält die mechanische Kraft den Ausdruck:

---

1) Man vergleiche insbesondere: E. Wiechert, Electrodynamische Elementargesetze. Drude's Annalen. Bd. 4. pag. 676. 677.

$$3) \qquad F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial t} - v_y\left(\frac{\partial \Gamma_y}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x}\right) + v_z\left(\frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial z}\right)$$

oder:

$$F_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} + v_x\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial \Gamma_y}{\partial x} + v_z\frac{\partial \Gamma_z}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial t} - v_x\frac{\partial \Gamma_x}{\partial x} - v_y\frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} - v_z\frac{\partial \Gamma_x}{\partial z}.$$

Setzt man:

$$4) \qquad L = \Phi - v_x\Gamma_x - v_y\Gamma_y - v_z\Gamma_z$$

und benutzt totale Derivierte statt der partiellen, so schreibt sich F in der Gestalt:

$$F_x = -\frac{dL}{dx} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_x}.$$

Da dieser Ausdruck die Form einer Lagrange'schen Variationsgleichung hat, so erkennt man unmittelbar die Gültigkeit des folgenden Satzes, welcher eine erste Form des Prinzips der kleinsten Aktion in der Elektrodynamik darstellt:

„In einem gegebenen elektrischen Felde bewegt sich die Elektrizität so, daß die Variation des Integrals:

$$A) \qquad \int dt\,(-T + \Sigma e L)$$

zwischen festen Zeiten, Anfangs- und Endlagen genommen, verschwindet.

Hierbei ist die Summe über alle elektrischen Ladungen e zu erstrecken, T ist die lebendige Kraft der ponderablen Massen, an die die Elektrizität gebunden ist, und L ist die Größe $\Phi - v_x\Gamma_x - v_y\Gamma_y - v_z\Gamma_z$, welche ich als „elektrokinetisches Potential" bezeichnen will".

Man gewinnt einen sehr einfachen Ausdruck für das elektrokinetische Potential, wenn man den Zusammenhang der Φ und Γ mit der Verteilung der Elektrizität im Raume einführt. Bezeichnet man nämlich die Raumdichte der Elektrizität im Element $d\omega$ zur Zeit t mit $\chi(t)$, so gilt im Punkte x', y', z' zur Zeit t':

$$B) \qquad \Phi = \int \frac{d\omega}{r}\chi(t'-r) \qquad\qquad \Gamma_x = \int \frac{d\omega}{r}\chi(t'-r)\,v_x(t'-r)$$

Hier ist r der Abstand des Elements $d\omega$ von dem Aufpunkt x', y', z' und es sind in jedem Raumelement die Werte der Dichte und Geschwindigkeit zu benutzen, welche dort zu einer um die

Lichtzeit zurückliegenden Epoche galten. Das elektrokinetische Potential erhält damit folgende Gestalt:

$$C) \qquad L = \int \frac{d\omega}{r} \chi(t'-r)[1-v'(t')\,v(t'-r)\cos(v', v)].$$

Dieser Ausdruck stimmt überein mit dem von Clausius aufgestellten elektrodynamischen Potential, vermehrt um das electrostatische Potential, nur daß für die Dichte und Geschwindigkeit der wirksamen Elektrizität die Werte einzusetzen sind, welche zu einer um die Lichtzeit zurückliegenden Epoche galten. Hier ist also der Uebergang von der Fernwirkungstheorie zur Annahme zeitlicher Ausbreitung der elektrischen Kraft in einfachster Weise vollzogen. Es ergiebt sich, daß die ganze Elektrodynamik in die bisherige Mechanik aufgenommen wird durch die bündige Aussage: Unter das Integral des Hamilton'schen Prinzips ist beim Vorhandensein elektrischer Ladungen noch der Betrag ΣeL, über alle Ladungen e summiert, einzuführen.

§ 2. Während im Vorstehenden alle Wirkungen auf die elektrischen Ladungen selbst zurückgeführt sind, kann man namentlich für die Optik ein Variationsprinzip wünschen, welches nicht nur die ponderomotorischen Kräfte, sondern auch die Feldgleichungen für die elektrische und magnetische Kraft durch bloße Variation liefert. Derartiger Prinzipe hat Lorentz eines an die Spitze seiner Begründung der Elektronentheorie gestellt[1]), ein anderes ist von Helmholtz für die Hertz'sche Elektrodynamik gebildet worden[2]), welches sich aber auch in der ganzen Art der Variation von dem Lorentz'schen Prinzipe unterscheidet. Hier soll ein Prinzip formuliert werden, welches die Gleichungen der Elektronentheorie liefert, aber in der Art der Variation dem Helmholtz'schen Prinzip analog ist. Es baut sich unmittelbar auf dem eben angegebenen Satze auf und lautet:

Zur Berücksichtigung der elektromagnetischen Wirkungen ist dem Integral des Hamilton'schen Prinzips die Größe:

$$D) \qquad \int dt\, d\omega \left\{ \frac{H^2-K^2}{8\pi} + \chi L \right\}$$

hinzuzufügen.

1) Lorentz, La Théorie de Maxwell.
2) Helmholtz, Gesammelte Abhandl. Bd. III. p. 476.

Es sind dabei einerseits K, H und L nach (2) und (4) auszudrücken durch Φ und die Γ und die vier letzteren Größen zu variieren, andrerseits ist die Bewegung der ponderabeln Massen und damit zugleich der auf ihnen haftenden Elektrizität zu variieren. Das Integral ist, wie stets beim Hamilton'schen Prinzip, zwischen festen Zeiten zu nehmen, und die Variationen des Ortes der Massen, wie die Variationen der Componenten des Vektorpotentials Γ_x, Γ_y, Γ_z müssen für die Grenzzeiten verschwinden.

Ich will die Ausführung der Variation andeuten. Die Variation des Integranden nach Φ ergiebt:

$$K_x \frac{\partial \delta\Phi}{\delta x} + K_y \frac{\partial \delta\Phi}{\partial y} + K_z \frac{\partial \delta\Phi}{\partial z} + 4\pi\chi\, \delta\Phi.$$

Vollzieht man die nötigen partiellen Integrationen, so folgt als Bedingung des Verschwindens der Variation:

$$4\pi\chi - \frac{\partial K_x}{\partial x} - \frac{\partial K_y}{\partial y} - \frac{\partial K_z}{\partial z} = 0.$$

Die Variation nach Γ_x giebt im Integranden

$$H_z \frac{\partial \delta\Gamma_x}{\partial y} - H_y \frac{\partial \delta\Gamma_x}{\partial z} + K_x \frac{\partial \delta\Gamma_x}{\partial t} - 4\pi\chi v_x \delta\Gamma_x$$

und damit als Bedingungsgleichung:

$$-\frac{\partial H_z}{\partial y} + \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{\partial K_x}{\partial t} - 4\pi\chi v_x = 0.$$

Das ist die erste Hälfte des Maxwell'schen Gleichungssystems. Die zweite steckt bereits in dem Ansatz (2), in der Behauptung, daß sich die 6 Komponenten der elektrischen und magnetischen Kräfte in dieser Form auf die vier Größen Φ, Γ zurückführen lassen. In der That erhält man aus (2) durch einfache Differentiationen:

$$\frac{\partial K_x}{\partial y} - \frac{\partial K_y}{\partial x} = -\frac{\partial H_z}{\partial t}.$$

Was die Variation nach der Bewegung der Massen und der mit ihnen verbundenen elektrischen Ladungen angeht, so kann man in zweierlei Weisen verfahren, welche respektive der Lagrange'schen und der Euler'schen Auffassung in der Hydrodynamik entsprechen. Entweder man setzt $d\omega\chi = de$ und verfolgt die einzelnen Massenteilchen mit ihren unveränderlichen elektrischen La-

dungen *de*. Das ist der Weg, der rückwärts im vorigen Paragraphen beschritten wurde. Oder man betrachtet die Aenderungen der elektrischen Dichte χ und der Geschwindigkeit, welche bei der Variation der ganzen Bewegung an einem bestimmten Ort $d\omega$ erfolgen. Letzteren Weg will ich zur Controlle jetzt gehen, obwohl er an sich der verwickeltere ist.

Die Coordinaten eines Massenteilchens, welche bei der Ausgangsbewegung zur Zeit t die Werte x, y, z haben, mögen bei der variierten Bewegung zur selben Zeit gleich $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ sein. Die Dichte der Elektrizität gehe dadurch am Punkte x, y, z aus dem anfänglichen Wert χ in den Wert $\chi+\delta\chi$ über. Dann ist offenbar entsprechend der hydrodynamischen Continuitätsgleichung:

$$\delta\chi = -\frac{\partial(\chi\xi)}{\partial x} - \frac{\partial(\chi\eta)}{\partial y} - \frac{\partial(\chi\xi)}{\partial\xi}.$$

Die Geschwindigkeit eines bestimmten Masseteilchens in der x-Richtung wächst bei der Variation der Bewegung um

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial\xi}{\partial t} + v_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\xi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\xi}{\partial z}.$$

Um auf die Geschwindigkeitsänderung an demselben Ort zurückzukommen, hat man hiervon noch den Betrag

$$\xi\frac{\partial u_x}{\partial x} + \eta\frac{\partial u_x}{\partial y} + \zeta\frac{\partial v_x}{\partial z}$$

abzuziehn. Es wird also die ganze Variation von v_x:

$$\delta v_x = \frac{\partial\xi}{\partial t} + v_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\xi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\xi}{\partial z} - \xi\frac{\partial v_x}{\partial x} - \eta\frac{\partial v_x}{\partial y} - \zeta\frac{\partial v_x}{\partial z}.$$

Setzt man diese Variationen in χL ein, so erhält man z. B. folgende von ξ abhängigen Terme:

$$-\frac{\partial(\chi\xi)}{\partial x}(\Phi - v_x\Gamma_x - v_y\Gamma_y - v_z\Gamma_z) - \chi\Gamma_x\left(\frac{\partial\xi}{\partial t} + v_x\frac{\partial\xi}{\partial x} + v_y\frac{\partial\xi}{\partial y} + v_z\frac{\partial\xi}{\partial z}\right)$$
$$+ \chi\xi\left(\Gamma_x\frac{\partial v_x}{\partial x} + \Gamma_y\frac{\partial v_y}{\partial x} + \Gamma_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

und diese liefern zur mechanischen Kraft in der x-Richtung den Beitrag:

$$\chi\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}(v_x\Gamma_x)-\frac{\partial}{\partial x}(v_y\Gamma_y)-\frac{\partial}{\partial x}(v_z\Gamma_z)\right]+\frac{\partial}{\partial t}(\chi\Gamma_x)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}(\chi v_x\Gamma_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\chi v_y\Gamma_x)+\frac{\partial}{\partial z}(\chi v_z\Gamma_x)+\chi\left[\Gamma\frac{\partial v_x}{\partial x}+\Gamma_y\frac{\partial v_y}{\partial x}+\Gamma_z\frac{\partial v_z}{\partial x}\right]$$

oder, wenn man berücksichtigt, daß während der Bewegung natürlich die Gleichung:

$$\frac{\partial\chi}{\partial t}+\frac{\partial v_x\chi}{\partial x}+\frac{\partial v_y\chi}{\partial y}+\frac{\partial v_z\chi}{\partial z}=0$$

erfüllt ist, durch leichte Umstellung:

$$\chi\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\frac{\partial\Gamma_x}{\partial t}-v_y\left(\frac{\partial\Gamma_y}{\partial x}-\frac{\partial\Gamma_x}{\partial y}\right)+v_z\left(\frac{\partial\Gamma_x}{\partial z}-\frac{\partial\Gamma_z}{\partial x}\right)\right].$$

Da diese Kraft als die von dem System nach außen hin ausgeübte zu verstehen ist, so befindet sich dieselbe auch dem Vorzeichen nach mit dem Ansatz (1) oder (3) der Elektronentheorie in Uebereinstimmung.

Hiermit ist das gesamte System der Lorentz-Wiechert'schen Elektrodynamik aus dem Variationsprinzipe (D) abgeleitet.

Zur Elektrodynamik. II.

Die elementare elektrodynamische Kraft.

Von

K. Schwarzschild.

Vorgelegt in der Sitzung am 16. Mai 1903 von F. Klein.

§ 1. Während in meiner vorigen Note eine möglichst bündige Zusammenfassung der Elektronentheorie in eine einzige Formel angestrebt wurde, soll hier nach der entgegengesetzten Richtung vorgegangen und ohne Rücksicht auf die verwickelte Gestalt der entstehenden Ausdrücke explizit die Kraft angegeben werden, welche eine beliebig bewegte elektrische Punktladung auf eine andere ebensolche ausübt.

Man braucht zu diesem Zweck nur noch einen kleinen Schritt über Herrn Wiechert's Untersuchungen „Ueber elektrodynamische Elementargesetze", (Annalen der Physik, 4. Folge, Bd. 4) hinauszugehen.

Die gesamte Kraft, welche das durch die elektrische Kraft K und die magnetische H bestimmte Feld auf eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Ladung e ausübt, hat in der Lorentz-Wiechert'schen Elektrodynamik den Betrag $e.F$ wobei:

$$1) \qquad F_x = K_x - v_y H_z + v_z H_y$$

ist (die Lichtgeschwindigkeit gleich 1 gesetzt).

Elektrische und magnetische Kraft lassen sich mit Hülfe eines skalaren Potentials Φ und eines Vektorpotentials Γ ausdrücken in der Form:

$$2) \qquad K_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{\partial \Gamma_x}{dt}, \qquad H_z = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x}.$$

Herr Wiechert leitet nun (l. c. pag. 682) für die Potentiale Φ und Γ, welche die mit der Geschwindigkeit v bewegte Punktladung e in einem anderen Punkte e' zur Zeit t' erzeugt, die Ausdrücke ab:

$$3)\quad \Phi = e\left(\frac{1}{r(1-v\cos(v,r))}\right)_{t=t'-r},\qquad \Gamma_s = e\left(\frac{v_s}{r(1-v\cos(v,r))}\right)_{t=t'-r}.$$

Die Entfernung r zwischen e und e' ist in diesen Formeln in dem Sinne (e, e') zu nehmen (umgekehrt wie bei Herrn Wiechert). Die in Klammer gesetzten Ausdrücke sind, wie durch den Zusatz $t = t'-r$ angedeutet, für eine um die Lichtzeit vor t' zurückliegende Epoche zu bilden.

Will man aus Φ und den Γ nach (1) und (2) die mechanische Kraft selbst berechnen, welche eine Punktladung e auf eine andere e' ausübt, so hat man nichts anderes zu thun als nach der Zeit t' und den Coordinaten von e' zu differenzieren. Das ist aber deshalb nicht ganz einfach, weil mit dem Ort von e' sich auch die Lichtzeit und damit Ort und Geschwindigkeit von e ändern. Man kläre sich die Verhältnisse auf folgende Weise.

Die Coordinaten von e', welche bei den Differentiationen als unabhängige Variable zu betrachten sind, seien x', y', z', die Coordinaten von e zu irgend einer Zeit t seien $x(t), y(t), z(t)$. Es ist dann:

$$4)\qquad r^2 = (x'-x(t))^2+(y'-y(t))^2+(z'-z(t))^2$$

und es kommt für die Wirkung auf e' nur diejenige frühere Lage von e in Betracht, für welche gilt:

$$5)\qquad t = t'-r.$$

Ist die frühere Bewegung von e, wie das vorauszusetzen ist, bekannt und vorgeschrieben, sodaß x, y, z gegebene Funktionen von t sind, so ist das eine Bedingung für t, aus der sich t als Funktion von t', x', y', z' darstellen läßt.

Ich treffe nun folgende Festsetzung: Alle Funktionen von x', y', z', t', t sollen mit einem Querstrich versehen werden, wenn sie als abhängig von diesen 5 selbstständig gedachten Variabeln zu betrachten sind. Der Querstrich fällt fort, wenn in der ursprünglichen Darstellung t eliminiert und durch die aus (5) hervorgehende Funktion von x', y', z', t' ersetzt ist. Bei der Berechnung der Kraft nach (1), (2) sind die Funktionen natürlich in letzterem Sinne verstanden, also ohne Querstrich zu lassen.

Es gilt für jede beliebige Funktion f:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial t'} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}$$

und es ist nach (5):

6) $$\frac{\partial t}{\partial t'} = \frac{1}{1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}}, \qquad \frac{\partial t}{\partial x'} = -\frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}}{1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}}.$$

Ferner lassen sich Φ und Γ in der Form schreiben:

7) $$\Phi = \frac{e}{\bar{r}\left(1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)}, \qquad \Gamma_x = \frac{\partial x}{\partial t}\cdot\Phi.$$

Auch sei noch vorausbemerkt, daß:

8) $$\tfrac{1}{2}\frac{\partial \bar{r}^2}{\partial x'} = x' - \bar{x}(t), \qquad \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2(\bar{r}^2)}{\partial x'\partial t} = -\frac{\partial \bar{x}}{\partial t} \quad \text{ist.}$$

§ 2. Berechnung der elektrischen Kraft. Die elektrische Kraft im Punkte $x'y'z'$ zur Zeit t' wird gegeben durch:

$$K_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x'} - \frac{\partial \Gamma_x}{\partial t'}.$$

In der eben eingeführten Bezeichnungsweise folgt:

9) $$-K_x = \frac{\partial t}{\partial t'}\left\{\frac{\partial\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\cdot\bar{\Phi}\right)}{\partial t} + \frac{1}{\frac{\partial t}{\partial t'}}\left(\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x'}\right)\right\}$$

und unter Benutzung von (6), (7), (8):

$$K_x = -\frac{1}{1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}}\,Q_x$$

$$Q_x = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\bar{\Phi}}{2}\cdot\frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial x'\partial t}\right) + \left(1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t},$$

was sich umsetzen läßt in:

$$Q_x = \frac{\partial}{\partial x'}\left\{\bar{\Phi}\left(1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}\right)\right\} - \frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{\Phi}\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial x'\partial t}\right)\right\}.$$

Da

$$\frac{1}{\Phi} = \bar{r} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial t}, \qquad -\frac{1}{\Phi^2}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial x'\partial t}$$

ist, so folgt leicht:

A)
$$K_x = -\frac{1}{1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}} \frac{\partial P}{\partial x'}$$

B)
$$P = \frac{1}{\bar{r}} + \frac{1}{\bar{\Phi}} \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t} = \frac{1}{\bar{r}} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial t^2}}{1+\frac{\partial \bar{r}}{\partial t}}.$$

Es ist damit die elektrische Kraft auf eine Art von Potential P zurückgeführt. Drückt man die Differentialquotienten von r nach t direkt durch die Componenten der Geschwindigkeit $v_x v_y v_z$ und der Beschleunigung $w_x w_y w_z$ von e zur Zeit t aus, so erhält man:

10)
$$P = \frac{1-v_x^2-v_y^2-v_z^2+w_x(x'-x)+w_y(y'-y)+w_z(z'-z)}{r-v_x(x'-x)-v_y(y'-y)-v_z(z'-z)} = \frac{1-v^2+rw\cos(rw)}{r(1-v\cos(rv))},$$

durch Differentiation nach x' folgt:

$$K_x = -\frac{w_x}{r[1-v\cos(rv)]^2} + \frac{1-v^2+rw\cos(rw)}{r^2[1-v\cos(rv)]^3}\left(\frac{x'-x}{r} - v_x\right).$$

Hieraus liest man folgendes ab. Die von e im Punkt $x'y'z'$ erregte elektrische Kraft setzt sich aus drei Teilen zusammen:

aus einer Kraft in Richtung der Verbindungslinie:

$$K_1 = \frac{ee'}{r^2} \cdot \frac{1-v^2+rw\cos(rw)}{[1-v\cos(rv)]^3}$$

aus einer Kraft in Richtung der Geschwindigkeit v von e:

$$K_2 = -v \cdot K_1$$

und aus einer Kraft in Richtung der Beschleunigung w von e:

$$K_3 = -\frac{ee'}{r} \cdot \frac{w}{[1-v\cos(rv)]^2}.$$

Es braucht kaum wiederholt zu werden, daß hier unter v und w die Geschwindigkeit und Beschleunigung von e in dem Momente zu verstehen sind, in welchem die Lichtwelle von e ausgeht.

§ 3. Berechnung der magnetischen und der mechanischen Kraft. Während die explizite Darstellung der elektrischen Kraft sich als ziemlich verwickelt herausgestellt hat, erweist es sich als sehr leicht, sobald einmal die elektrische Kraft berechnet ist, daraus die magnetische und die mechanische Kraft abzuleiten.

Man findet zunächst für die magnetische Kraft:

$$H_z = \frac{\partial \Gamma_x}{\partial y'} - \frac{\partial \Gamma_y}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\Phi\right) - \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\Phi\right)$$

$$= \frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y'} - \frac{\partial \bar{y}}{\partial t}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} + \frac{\partial t}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\bar{\Phi}\right) - \frac{\partial t}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}\bar{\Phi}\right).$$

Berücksichtigt man die oben abgeleiteten Formeln:

$$-\frac{1}{\bar{\Phi}^2}\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'} + \tfrac{1}{2}\frac{\partial^2 \bar{r}^2}{\partial x' \partial t} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'} - \frac{\partial \bar{x}}{\partial t},$$

$$\frac{\partial t}{\partial x'} = -\frac{\dfrac{\partial \bar{r}}{\partial x'}}{1 + \dfrac{\partial \bar{r}}{\partial t}} = -\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}\frac{\partial t}{\partial t'}$$

und die entsprechenden für die andern Coordinaten gültigen, so erhält man:

$$H_z = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}\left\{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y'} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial t}\bar{\Phi}\right)\right\} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y'}\left\{\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x'} + \frac{\partial t}{\partial t'}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial t}\Phi'\right)\right\}$$

oder in Rücksicht auf den Ausdruck (9) der elektrischen Kraft:

$$H_z = \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}\left\{-K_y - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}\frac{\partial \bar{r}}{\partial y'}\frac{\partial t}{\partial t'}\right\} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial y'}\left\{-K_x - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial t}\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}\frac{\partial t}{\partial t'}\right\},$$

mithin schließlich:

C) $$H_z = \frac{\partial \bar{r}}{\partial y'}K_x - \frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}K_y.$$

Da die Differentialquotienten $\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}$ u. s. w. einfach die Richtungscosinus von r bedeuten, so läßt sich dieses Resultat in Worten so aussprechen:

„Die magnetische Kraft steht senkrecht auf dem Radiusvektor und der elektrischen Kraft und hat den Betrag:

$$H = K \sin (K, r)^{\alpha}.$$

Die mechanische Kraft, welche die mit der Geschwindigkeit v' bewegte Elektricitätsmenge e' erfährt, setzt sich nach (1) zusammen aus der elektrischen Kraft und einer Zusatzkraft, welche senkrecht auf der magnetischen Kraft und v' steht und den Betrag $Hv' \sin (H, v')$ hat. Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, daß infolge des eben gefundenen Zusammenhangs zwischen K und H diese Zusatzkraft in die Ebene (K, r) fallen muß und den Betrag hat:

$$Kv' \sin(K, r) \cos(v', [K, r]).$$

Das läßt sich so in Worte fassen: „Die mechanische Kraft, welche eine Ladung e auf eine andre Ladung e' ausübt, die sich mit der Geschwindigkeit v' bewegt, setzt sich zusammen aus der elektrischen Kraft K, die e am Orte von e' erzeugt, und einer Zusatzkraft. Die Zusatzkraft liegt in der durch die Richtung der elektrischen Kraft und der Verbindungslinie r von e und e' bestimmten Ebene senkrecht zu v' und hat den Betrag

$$Ku' \sin(K, r),$$

wo u' die Projektion von v' auf diese Ebene bedeutet".

Von den beiden hiernach noch möglichen Richtungen der Zusatzkraft ist diejenige zu wählen, welche von u' aus im Drehungssinne K, r liegt.

Es ist ein prinzipiell interessantes Ergebnis, daß die Elementarkraft zwischen zwei Punktladungen hiernach insofern im Rahmen der übrigen Mechanik bleibt, als sie sich nur von den ersten und zweiten Derivierten der Coordinaten nach der Zeit abhängig erweist. Allerdings handelt es sich dabei um die Werte dieser Größen für zwei verschiedene Zeiten, nämlich um die Geschwindigkeit und Beschleunigung des erregenden Elektrons im Momente des Ausgangs der Kraftwelle, um die Geschwindigkeit der getroffenen Ladung im Momente, wo sie von der Welle eingeholt wird. Die Bewegungsgleichungen für ein System von Punktladungen sind daher als Differentialgleichungen wiederum nur von der zweiten Ordnung, ihre Schwierigkeit liegt darin, daß sie zu gleicher Zeit Funktionalgleichungen sind.

§ 4. Andere Darstellung der mechanischen Kraft.

Setzt man den Wert (C) der magnetischen Kraft in den Ausdruck (1) der mechanischen Kraft (in welchem die Componenten von v mit einem Accent zu versehen sind, da es sich um die Wirkung auf e' handelt) ein und benutzt für die elektrische Kraft die oben gefundene Darstellung (A), (B), so erhält man für die mechanische Kraft den Wert:

$$F = -\frac{1 - v' \cos(rv')}{1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}} \cdot \frac{\partial P}{\partial x'} + \frac{\frac{\partial \bar{r}}{\partial x'}}{1 + \frac{\partial \bar{r}}{\partial t}} \left(v'_x \frac{\partial P}{\partial x_1} + v'_y \frac{\partial P}{\partial y_1} + v'_z \frac{\partial P}{\partial z_1} \right).$$

Man führe als neue Variable die Coordinaten des Punktes ein, in welchem sich e' beim Ausgehen der Welle von e befunden hätte, wenn es die ganze Zeit über bereits die Geschwindigkeit v' gehabt hätte. Dieselben werden gegeben durch:

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= x' - v_x' \bar{r} \\ \mathfrak{y} &= y' - v_y' \bar{r} \qquad \bar{r} = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2} \\ \mathfrak{z} &= z' - v_z'. \end{aligned}$$

Es folgt für irgend eine Funktion f von $x'y'z'$:

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} - \frac{\partial \bar{r}}{\partial x_1}\left(v_x' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + v_y' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + v_z' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}\right)$$

$$v_x' \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z' \frac{\partial f}{\partial z'} = (1 - v' \cos(rv'))\left(v_x' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{x}} + v_y' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{y}} + v_z' \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{z}}\right).$$

Das giebt auf F_x angewandt:

D) $$F_x = -\frac{1 - v' \cos(rv')}{1 - v \cos(rv)} \cdot \frac{\partial P}{\partial \mathfrak{x}},$$

wonach also auch die gesamte mechanische Kraft nach Abtrennung eines geeigneten Faktors noch durch Differentiation des oben angegebenen Potentiales P nach den neuen Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ gewonnen werden kann.

§ 5. Erster Specialfall. Zwei mit gleichförmiger, gleicher und gleich gerichteter Geschwindigkeit bewegte Ladungen.

Wir halten uns hier am besten an die letzte Darstellungsart (D) der mechanischen Kraft. Ist $v = v'$, so folgt:

$$F_x = -\frac{\partial P}{\partial \mathfrak{x}}.$$

Es ergiebt sich also sofort, daß die mechanische Kraft in diesem Falle ein Potential hat. Legt man zur Vereinfachung die x-Axe in die gemeinsame Bewegungsrichtung, so ist der Wert des Potentials nach (10):

$$P = \frac{1 - v^2}{r - v(x'-x)}.$$

Die Einführung der Variabeln $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ an Stelle von $x'y'z'$ liefert durch eine einfache Rechnung:

$$P = \frac{1 - v^2}{\sqrt{(\mathfrak{x}-x)^2 + [(\mathfrak{y}-y)^2 + (\mathfrak{z}-z)^2](1 - v^2)}}.$$

Man befindet sich hiermit auf dem Boden bekannter Sätze über die Kräfte, welche elektrische Ladungen bei einer gemeinsamen gleichförmigen Translation auf einander ausüben.

§ 6. Zweiter Specialfall. Mechanische Kraft einer gleichförmig bewegten auf eine beliebig bewegte Ladung. Wenn die Beschleunigung w der erregenden Ladung e verschwindet, so wird das Potential P:

$$P = \frac{1-v^2}{r - v_x(x'-x) - v_y(y'-y) - v_z(z'-z)}$$

und es folgt für die elektrische Kraft nach § 2:

$$K_x = \frac{1-v^2}{r^3[1-v\cos(rv)]^3}[x'-x-v_x r].$$

Setzt man:

$$\xi = x'-x-v_x r \qquad r^2 = (x'-x)^2+(y'-y)^2+(z'-z)^2$$
$$\eta = y'-y-v_y r$$
$$\zeta = z'-z-v_z r \qquad \varrho^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2,$$

so sind ξ, η, ζ Relativkoordinaten von e' bezogen auf die gleichzeitige Stellung von e, ϱ ist die wirkliche Distanz beider Ladungen, beides gültig für den Moment des Eintreffens der Welle in e'. Eliminiert man $x'y'z'$ mit Hülfe von ξ, η, ζ, so erhält man:

$$K_x = \frac{1-v^2}{[1-v^2\sin^2(v\varrho)]^{3/2}} \cdot \frac{\xi}{\varrho^3}.$$

Daraus folgt: „Die elektrische Kraft ist nach dem *gleichzeitigen* Ort der erregenden Ladung hin gerichtet und hat den Betrag:

$$K = \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{1-v^2}{[1-v^2\sin^2(v\varrho)]^{3/2}}“.$$

Um die mechanische Zusatzkraft zu finden, beachte man, daß das Dreieck zwischen den Lagen von e und e' beim Eintreffen der Welle und der Lage von e beim Ausgang der Welle die Seiten r, ϱ und $r.v$ hat und daß daher die Gleichung gilt:

$$r\sin(r,\varrho) = r\sin(r,K) = r.v\sin(v,\varrho)$$

oder

$$\sin(r,K) = v\sin(v,\varrho).$$

Damit folgt nach § 3 für die Zusatzkraft:

Die Zusatzkraft liegt in der Ebene, welche die Verbindungslinie von e und e' und die Geschwindigkeit v von e enthält, senk-

recht zur Geschwindigkeit v' von e' und hat den Betrag:

$$\frac{1-v^2}{[1-v^2\sin^2(v\varrho)]^{3/2}}\cdot\frac{v.v'}{\varrho^2}\sin(v,\varrho)\cos(v'[\varrho,v]).$$

Es erinnert diese Formel unmittelbar an das Graßmann'sche Elementargesetz der älteren Elektrodynamik und man kann in der That unser Resultat exakt so aussprechen:

„Man erhält die mechanische Kraft, welche eine gleichförmig bewegte Ladung auf eine andere beliebig bewegte ausübt, indem man die gewöhnliche Coulomb'sche elektrostatische Kraft und die Graßmann'sche Elementarkraft addiert und die resultierende Gesamtkraft mit dem Correktionsfaktor

$$\frac{1-v^2}{[1-v^2\sin^2(v\varrho)]^{3/2}}$$

multipliziert, wobei v die Geschwindigkeit der erregenden Ladung, ϱ die Verbindungslinie der beiden Ladungen ist“[1]).

Es muß bemerkt werden, daß diese Regel wohl auf das Studium der Bewegung von einzelnen Elektronen anzuwenden ist, daß aber in einem geschlossenen elektrischen Strom schon wegen der Krümmung der Strombahn die Beschleunigung nicht gegenüber der Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. Man darf also hieraus nicht etwa ableiten wollen, daß der obige Correktionsfaktor an die alten Induktionsgesetze für geschlossene Ströme anzubringen sei.

§ 7. Dritter Specialfall. Feld in großer Entfernung von der erregenden Ladung.

Das Potential P, aus dem in § 2 die elektrische Kraft abgeleitet wurde, hat nach (10) den Betrag:

$$P=\frac{1-v^2}{r(1-v\cos(rv))}+\frac{w\cos(rw)}{1-v\cos(rv)}.$$

Für hinreichend große Entfernung von der erregenden Ladung ver-

1) In dem im Druck befindlichen Referat über elektrodynamische Elementargesetze (Encyclopädie der mathemat. Wissenschaften, Bd. V, 12) von Reif und Sommerfeld betont Herr Sommerfeld die nahe Verwandschaft zwischen der Elektronentheorie und dem älteren Clausius'schen Potentialgesetz, sowie dem Graßmann'schen Elementargesetz. Seine Anschauung wird durch § 1 meiner vorigen Note, sowie durch § 3 und 6 der gegenwärtigen durchaus bestätigt und zugleich präzisiert.

schwindet, wenn nicht grade w genau Null ist, der erste Teil von P gegen den zweiten, es bleibt allein der von der Beschleunigung w abhängige Teil übrig:

$$P = \frac{w \cos(rw)}{1 - v \cos(rv)}.$$

Da derselbe nur noch von der Richtung, aber nicht mehr von der Größe von r abhängt, folgt:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0$$

d. h. in großer Entfernung von der erregenden Ladung steht die elektrische Kraft senkrecht auf dem Radiusvektor. Daraus ergiebt sich unmittelbar nach § 3, daß in großer Entfernung von der erregenden Ladung die magnetische Kraft gleich der elektrischen Kraft ist. Zugleich steht sie senkrecht auf der elektrischen Kraft und dem Radiusvektor.

In großer Entfernung von der erregenden Ladung herrschen also stets (außer bei verschwindender Beschleunigung) die Verhältnisse, die man von den Lichtwellen her gewohnt ist.

Ist die Geschwindigkeit v klein gegen die Lichtgeschwindigkeit, so ergiebt sich als angenäherter Wert des absoluten Betrags der elektrischen und magnetischen Kraft:

$$K = H = \frac{w \sin(wr)}{r}.$$

Man erkennt daraus, wie das schon verschiedentlich angedeutet wurde, daß wir an der Intensität des Lichtes, welches von einem schwingenden Elektron erzeugt wird, nicht das Quadrat seiner Amplitude oder Geschwindigkeit, sondern seiner Beschleunigung beobachten.

Bemerkungen über die Fascien und Venen des männlichen Beckens.

Von

Fr. Merkel.

Vorgelegt in der Sitzung vom 13. Juni 1903.

Ein Referat über die Arbeit von Denonvilliers über die Beckenfascien in Archives générales de méd. vom Jahre 1837 beginnt mit den Worten: „Ungeachtet der Fortschritte, welche in dieser letzten Zeit die chirurgische Anatomie gemacht hat, kann man doch nicht leugnen, daß noch viel Confusion herrscht in der Geschichte der Fascien". Dies könnte heute geschrieben sein; denn es herrscht nur über die Bedeckungen des Diaphragma urogenitale an seiner unteren und oberen Seite eine einheitliche Auffassung, indem allgemein angenommen wird, daß dasselbe auf beiden Seiten von einer kräftigen Bindegewebsmembran bedeckt wird. Die Auskleidung der Fossa ischiorectalis und diejenige des inneren Beckenraumes aber bedarf, wie mir scheint, nach Bau und Function noch weiterer Klarstellung.

Auskleidung der Fossa ischiorectalis. In einer früheren Arbeit[1]) habe ich meine Auffassung von den Fascien im Allgemeinen soweit ausgesprochen, daß ich hier darauf verweisen kann und es sei nur besonders betont, daß jede typische Fettanhäufung im Körper durch eine deutliche die Oberfläche ringsum deckende Membran gegen die Umgebung abgegrenzt wird; dies ist der Fall in der Augenhöhle, am Fettpfropf der Wange, dem Fettpolster des Halses, in der Kniekehle und endlich in der Fossa ischiorectalis. Daß es sich dabei gegebenen Falles nicht um eine Muskelfascie handelt, sondern um die Abgrenzung des Fettes, thut am besten das Verhalten in der Augenhöhle dar, wo die

1) Fr. Merkel, Ueber die Halsfascie. Anatom. Hefte, 1. Heft, p. 77, 1891.

geraden Augenmuskeln, so lange sie außerhalb des Fettes an der Orbitalwand hinlaufen von einem ganz dünnen Perimysium umhüllt werden, welches sofort einer kräftigeren Membran Platz macht, wenn die Muskeln in das Fett eintauchen, um ihren Weg nach dem Bulbus zu nehmen. Die Fossa ischiorectalis nun wird einerseits vom Diaphragma pelvis, anderseits vom M. obturator intern. begrenzt. Ganz vorne, wo beide am vorderen Umfang des Beckenskeletes entspringen, liegen sie ohne das Dazwischentreten von Fett dicht auf einander, dort werden sie auch nur durch ein dünnes Fascienblatt von einander getrennt. Sobald sich aber zwischen beide Fett einschiebt, wird die Haut, welche jede der beiden Muskellagen überzieht, weit kräftiger, als vorher das einfache Fascienblatt war. Die mediale, das Diaphragma pelvis deckende Membran ist jedoch immer dünner, wie die laterale, den M. obturator int. überziehende. Dies hängt damit zusammen, daß in letztere das Bündel des Nervus und der Vasa pudenda eingeschlossen sind; wie am Halse (l. c.) und an allen übrigen analog gebauten Stellen des Körpers, ist auch hier dieses Bündel in eine breite Bindegewebsplatte eingeschlossen, so daß sich also zur Bildung der in Rede stehenden stärkeren Membran drei Gebilde vereinigen: das Perimysium des M. obturator int., die erwähnte Einschlußmembran und die Hülle des Fettkörpers.

Die enge Zusammengehörigkeit der bindegewebigen Grenzmembran mit diesem letzteren zeigt sich darin, daß sie aus den Blättern zusammenfließt, welche seine einzelnen Läppchen von einander trennen. Man wird demnach nicht umhin können, dem Fettkörper der Fossa ischiorectalis eine ausschlaggebende Bedeutung für Anwesenheit und Bau der diese Grube auskleidenden Fascie zuzuschreiben.

Fascia endopelvina[1]). Ganz anders wie die Auskleidung der Fossa ischiorectalis verhält sich der Ueberzug des Binnenraumes des Beckens, obgleich hier, ebenso wie außen, die Bekleidung des Diaphragma pelvis und die des M. obturator internus in Frage kommen. Hier hat man es mit einer entwickelungsgeschichtlich bedeutungsvollen Membran zu thun, nämlich mit dem Ueberzug der inneren Oberfläche der Körperwand, welche sich von Brust und Bauch her in das Becken hinein fortsetzt. In der Brusthöhle führt dieser Ueberzug, wie bekannt, den Namen Fascia endothoracica, in der Bauchhöhle den Namen Fascia endoabdominalis. Er muß deshalb in der Beckenhöhle folgerichtig

1) Fascia pelvis autt.

Fascia endopelvina heißen, nicht Fascia pelvis, wie man ihn gemeinhin zu nennen pflegt. Der Name Fascia endopelvina wird von Langer in seinem Lehrbuch für den Ueberzug der Beckeneingeweide gebraucht, was nur zu Mißverständnissen führen muß und deßhalb abzulehnen sein dürfte.

Wenn ich die Auskleidung des Beckens als eine direkte Fortsetzung von der der Brust und des Bauches ansehe, dann befinde ich mich in Uebereinstimmung mit Luschka[1]), welcher sagt, daß die Beckenfascie mit der Fascia endothoracica und endoabdominalis vergleichbar sei und mit Waldeyer[2]), welcher direkt ausspricht, daß die Fascia pelvis als der untere blindsackartige Theil der großen Fascia endoabdominalis aufgefaßt werden könne. Diese einheitliche Auffassung ist allerdings keineswegs allgemein angenommen. Der eingangs erwähnte Denonvilliers[3]), welcher über die Beckenfascie eine viel benutzte Abhandlung geschrieben hat, sagt, daß sie hergestellt werde durch die Verbindung der Fascien von vier Muskeln, nämlich der des Obturator internus, Piriformis, Ischiococcygeus und Levator ani. Testut[4]) reproduciert noch 1901 diese Darstellung wörtlich. Holl[5]) sagt in seiner Abhandlung über den in Rede stehenden Gegenstand: „Mit peinlicher Genauigkeit wird ein Muskel von dem andern durch eine Fascie getrennt, und selbst die Theile eines einheitlich erscheinenden Muskels werden, wenn die einzelnen Theile selbstständige Anordnungen aufweisen, durch, wenn auch oft dünnste Membranen von einander geschieden". Er schließt daraus weiter: „da sowohl die Fascia obturatoria, als auch die obere Fascie des Diaphragma proprium selbständige einheitliche Muskelfascien darstellen, so geht es nicht an, Theilstücke von ihnen zusammenzubringen und diese mit einer anderen besonderen, einem Eingeweide zugehörigen Fascie (Fascia visceralis s. pubosacralis) als eine einheitliche „„Beckenfascie, Fascia pelvis"" hinzustellen und an derselben eine Pars parietalis und visceralis zu unterscheiden"[6]). Auch der

---

1) H. Luschka, Die Anatomie des Menschen. II. Bd. 2. Abth.: Das Becken. Tübingen 1864. p. 409.

2) W. Waldeyer, Das Becken. Bonn 1899. p. 620.

3) Ch. P. Denonvilliers, Propositions et observations d'anatomie, de physiol. et de pathol. Thèse de Paris 1837. Das Original ist mir nicht zugänglich; ich citire nach Richet, Traité pratique d'Anat. médico-chir. Paris 1857. p. 645 ff.

4) L. Testut, Traité d'anatom. hum. 4. Éd. T. IV. Paris 1901. p. 777.

5) M. Holl, Die Muskeln und Fascien des Beckenausganges in Bardeleben, Handbuch der Anat. d. Menschen. VII. Bd. 2. Thl. 2. Abth. Jena 1897.

6) Die gesperrten Worte sind auch im Original gesperrt gedruckt.

neueste Bearbeiter der Beckenfascie, Thompson[1]) unterscheidet scharf Fascien, welche Muskeln überziehen und solche, welche Eingeweide decken. So sehr ich auch mit der Anschauung übereinstimme, daß man die Bedeckung der Eingeweide des Beckens nicht mit der der Wand desselben zusammenwerfen darf, so kann ich mich doch mit der von der Selbstständigkeit des Fascienüberzuges jedes einzelnen Muskels nicht überzeugen, es scheint mir vielmehr, als ließe sich der Beweis für die Einheitlichkeit der Fascia endopelvina (Fascia pelvis autt.) sehr wohl erbringen. Von Bedeutung ist dabei die von Waldeyer (l. c. p. 622) mit Recht hervorgehobene topographische Lage der Nerven und Gefäße, wenn er sagt „daß die Muskeln und spinalen Nerven nach außen von der Beckenfascie gelegen seien, die Gefäße und die sympathischen Nerven nach innen zwischen ihr und dem Bauchfell"; sie ist dieselbe, wie in der Bauchhöhle. Lesshaft[2]) ist gewiß nicht im Recht, wenn er meint, daß die Fascia pelvis die Vasa hypogastrica umfasse. In zweiter Linie ist zu bemerken, daß der M. piriformis und die zwischen seinen Ansätzen austretenden Wurzeln des Plexus sacralis gemeinsam von der Fascie überzogen werden, und daß nicht etwa die einzelnen Zacken dieses Muskels, jede für sich einen besonderen Ueberzug erhält, was doch wohl der Fall sein würde, wenn es sich um eine dem Muskel ganz speciell zugehörige Fascie handelte. Vor dem M. piriformis, wo die Beckenfascie die Muskulatur des Diaphragma pelvis überzieht, geht sie ebenfalls glatt über dieselbe hinweg und senkt sich nicht etwa in die oft sehr breiten Spalten ein, welche nicht selten zwischen den einzelnen Theilen der Musculatur bleiben; in sie dringt nur ein äußerst dünnes, schleierartiges Perimysium vor. Man mag die Präparation einrichten, wie man will, man wird immer eine Membran bekommen, welche sich, die unterliegenden Theile einheitlich und gleichmäßig deckend, über die ganze Innenwand des Beckens hinweg, bis zur Durchtrittsstelle der Eingeweiderohre hin erstreckt.

Die Hüllen, welche die Eingeweide überziehen, sind nicht als Fortsetzungen dieser Fascie aufzufassen, wie es rein dogmatisch meist geschieht; ich bin, wie schon gesagt, in diesem Punkt mit Holl ganz einverstanden. Sie sind den kapselartigen Ueberzügen

1) Peter Thompson, On the Arrangement of the Fasciae of the Pelvis and their Relationship to the levator ani. The Journal of Anat. and Phys. Vol. XXXV S. 127. 1901.

2) P. Lesshaft, Ueber einige die Urethra umgebende Muskeln und Fascien. Arch. f. Anat. und Physiol. Jahrg. 1873. p. 68.

anderer Eingeweide, etwa der Niere, an die Seite zu stellen. Diese Hülle ist an der Blase mehr oder weniger fetthaltig und von deren Muskulatur nicht deutlich abgesetzt, ihre Elemente dringen vielmehr zwischen die Muskelbündel der Blasenwand ein. Samenbläschen und Samenleiter sind für sich in eine besondere fibröse Platte eingeschlossen und der Mastdarm wird von einer dünnen Adventitia umgeben, welche mit seiner Muskulatur in innigem Zusammenhang steht. Außerdem wird das Rectum vorn und hinten noch von je einer kräftigen Bindegewebsplatte umschlossen. Die hintere ist die Fortsetzung der Membranen, welche die Gefäße umhüllen — von ihnen wird noch die Rede sein —, die vordere entsteht aus der Verwachsung der beiden auf einander liegenden Platten des Bauchfelles, welche die beim Fötus außerordentlich tiefe Excavatio rectovesicalis auskleiden; die Membran wurde zuerst von Denonvilliers beschrieben. Cunéo et Veau[1]) haben ihre Bedeutung richtig erkannt und schon vor ihnen hat O. Zuckerkandl[2]) in der Platte gelegentlich abgesackte Hohlräume gefunden, an welchen die Lichtung selbst bei Erwachsenen noch erhalten war, was darauf hindeutet, daß die sonst vollständige Obliteration der beiden Platten in solchen Fällen unvollständig geblieben ist. Die beiden Membranen von verschiedener Bedeutung, welche das Rectum einschließen, verlieren sich seitlich in dem Bindegewebe in der Umgebung der Gefäße.

Die Fascia endopelvina ist durchaus keine ganz gleichmäßige Membran, sondern sie enthält noch Züge eingewebt, welche durch das Verhalten der benachbarten Theile hervorgerufen werden. Dies kann in keiner Weise verwundern. Erstens findet man die Löcher für den Austritt der das Becken verlassenden Gefäße von sehnigen Fasern umrandet, zweitens findet man den bekannten Sehnenbogen, von welchem die Fasern des Diaphragma pelvis entspringen und drittens ist der Arcus tendineus fasciae endopelvinae (pelvis) vorhanden. Dieser, wie P. Thompson (l. c.) feststellt, eine dem Menschen speciell angehörige Einrichtung, ist in einem wesentlichen Theil seiner Bedeutung bisher gar nicht erkannt. Er entspringt vorne neben der Symphyse als Lig. puboprostaticum. Die in sich geschlossene Fasermasse dieses Bandes strahlt nach hinten fächerförmig auseinander, sodaß ein Theil, medianwärts ziehend,

---

1) B. Cunéo et V. Veau, De la signification morph. des aponévroses périvésicales. Journ. de l'anatomie et de la physiol. T. 35. 1899. p. 235.

2) O. Zuckerkandl, Beiträge zur Lehre von den Brüchen im Bereich des Douglas'schen Raumes. Deutsche Zeitschr. f. Chirurgie. Bd. 31. 1891. p. 590.

die Blase erreicht, ein anderer lateralwärts sich in der Fascia endopelvina verbreitet, während die in der Mitte verlaufenden Fasern zwischen Blase und Fascie nach hinten ziehen und sich schließlich an den Venen des Plexus prostatico-vesicalis festheften.

Man pflegt nun anzunehmen, daß der Arcus tendineus fasciae endopelvinae ein Fixationsapparat für die Harnblase sei; damit ist jedoch seine Bedeutung keineswegs erschöpft, welche im Wesentlichen vielmehr in seiner Wirkung auf die Bewegung des Venenblutes besteht. Die Beckenvenen laufen erst unter ihm weg in einem dreiseitig prismatischen Raum, welcher medianwärts von der Prostata und dem untersten Theil der Blase, lateralwärts von der Beckenfascie und dem Diaphragma pelvis begrenzt wird, während sich die Fasern des Sehnenbogens der Länge nach über ihn hinspannen. Von ihm nach unten ausstrahlende Platten und Balken treten zwischen die Venen hinein und verbinden sich mit deren Wand. Schon Lenhossék[1]) macht auf sie aufmerksam; auch Holl[2]) hat zweifellos diese Gebilde gesehen, doch deutet er sie als absteigendes Blatt seiner Fascia visceralis. Wie bekannt, setzen sich kräftige Züge der Blasenmuskulatur am Lig. puboprostaticum und dem Sehnenbogen fest; sie sind sehr geeignet, an beiden einen Zug auszuüben und dadurch erweiternd auf die mit ihnen in Verbindung stehenden Venen zu wirken, das heißt also auf die neben der Prostata liegenden Plexus und auf deren Fortsetzung nach hinten, an welche sich wie gesagt, die ausstrahlenden Fasern des Arcus tendineus anheften.

Die Regulirung des Blutlaufes in den Plexus des Urogenitalsystemes ist jedoch nicht auf die in Rede stehende Einrichtung beschränkt, sie beginnt schon weiter vorne. Holl (l. c. p. 240, 243) theilt mit, daß sich Fasern des M. sphincter urethrae membranaceae mit feinen elastischen Sehnen an den Wänden des Plexus pudendalis ansetzen und man wird wohl kaum annehmen können, daß die zarte Venenwand als Fixpunkt dient, von welchem aus die Muskelfasern wirken, sondern man wird umgekehrt glauben müssen, daß diese die Wand der Venen bewegen und ihr Lumen erweitern. Auch weiterhin fehlen solche Muskeleinrichtungen nicht. Bochdalek[3]) beschreibt Muskelfasern, welche zwischen die

1) J. von Lenhossék, Das venöse Convolut der Beckenhöhle beim Mann. Wien 1871. p. 6, 9.

2) Holl l. c.

3) V. A. Bochdalek, Ergebnisse über einen bis jetzt übersehenen Theil des Erectionsapparates des Penis und der Clitoris. Prager Vierteljahrschrift für die praktische Heilkunde. XI. Jahrg. 1854. p. 117.

einzelnen Venen des Plexus prostatico-vesicalis in seiner ganzen Länge eindringen und sich an deren Wänden anheften, sie kommen von den Ligg. puboprostatica und der Fascie des Beckens. Auch sie dürften wohl erweiternd auf die Venen wirken, nicht verengend, wie Bochdalek meint.

Mit den letzten Anheftungen der Fasern des Arcus tendineus an den Venen des Plexus pudendo-vesicalis sind jedoch die Einrichtungen noch nicht erschöpft, welche eine Beförderung des Blutlaufes in den Venen bezwecken, diese erstrecken sich vielmehr bis zur Linea terminalis aufwärts und umfassen die sämmtlichen von den Eingeweiden herkommenden Gefäße. Man hat sie in Bindegewebsplatten zu sehen, welche von den großen Gefäßstämmen ausgehen und sich an der Außenseite des Bauchfells ansetzen. Die Venen des Rectums und des Urogenitalapparates sind fest in sie eingeschlossen und müssen alle ihre Bewegungen mitmachen; diese Bewegungen aber sind sehr mannigfaltige und es werden mit den Füllungszuständen der Eingeweide und mit dem Druck der Bauchpresse die Platten bald gespannt, bald erschlafft werden müssen, wodurch sich die in ihnen eingeschlossenen Venen bald füllen, bald entleeren. Die letzte Bindegewebsplatte setzt sich an den Stamm der Vena hypogastrica selbst an, sie wird von Luschka[1]) beschrieben und abgebildet. Die Arterien sind weniger fest mit diesen Bindegewebsplatten verbunden und die Nerven verlaufen in förmlichen Kanälen derselben.

Außer den Venen sind auch die Lymphgefäße und Lymphdrüsen ganz fest in dieses Bindegewebe eingelassen, so daß für sie das Gleiche gilt, wie für die Venen.

1) H. Luschka, Die Fascia pelvina in ihrem Verhalten zur hinteren Beckenwand. Wiener Sitzungsber. 35. Bd. 1859.

Berichtigung

zu der Arbeit von W. Kaufmann: Ueber die elektromagnetische Masse der Elektronen.

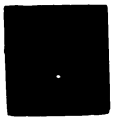
Auf Seite 96 füge in Gl. 15 den Faktor $\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ hinzu.

„ „ 102 Zeile 17 von oben, muß es heißen: 1,885 (statt 1,845).

„ „ 102 „ 20 „ oben, „ „ „ 6 % (statt 4 %).

„ „ 102 ersetze die drei letzten Zeilen durch:

die Platten 19 und 18, die weitaus das klarste und fehlerfreieste Bild zeigen, auch Werte für $\frac{\varepsilon}{\mu_0}$ liefern, die dem Kathodenstrahlwert bis auf etwa 4,5 % nahe kommen. (Die beiliegende Figur ist



Meisenbach Riffarth & Co. Berlin

Ueber nahezu gesättigten Strom in einem von zwei koncentrischen Kugeln begrenzten Luftraume.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung d. K. G. vom 27. Juni 1903.

In einem Aufsatze „Ueber die Zerstreuung der Elektricität in abgeschlossenen Räumen“ [1]), habe ich den Fall einer nahezu gesättigten Strömung in dem Hohlraume zwischen zwei koncentrischen Kugeln behandelt. Die positive elektrostatische Ladung der inneren Kugel wurde mit e bezeichnet; die elektrische Feldstärke sei $\mathfrak{E}$, die räumliche Dichte der positiven Ionen $\overset{+}{N}$, die der negativen $\overline{N}$, die Dichte der elektrischen Strömung $\mathfrak{c}$. Unter U und V sind die absoluten Beweglichkeiten der Ionen unter $\overset{+}{k}$ und $\bar{k}$ ihre Diffusionskoëfficienten verstanden; r bezeichnet den Abstand irgend eines Punktes von dem Mittelpunkte der Kugeln, r_i den Halbmesser der inneren, r_a den der äußeren Kugel. ε ist das elektrische Elementarquantum, v die Lichtgeschwindigkeit, q die Ionisierungsstärke, α der Koëfficient der Wiedervereinigung.

Die Gleichungen, auf welche das Problem führt, sind folgende:

$$\overset{+}{N}-\bar{N}=\frac{div\,\mathfrak{E}}{4\pi\varepsilon},$$

I)
$$\varepsilon v(U\overset{+}{N}+V\bar{N})\,\mathfrak{E}=\mathfrak{c}+\varepsilon\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}),$$

$$v\,U\,div(\overset{+}{N}\mathfrak{E})=q-\alpha\overset{+}{N}\bar{N}+\overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N},$$

$$-v\,V\,div(\bar{N}\mathfrak{E})=q-\alpha\overset{+}{N}\bar{N}+\bar{k}\Delta\bar{N}.$$

1) Nachr. d. Ges. d. Wiss. 1903. Math.-phys. Kl. Heft 1.

Vernachlässigt man den Einfluss der Wiedervereinigung und den Einfluß der Diffusion, so erhält man Sättigungsstrom und es wird:

$$\overset{+}{N}_0 = \frac{q}{3\nu U}\cdot\frac{r}{\mathfrak{E}_0}\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right),\quad \bar{N}_0 = \frac{q}{3\nu V}\frac{r}{\mathfrak{E}_0}\left(\frac{r_a^3}{r^3}-1\right).$$

Diese Werthe werden in den Gleichungen I für $\overset{+}{N}$ und $\overset{-}{N}$ in den Gliedern benützt, die mit α oder mit den Diffusionskoëfficienten multipliciert sind. Dann ergeben sich die Gleichungen:

$$\mathfrak{E}^2 = \frac{4\pi\varepsilon q}{9}\frac{U+V}{\nu UV}r^3+\frac{\Phi_1}{r}+\frac{\Phi_4}{r^4},$$

$$\Phi_1 = -\frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int r^2\overset{+}{N}_0\bar{N}_0 dr+\frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int r^2\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr,$$

$$\Phi_4 = \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int r^5\overset{+}{N}_0\bar{N}_0 dr-\frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int r^5\Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr,$$

$$\overset{+}{N}\mathfrak{E} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)}+\frac{q}{3\nu U}r+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)$$
$$+\frac{3}{8\pi\varepsilon}\frac{V}{U+V}\frac{\Phi_1}{r^2},$$

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{c}{\varepsilon\nu(U+V)}-\frac{q}{3\nu V}r+\frac{1}{\nu(U+V)}\frac{d}{dr}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_0-\bar{k}\bar{N}_0)$$
$$-\frac{3}{8\pi\varepsilon}\cdot\frac{U}{U+V}\cdot\frac{\Phi_1}{r^2}.$$

Die in Φ_1 und Φ_4 auftretenden Integrationskonstanten müssen durch die Grenzbedingungen bestimmt werden.

Eine davon besteht jedenfalls darin, daß an der Oberfläche der inneren Kugel

II) $$\mathfrak{E}_i = \frac{e}{r_i^2}$$

sein muß.

Als zweite Grenzbedingung habe ich in dem früheren Aufsatze die Annahme benützt, daß an der Oberfläche der inneren Kugel die Dichte der positiven Ionen gleich Null sei, ebenso wie im Falle des Sättigungsstromes. Diese Annahme trifft aber nur näherungsweise zu, und es erscheint daher richtig, sie nicht zu benützen.

Wenn die Dichte der positiven Ionen an der Oberfläche der inneren Kugel nicht verschwindet, so tritt allerdings die Möglichkeit der Ionenadsorption ein. Von einer Berücksichtigung dieser Wirkung sehen wir aber bei der ganzen Untersuchung ab.

Eine einwandsfreie zweite Grenzbedingung ergiebt sich, wenn wir berücksichtigen, daß nach den von uns gemachten Annahmen die ganze Elektricitätsabgabe an die innere Kugel durch die negativen Ionen besorgt wird. Es folgt daraus für die Oberfläche der inneren Kugel die zweite Bedingung:

$$\text{III)} \qquad \varepsilon \nu V (\bar{N}\mathfrak{E})_i = c_i - \varepsilon \bar{k} \left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_i.$$

Aus den Bedingungsgleichungen II und III folgt:

$$\Phi_1' = -\frac{8\pi r_i^3 c_i}{3\nu V} - \frac{8\pi\varepsilon q(U+V)}{9\nu UV} r_i^3 + \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu} r_i^3 \frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\right]_i,$$

$$\Phi_4' = e^4 + \frac{8\pi\nu_i^5 c_i}{3\nu V} + \frac{4\pi\varepsilon q(U+V)}{9\nu UV} r_i^5 - \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu} r_i^5 \frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\left[\frac{d}{dr}(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\right]_i;$$

die Werthe weichen von den in dem früheren Aufsatze angegebenen in den von $\overset{+}{N}_0$ abhängenden Theilen der Diffusionsglieder ab.

Die Funktionen Φ_1 und Φ_4 selber werden, ebenso wie früher:

$$\Phi_1 = \Phi_1' - \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int_{r_i}^{r} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0 dr + \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int_{r_i}^{r} r^3 \Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr,$$

$$\Phi_4 = \Phi_4' + \frac{8}{3}\pi\varepsilon\alpha\frac{U+V}{\nu UV}\int_{r_i}^{r} r^5 \overset{+}{N}_0 \bar{N}\,dr - \frac{8\pi\varepsilon}{3\nu}\frac{\overset{+}{k}+\bar{k}}{U+V}\int_{r_i}^{r} r^5 \Delta(\overset{+}{N}_0+\bar{N}_0)\,dr.$$

Benützen wir diese Werthe zur Berechnung von $\overset{+}{N}\mathfrak{E}$ und von $\bar{N}\mathfrak{E}$, so ergiebt sich:

$$\overset{+}{N}\mathfrak{E} = \frac{q}{3\nu U} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) - \frac{\alpha}{\nu U}\frac{1}{r^3}\int_{r_i}^{r} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\,dr + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr},$$

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon\nu V}\frac{r_i^3 c_i}{r^3} - \frac{q}{3\nu V} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) + \frac{\alpha}{\nu V r^3}\int_{r_i}^{r} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\,dr - \frac{\bar{k}}{\nu V}\frac{d\bar{N}_0}{dr}.$$

Wir wenden uns nun zu der Verwerthung der Gleichungen:

$$\nu U\, div(\overset{+}{N}\mathfrak{E}) = q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N} + \overset{+}{k}\Delta\overset{+}{N}$$

und

$$-\nu V div(\bar{N}\mathfrak{E}) = q - \alpha \overset{+}{N}\bar{N} + \bar{k}\Delta\bar{N}.$$

Die erste ergiebt, über das Volumen Ω des Hohlraumes integriert:

$$\nu U\int_i^a div(\overset{+}{N}\mathfrak{E})\,dv = q\Omega - \alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv + \overset{+}{k}\int_i^a \Delta\overset{+}{N}\,dv,$$

oder

$$-4\pi r_i^2 \nu U\overset{+}{N}_i\mathfrak{E}_i + 4\pi r_a^2 \nu U\overset{+}{N}_a\mathfrak{E}_a = q\Omega - \alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv$$

$$-4\pi r_i^2\overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i + 4\pi r_a^2\overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_a.$$

Nun ist:

$$\nu U(\overset{+}{N}\mathfrak{E})_i = \overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}}{dr}\right)_i,$$

somit:

$$\varepsilon\, 4\pi r_a^2\left\{\nu U\overset{+}{N}_a\mathfrak{E}_a - \overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_a\right\} = \varepsilon q\Omega - \varepsilon\alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv.$$

Der auf der linken Seite stehende Ausdruck stellt den ganzen Betrag der elektrischen Strömung durch die äußere Kugelfläche dar; bezeichnen wir diese durch $\mathfrak{E}$, so ergiebt sich:

IV) $$\mathfrak{E} = \varepsilon q\Omega - \varepsilon\alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv.$$

Die Gleichung enthält keine von der Diffusion abhängende Glieder.

Die Integration der Gleichung

$$-\nu V div(\bar{N}\mathfrak{E}) = q - \alpha\overset{+}{N}\overset{+}{N} + \bar{k}\Delta\bar{N}$$

giebt:

$$4\pi r_a^2\varepsilon\nu V\bar{N}_a\mathfrak{E}_a = 4\pi r_i^2 c_i - \varepsilon q\Omega + \varepsilon\alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv$$

$$-4\pi r_a^2\varepsilon\bar{k}\left(\frac{d\bar{N}}{dr}\right)_a;$$

Es ist aber:

$$4\pi r_i^2 c_i = \varepsilon q\Omega - \varepsilon\alpha\int_i^a \overset{+}{N}_0\bar{N}_0\,dv.$$

somit:

$$\nu U\bar{N}_a\mathfrak{E}_a = -\bar{k}\left(\frac{d\bar{N}}{dr}\right)_a.$$

Mit Hülfe von Gleichung IV läßt sich auch der für $\bar{N}\mathfrak{E}$ gefundene Ausdruck auf eine einfachere Form bringen. Wir schreiben:

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon\nu V}\frac{r_i^3 c_i}{r^3} - \frac{q}{3\nu V} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) + \frac{\alpha}{\nu V}\frac{1}{r^3}\int_{r_i}^{r_a} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\, dr$$

$$- \frac{\alpha}{\nu V r^3}\int_r^{r_a} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\, dr - \frac{\bar{k}}{\nu V}\frac{d\bar{N}_0}{dr}.$$

Gleichung IV giebt:

$$\frac{\alpha}{\nu V}\cdot\frac{1}{r^3}\int_{r_i}^{r_a} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\, dr = -\frac{1}{\varepsilon\nu V}\frac{r_i^3 c_i}{r^3} + \frac{q}{3\nu V} r\left(\frac{r_a^3}{r^3} - \frac{r_i^3}{r^3}\right).$$

Aus der Addition beider Gleichungen folgt:

$$\bar{N}\mathfrak{E} = \frac{q}{3\nu V} r\left(\frac{r_a^3}{r^3} - 1\right) - \frac{\alpha}{\nu V}\frac{1}{r^3}\int_r^{r_a} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\, dr - \frac{\bar{k}}{\nu V}\frac{d\bar{N}_0}{dr},$$

ganz analog mit: V)

$$\overset{+}{N}\mathfrak{E} = \frac{q}{3\nu U} r\left(1-\frac{r_i^3}{r^3}\right) - \frac{\alpha}{\nu U}\frac{1}{r^3}\int_{r_i}^{r} r^3 \overset{+}{N}_0 \bar{N}_0\, dr + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\cdot\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}.$$

Die Gleichungen sind etwas einfacher, als die mit Hülfe der früheren, nur näherungsweise geltenden Grenzbedingung erhaltenen.

Für $r = r_i$ wird:

$$(\overset{+}{N}\mathfrak{E})_i = \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)_i.$$

Daß dieser Werth klein ist, ergiebt sich einmal aus der Kleinheit des Faktors $\frac{\overset{+}{k}}{\nu U}$; überdieß zeigt der Verlauf der für $\overset{+}{N}_0$ in dem früheren Aufsatze mitgetheilten Kurven, daß auch $\left(\frac{d\overset{+}{N}_0}{dr}\right)$ für $r = r_i$ nur einen kleinen Werth hat. Es ergiebt sich also in der That, daß man die bei der früheren Rechnung benützte Grenzbedingung nahezu, aber nicht streng, als erfüllt betrachten kann. Eine etwas größere Abweichung von dem Werthe Null tritt an der äußeren Kugelfläche ein:

$$(\bar{N}\mathfrak{E})_a = -\frac{\bar{k}}{\nu V}\left(\frac{d\bar{N}_0}{dr}\right)_a.$$

Was die numerischen Werthe anbelangt, die in der früheren Arbeit berechnet worden sind, so werden sie durch die Anwendung der verbesserten Formeln nur unwesentlich verändert. Es erklärt

sich dieß dadurch, daß die Abweichungen in Gliedern liegen, die von der Diffusion abhängen; in dem früher behandelten Falle tritt aber der Einfluß der Diffusion gegen den der Wiedervereinigung zurück. In der Figur, welche der früheren Mittheilung beigegeben ist, würden die ausgezogenen Kurven den verbesserten Formeln entsprechend parallel mit sich selber ein wenig nach oben zu verschieben sein.

Zur Theorie des Lichtes für active Krystalle.

Von

W. Voigt.

Vorgelegt in der Sitzung vom 26. Juni 1903.

Obwohl die optischen Eigenschaften der natürlich-activen Krystalle (insbesondere solcher mit einer 3-, 4- oder 6-zähligen Symmetrieaxe) auf experimentellem und theoretischem Wege überaus oft untersucht worden sind, können die bisher erzielten Resultate als völlig befriedigend kaum gelten. Die Beobachtungen beziehen sich factisch nur auf einen Theil der fraglichen Erscheinungen, nämlich auf die, welche bei Fortpflanzungsrichtungen nahe der optischen Axe stattfinden, und sind demgemäß für gewisse Fragen überhaupt nicht entscheidend. Die älteren theoretischen Ansätze, die an jenen Beobachtungen geprüft und untereinander nahezu aequivalent befunden sind[1]), können der neueren electromagnetischen Theorie gegenüber nicht aufrecht erhalten werden.

Ein Versuch, von den modernen Grundlagen aus die Gleichungen für die natürlich activen Körper zu gewinnen, findet sich u. a. in dem ausgezeichneten Lehrbuch der Optik von Drude[2]), und der ebenda gegebene Nachweis, daß sich die Dispersion der Drehung quantitativ aus derjenigen der Fortpflanzung berechnen läßt[3]), bezeichnet unzweifelhaft einen bedeutenden Fortschritt.

Trotzdem sind gegen das Drude'sche Erklärungssystem meines Erachtens zwei wesentliche Einwendungen zu machen. Einerseits enthält es (wie auch die meisten der älteren Theorien) die

---

1) Siehe insbesondere die großen Beobachtungsreihen von F. Beaulard (Thèses prés. à la Fac. des Sciences de Paris, 1893).

2) P. Drude, Lehrbuch der Optik. Leipzig 1900, p. 368 u. f.

3) l. c. p. 381.

durch die Symmetrieverhältnisse keineswegs verlangte Reduction der Erscheinungen der Activität auf nur eine characteristische Constante, also eine bedenkliche Specialisirung, über deren Berechtigung die Beobachtung zu entscheiden hat und, wie sich zeigen wird, factisch entscheiden kann; andererseits steht es im Widerspruch mit der Energiegleichung, wie dieselbe in der Electrodynamik formulirt ist, nämlich mit der Forderung, daß für einen beliebigen Raum die einströmende Energie entweder unvermindert wieder ausströmt oder aber durch Absorption vernichtet, d. h. in eine andere als electromagnetische Form übergeführt wird. Der Nachweis hierfür ergiebt sich später.

In beiden Richtungen unterscheidet sich von dem Drude'schen Ansatz der etwas früher von mir vorgeschlagene [1]). Trotz dieser Differenz stimmen die Folgerungen beider Ansätze für die bisher ausschließlich mit der Theorie verglichenen Erscheinungen merklich überein, und es bedarf einer neuen Beobachtungsart, um die Entscheidung zwischen ihnen zu geben.

Ich werde im Nachstehenden zunächst die wichtigsten Gesetze aus einem Ansatz entwickeln, der sowohl das Drude'sche, wie das von mir vorgeschlagene Erklärungssystem umfaßt und deutlich die Gebiete kennzeichnet, auf denen sie aequivalent sind oder sich widersprechen. Dann werde ich eine der Erscheinungen der letzteren Art näher untersuchen und schließlich über Beobachtungen berichten, die meines Erachtens die Entscheidung zwischen den beiden Theorieen liefern.

1) Die optischen Gleichungen für enantiomorphe Krystalle mit einer Hauptaxe.

Die Grundgleichungen der electromagnetischen Lichttheorie für ein gewöhnliches krystallinisches Medium mit einer ausgezeichneten Z-Axe lauten bekanntlich in der gegenwärtig adoptirten Form folgendermaßen:

$$1) \qquad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \ldots;$$

$$2) \qquad \frac{\partial A}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \ldots;$$

$$3) \qquad \mathfrak{X} = X + \Sigma \mathfrak{X}_h, \ldots \qquad h = 1, 2, \ldots n;$$

---

1) W. Voigt, Wied. Ann **69**, p. 307, 1899.

$$4)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} &= e_h X, \\ \mathfrak{Y}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} &= e_h Y, \\ \mathfrak{Z}_h + a'_h \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b'_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} &= e'_h Z; \end{aligned}$$

hierin bezeichnet, wenn man die Komponenten einer Vectorgröße dieser selbst in Klammer zufügt,

$R(A, B, C)$ die magnetische Feldstärke,

$K(X, Y, Z)$ die electrische Feldstärke,

$\mathfrak{K}_h(\mathfrak{X}_h, \mathfrak{Y}_h, \mathfrak{Z}_h)$ die electrischen Polarisationen der einzelnen Molekelgattungen,

$\mathfrak{K}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z})$ die electrische Gesammtpolarisation;

v ist die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raum, $a_h, b_h, e_h, a'_h, b'_h, e_h$ sind der Substanz individuelle Parameter.

Um mit diesen Gleichungen die Eigenschaften einaxiger enantiomorpher Krystalle darzustellen, wie solche durch eine 3-, 4-, 6-zählige Symmetrieaxe normal zu einer 2-zähligen bei fehlendem Symmetriecentrum characterisirt sind, bedürfen dieselben einer Erweiterung, welche den speciellen Symmetrieverhältnissen dieser Körper Rechnung trägt, und welche man zunächst an den Formeln (4) anbringen wird, da diese bereits der Substanz individuelle Parameter enthalten.

Mit den Symmetrieen der Krystallgruppen ohne Symmetriecentrum ist allgemein vereinbar das Auftreten polarer und axialer Vectorcomponenten in additiver Verbindung, das bei Vorhandensein eines Symmetriecentrums unmöglich wird[1]). Bei den betrachteten enantiomorphen Krystallen können dabei die beiderseitigen Componenten, die mit $\mathfrak{P}_x, \mathfrak{P}_y, \mathfrak{P}_z$ und $\mathfrak{A}_x, \mathfrak{A}_y, \mathfrak{A}_z$ bezeichnet werden mögen, nur in den Verbindungen

$$\mathfrak{P}_x + k\mathfrak{A}_x,\ \mathfrak{P}_y + k\mathfrak{A}_y,\ \mathfrak{P}_z + k'\mathfrak{A}_z$$

auftreten, wobei k und k' Constanten sind.

Von axialen Componenten kommen in unserm Fall in erster Linie die zwei Tripel

1) S. z. B. W. Voigt, Kompendium Bd. II, S. 801, Leipzig 1896.

$$A,\ B,\ C,$$

d. h. die magnetischen Feldcomponenten, und

$$\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y},\ \frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z},\ \frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x},$$

d. h. die Wirbelstärken des electrischen Feldes in Betracht. Die ersteren Größen direct in die Formeln (4) einzuführen verbietet sich aus mehreren Gründen. Einerseits würden dann die Gleichungen einen Einfluß eines constanten magnetischen Feldes auf statische electrische Vorgänge fordern, der nicht beobachtet und nach den modernen Vorstellungen auch nicht wahrscheinlich ist. Andererseits würden die sich ergebenden optischen Gesetze nicht der Erfahrung entsprechen. Somit wird man dazu gedrängt, Differentialquotienten der A, B, C nach der Zeit einzuführen und wird versuchsweise erste Differentialquotienten benutzen.

Diese Erwägungen führen also auf die Hinzufügung der Glieder

5) $$d_h\frac{\partial A}{\partial t},\ d_h\frac{\partial B}{\partial t},\ d_h'\frac{\partial C}{\partial t}$$

— unter d_h und d_h' Constanten verstanden — zu den linken Seiten von (4); hierfür kann nach (2) auch

6) $$vd_h\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right),\ vd_h\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right),\ vd_h'\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)$$

gesetzt werden, wodurch die Wirbelstärken des electrischen Feldes eingeführt sind. Diese (von Herrn Drude in der Specialisirung $d_h = d_h'$ eingeführte) Ergänzung liefert eine sehr vollkommene Erklärung der Erscheinungen der natürlichen Circularpolarisation. Sie hat indessen, wie schon oben bemerkt, den Uebelstand, daß das veränderte Formelsystem sich nicht mehr allgemein der Gleichung der Energie fügt; in der That: faßt man die Formeln (1) mit den Factoren X, Y, Z, die Formeln (2) mit A, B, C, die Formeln (4) mit $\partial\mathfrak{X}_h/e_h\partial t$, $\partial\mathfrak{Y}_h/e_h\partial t$, $\partial\mathfrak{Z}_h/e_h'\partial t$ zusammen, addirt alles, und integrirt über ein beliebiges Volumen k, so tritt neben dem Raumintegral, welches die Zunahme der electromagnetischen Energie von k darstellt, der Ausdruck

7) $$+\int\sum_h\left[\frac{d_h}{e_h}\left(\frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial\mathfrak{X}_h}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial t}\frac{\partial\mathfrak{Y}_h}{\partial t}\right)+\frac{d_h'}{e_h'}\frac{\partial C}{\partial t}\frac{\partial\mathfrak{Z}_h}{\partial t}\right]dk$$

auf, der sich weder der Energie, noch der gegen die Widerstände

geleisteten Arbeit verbinden läßt, auch je nach Umständen bald positiv, bald negativ sein kann.

Nach der Bedeutung, die gegenwärtig die Energiegleichung besitzt, wird man in diesem Widerspruch ein Anzeichen dafür sehen, daß die Ergänzung der Grundgleichungen durch Einfügung der Glieder (5) in (4) unvollständig ist, und man wird sie so zu erweitern suchen, daß der Widerspruch verschwindet. Dies gelingt[1]), indem man zu den linken Seiten der Formeln (2) die Ausdrücke

$$8) \qquad \sum_h \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2}, \quad \sum_h \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2}, \quad \sum_h \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2}$$

hinzufügt, oder, anders ausgedrückt, das System (2) ersetzt durch

$$9) \qquad \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \quad \cdots,$$

worin $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$, die Componenten einer magnetischen Polarisation $\mathfrak{R}$, gegeben sind durch

$$10) \qquad \begin{gathered} \mathfrak{A} = A + \sum_h \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t}, \quad \mathfrak{B} = B + \sum_h \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t}, \\ \mathfrak{C} = C + \sum_h \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t}. \end{gathered}$$

Die Ergänzungsglieder (8) bringen in der Energiegleichung zu dem Integral (7) das weitere

$$+ \int \left[A \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + B \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + C \sum \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} \right] dk,$$

das sich ersichtlich mit (7) zu dem Differentialquotienten von

$$11) \qquad \int \sum \left[\frac{d_h}{e_h} \left(A \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + B \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} \right) + \frac{d'_h}{e'_h} C \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} \right] dk$$

verbindet; letzteres Glied stellt sonach einen Antheil der electromagnetischen Energie des Raumes dar, und die gewünschte Form der Energiegleichung ist erhalten.

Es ist von Interesse, daß die zuvor (d. h. in der Drude'schen Theorie) gleichwerthigen Ergänzungsglieder (5) und (6) bei Einführung der besprochenen Zusätze, welche zur Erfüllung der Energiegleichung dienen, einander ungleichwerthig werden. Das

1) W. Voigt, Wied. Ann. 69, 307. 1899.

System (6) wird mit der Energiegleichung verträglich, wenn man zu den rechten Seiten der Gleichungen (1) die Glieder fügt

$$12) \qquad \begin{aligned} &v \sum_h \left(\frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t \partial z} - \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t \partial y} \right), \\ &v \sum_h \left(\frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t \partial x} - \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t \partial z} \right), \\ &v \sum_h \frac{d_h}{e_h} \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t \partial x} \right). \end{aligned}$$

Bei Zusammenfassung mit den Factoren X, Y, Z und Integration über k liefern diese Zusatzglieder, combinirt mit den in $\partial \mathfrak{X}_h / e_h dt$, $\partial \mathfrak{Y}_h / e_h \partial t$, $\partial \mathfrak{Z}_h / e'_h \partial t$ multiplicirten Gliedern (6), falls n die Richtung der inneren Normalen bezeichnet, in der Energiegleichung nach einfacher Umformung den Term

$$13) \qquad \begin{aligned} v \int ds \Big[&\cos(n,x) \left(Y \sum \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} - Z \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} \right) \\ &+ \cos(n,y) \left(Z \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} - X \sum \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} \right) \\ &+ \cos(n,z) \left(X \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} - Y \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} \right) \Big]; \end{aligned}$$

dies Oberflächenintegral stellt eine Ergänzung der Poyntingschen Energieströmung dar, — der ergänzte Ansatz fügt sich also naturgemäß der Energiegleichung.

In ihren Resultaten sind die beiden Erklärungssysteme, die durch die Ergänzungsglieder (5) und (8) resp. durch (6) und (12) gegeben sind, einander in vielen Hinsichten gleichwerthig; jedenfalls gestatten die vorliegenden Beobachtungen nicht, zwischen ihnen zu entscheiden. Den Vorzug größerer Einfachheit hat das erstere System, zumal es für den Energiestrom den alten Poynting' schen Ausdruck liefert. Dies letztere stimmt einmal mit den modernen Anschauungen, die den Energietransport durchaus von dem Aether vermittelt annehmen; andererseits gestattet es, für die Grenzbedingungen die gebräuchliche Form beizubehalten, welche den stetigen Durchgang der tangentialen Componenten des electrischen und des magnetischen Feldes verlangt. Denn wenn das Aggregat $AY - BX$ den Energiestrom parallel zur Z-Axe mißt, so ergiebt die Stetigkeit von A, B, X, Y ohne Weiteres die Erhaltung der Energie bei dem Vorgang der Reflexion und Brechung. Diese Ueberlegungen dürften die Bevorzugung des ersten Erklärungssystemes genügend begründen.

Des Versuches einer physikalischen Deutung der Ergänzungsglieder (5) und (8) enthalte ich mich. Eine solche hat nach meiner Auffassung nur dann objectiven Werth, wenn sie, wie die classische Lorentz'sche Ableitung der Gesetze der magneto-optischen Wirkungen, verschiedenartige Erscheinungen quantitativ verknüpft. Ein subjectiver Werth kann einer Hypothese eigen sein, wenn dieselbe wirklich die Ableitung einer Gleichung ermöglicht hat. Aber in der Optik sind die hauptsächlichen Gleichungen fast ausschließlich als „Erklärungssysteme" direct aus den Beobachtungen geschlossen und haben sich mit den verschiedensten Vorstellungen vereinbar erwiesen; so hat also eine physikalische Deutung höchstens als Veranschaulichung der Formeln einen Werth. Ueberdies ist zu beachten, daß die für die Dispersion maßgebenden Glieder der Formeln (4) bisher aus den modernen electrodynamischen Vorstellungen noch nicht oder nur unbefriedigend abgeleitet sind, und daß eine Deutung der Zusatzglieder, die letztere nicht mit anderen Erscheinungen in Zusammenhang bringt, um nicht ganz in der Luft zu stehen doch wenigstens eine Beziehung zu den übrigen in den Formeln (4) vorkommenden Gliedern aufdecken müßte.

Selbstverständlich ist die Ableitung eines Gleichungssystemes aus bloßen Symmetrie- und Energiebetrachtungen nicht völlig befriedigend; aber sie ist vollkommen klar, operirt mit scharfbegrenzten Annahmen und präjudicirt eine Behandlung der Aufgabe auf Grund specieller Vorstellungen, wie sie das Wünschenswertheste ist und gewiß dermaleinst gelingen wird, in keiner Weise. Unter den jetzigen Umständen halte ich sie für das Angemessenste.

2) Folgerungen für die Fortpflanzung ebener Wellen.

Indem wir uns jetzt zur Entwickelung der optischen Grundgesetze für natürlich-active Krystalle mit einer ausgezeichneten Axe wenden, wollen wir, um den Unterschied des neuen Ansatzes von dem Drude'schen deutlich hervortreten zu lassen, die Constanten d_h und d_h' der Glieder (8) von denen der Glieder (5) durch einen darüber gesetzten Strich unterscheiden. Unsere Gleichungen nehmen sonach die Gestalt an

14) $$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \cdots;$$

15) $$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \Sigma \frac{\overline{d}_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right), \cdots;$$

16) $$\mathfrak{X} = X + \Sigma \mathfrak{X}_h, \cdots;$$

$$17) \qquad \mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + d_h \frac{\partial A}{\partial t} = e_h X, \ \cdots$$

Der Uebergang zu dem Drude'schen Ansatz wird durch die Beziehungen

$$18) \qquad d_h = d_h', \ \overline{d_h} = 0, \ \overline{d_h'} = 0,$$

der zu dem meinigen durch die Beziehungen

$$19) \qquad d_h = \overline{d_h}, \ d_h' = \overline{d_h'}$$

bewirkt. Die Verfügung $\overline{d_h} = 0$, $\overline{d_h'} = 0$ allein würde die Drude'sche Theorie zweiconstantig machen, aber ihren Widerspruch mit der Energiegleichung bestehen lassen. Ich werde sie aber in ihren Consequenzen nicht verfolgen.

Für Schwingungen mit der Periode $\tau = 2\pi\vartheta$, die in ebenen Wellen stattfinden, liefern diese Formeln bei Benutzung complexer Lösungen, falls die Wellennormale die Richtungscosinus $\alpha, 0, \gamma$ besitzt, also in der XZ-Ebene liegt:

$$20) \qquad \mathfrak{X} = v\gamma B, \ \mathfrak{Y} = v\,(\alpha C - \gamma A), \ \mathfrak{Z} = -v\alpha B,$$

$$\mathfrak{A} = A + \frac{i}{\vartheta} \sum \frac{\overline{d_h} \mathfrak{X}_h}{e_h} = -v\gamma Y,$$

$$21) \qquad \mathfrak{B} = B + \frac{i}{\vartheta} \sum \frac{\overline{d_h} \mathfrak{Y}_h}{e_h} = -v(\alpha Z - \gamma X),$$

$$\mathfrak{C} = C + \frac{i}{\vartheta} \sum \frac{\overline{d_h'} \mathfrak{Z}_h}{e_h'} = +v\alpha Y;$$

$$\mathfrak{X}_h D_h + \frac{iA}{\vartheta} d_h = e_h X,$$

$$22) \qquad \mathfrak{Y}_h D_h + \frac{iB}{\vartheta} d_h = e_h Y, \ D_h = 1 + \frac{i a_h}{\vartheta} - \frac{b_h}{\vartheta^2}$$

$$\mathfrak{Z}_h D_h' - \frac{iC}{\vartheta} d_h' = e_h' Z, \ D_h' = 1 + \frac{i a_h'}{\vartheta} - \frac{b_h'}{\vartheta}.$$

hierin bezeichet v den (im allgemeinen complexen) Brechungsindex.

Beschränkt man sich weiterhin auf Glieder von der ersten Ordnung in Bezug auf die d_h und d_h', so kann man in (22) die Ausdrücke für A, B, C, in (21) diejenigen für $\mathfrak{X}_h, \mathfrak{Y}_h, \mathfrak{Z}_h$ einsetzen, die sich resp. aus (21) und (22) unter Beseitigung der in

d_h und d'_h multiplicirten Glieder ergeben. So erhält man aus (21) und (22) in erster Annäherung

$$\mathfrak{A} = A + iX\bar{\delta} = -\nu\gamma Y,$$

23) $$\mathfrak{B} = B + iY\bar{\delta} = -\nu(\alpha Z - \gamma X),$$

$$\mathfrak{C} = C + iZ\bar{\delta}' = +\nu\alpha Y,$$

wobei

$$\frac{1}{\vartheta}\sum\frac{\bar{d}_h}{D_h} = \bar{\delta}, \quad \frac{1}{\vartheta}\sum\frac{\bar{d}'_h}{D'_h} = \bar{\delta}'$$

gesetzt ist, und

$$\mathfrak{x}_h D_h = e_h X + \frac{i\nu\gamma}{\vartheta} Y d_h,$$

24) $$\mathfrak{y}_h D_h = e_h Y + \frac{i\nu}{\vartheta}(\alpha Z - \gamma X) d_h,$$

$$\mathfrak{z}_h D'_h = e'_h Z - \frac{i\nu\alpha}{\vartheta} Y d'_h;$$

Für die Gesammtpolarisationen resultirt so nach (16) und (24)

$$\mathfrak{x} = X\Delta + i\nu\gamma Y\delta,$$

25) $$\mathfrak{y} = Y\Delta + i\nu(\alpha Z - \gamma X)\delta,$$

$$\mathfrak{z} = Z\Delta' - i\nu\alpha Y\delta',$$

wobei gilt

$$\frac{1}{\vartheta}\sum\frac{d_h}{D_h} = \delta, \quad \frac{1}{\vartheta}\sum\frac{d'_h}{D'_h} = \delta',$$

$$1 + \sum\frac{e_h}{D_h} = \Delta, \quad 1 + \sum\frac{e'_h}{D'_h} = \Delta'.$$

Aus (20) und (25) läßt sich unmittelbar $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, und aus dem Ergebniß mit Hülfe von (23) A, B, C eliminiren. Das Resultat lautet

$$X(\Delta - \nu^2\gamma^2) + Yi\nu\gamma(\delta + \bar{\delta}) + Z\nu^2\alpha\gamma = 0,$$

26) $$-Xi\nu\gamma(\delta + \bar{\delta}) + Y(\Delta - \nu^2) + Zi\nu\alpha(\delta + \bar{\delta}') = 0,$$

$$X\nu^2\alpha\gamma - Yi\nu\alpha(\bar{\delta} + \delta') + Z(\Delta' - \nu^2\alpha^2) = 0.$$

Führt man hierin die Beziehungen (18) oder (19) ein, um von dem allgemeinen zu den in Frage stehenden speciellen An-

sätzen zu gelangen, so bemerkt man, daß der Habitus des Gleichungssystems in beiden Fällen durchaus übereinstimmt; insbesondere werden beide Male die zur Diagonale symmetrischen die d enthaltenden Coefficienten einander entgegengesetzt gleich. Hiermit hängt zusammen, daß beide Formelsysteme qualitativ übereinstimmende Folgerungen ergeben, und quantitative Unterschiede allein dadurch bedingt sind, daß der Drude'sche Ansatz in den betreffenden Gleichungen nur eine Constante läßt, der meinige deren zwei. Es wird sich zeigen, daß diese Differenz bei den meisten Beobachtungsarten überdies garnicht zur Geltung gelangt.

Das System (26) ergiebt durch Elimination von $X : Y : Z$ die Gleichung für den complexen Brechungsindex ν in der Form

$$\begin{aligned}
&(\Delta - \nu^2)(\Delta\Delta' - \nu^2(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta')) \\
&= \nu^2\alpha^2(\delta' + \bar{\delta})(\delta + \bar{\delta}')(\Delta - \nu^2\gamma^2) \\
&+ \nu^2\gamma^2(\delta + \bar{\delta})^2(\Delta' - \nu^2\alpha^2) \\
&+ \nu^4\alpha^2\gamma^2(\delta + \bar{\delta})(\delta + \bar{\delta}' + \bar{\delta} + \delta').
\end{aligned} \tag{27}$$

In Gebieten geringer Absorption sind in den, allgemein complexen, Ausdrücken Δ und Δ' die imaginären Antheile unmerklich; die complexen Brechungsindices ν werden dann mit den reellen n identisch. Die Verhältnisse der Componenten X, Y, Z bleiben dabei im allgemeinen complex, werden aber in speciellen Fällen reell oder rein imaginär. Die Anwendungen der Formeln beziehen sich fast ausschließlich auf diesen speciellen Fall; doch wollen wir, da die Formeln durch seine Voraussetzung nicht einfacher werden, im Allgemeinen über die Natur von Δ und Δ' keine Annahme machen. Einer allgemeineren Discussion schicken wir die Besprechung zweier wichtiger specieller Fälle voraus.

3) Zwei specielle Fälle.

Für die Richtung parallel der Hauptaxe Z ($\gamma = 1$, $\alpha = 0$) geben die allgemeinen Formeln (26)

$$\begin{aligned}
X_l &= +iY_l, \quad \nu_l^2 = \Delta + \nu_l(\delta + \bar{\delta}), \\
X_r &= -iY_r, \quad \nu_r^2 = \Delta - \nu_r(\delta + \bar{\delta});
\end{aligned} \tag{28}$$

die erste Wurzel entspricht einer links-, die zweite einer rechtscircularpolarisirten Welle. Dabei kann man wegen der Kleinheit der δ neben $\sqrt{\Delta}$ in den Formeln für ν^2 rechts ν mit $\sqrt{\Delta}$ vertauschen. Da dem kleineren Brechungsindex (bei mäßiger Absorp-

tion) die größere Geschwindigkeit entspricht, so ist für einen rechts drehenden Krystall $\delta + \bar{\delta}$ positiv.

Der Unterschied zwischen dem Drude'schen und meinem Ansatz besteht hier nur darin, daß nach dem ersteren δ da steht, wo nach dem letzteren 2δ.

In den Richtungen normal zur Hauptaxe, z. B. in der Richtung der X-Achse ($\alpha = 1$, $\gamma = 0$) liefern die letzten beiden Formeln (26)

$$\begin{aligned} Y(\Delta - v^2) + Ziv(\delta + \bar{\delta}') &= 0, \\ -Yiv(\bar{\delta} + \delta') + Z(\Delta' - v^2) &= 0, \end{aligned} \tag{29}$$

und somit im Einklang mit (27)

$$(\Delta - v^2)(\Delta' - v^2) = v^2(\delta + \bar{\delta}')(\bar{\delta} + \delta'). \tag{30}$$

Kann, wie wohl stets, $\Delta - \Delta'$ als groß neben den Producten zweier δ gelten, so folgt hieraus in Annäherung für die beiden durch die Indices λ und ϱ unterschiedenen Wellen

$$\begin{aligned} \Delta - v_\lambda^2 &= \frac{\Delta(\delta + \bar{\delta}')(\bar{\delta} + \delta')}{\Delta' - \Delta}, \\ \Delta' - v_\varrho^2 &= \frac{\Delta'(\delta + \bar{\delta}')(\bar{\delta} + \delta')}{\Delta - \Delta'}, \end{aligned} \tag{31}$$

wobei die Glieder rechts als zweiter Ordnung häufig zu vernachlässigen sind, und bei Benutzung dieser Werthe

$$\frac{Y_\lambda \sqrt{\Delta}(\bar{\delta} + \delta')}{\Delta - \Delta'} = iZ_\lambda, \quad \frac{Z_\varrho \sqrt{\Delta'}(\delta + \bar{\delta}')}{\Delta - \Delta'} = iY_\varrho. \tag{32}$$

In Gebieten schwacher Absorption, wo Δ und Δ' als reell betrachtet werden dürfen, ist Y/Z rein imaginär; die Schwingungsellipsen haben die Y- und Z-Coordinatenaxen zu Hauptaxen und der absolute Werth von Z/iY giebt das Verhältniß der betreffenden Hauptaxen.

Sind außer $\delta + \bar{\delta}$ auch die Klammerausdrücke $\bar{\delta} + \delta'$ und $\delta + \bar{\delta}'$ positiv, so giebt bei gleichfalls positiven $(\Delta - \Delta')$ die erste Formel eine links-, die zweite eine rechts-rotirende elliptische Welle, bei negativem $(\Delta - \Delta')$ gilt das Entgegengesetzte. Der Rotationssinn der schnelleren Welle ist hiernach bei Fortschreitung in der Richtung der Hauptaxe und normal dazu derselbe.

Die Formeln (32) lauten bei der Drude'schen Annahme nach (18)

$$\frac{Y_\lambda \sqrt{\Delta}\,\delta}{\Delta - \Delta'} = iZ_\lambda, \quad \frac{Z_\varrho \sqrt{\Delta'}\,\delta}{\Delta - \Delta'} = iY_\varrho, \tag{33}$$

nach der meinigen

$$34) \qquad \frac{Y_\lambda \sqrt{\Delta}(\delta+\delta')}{\Delta-\Delta'} = iZ_\lambda, \quad \frac{Z_\varrho \sqrt{\Delta'}(\delta+\delta')}{\Delta-\Delta'} = iY_\varrho.$$

Die Axenverhältnisse beider Wellen sind also nach beiden Formen nicht reciprok, sondern ihr Product ist gleich $\sqrt{\Delta/\Delta'}$, was allerdings in praxi sich von Eins nicht merklich unterscheidet. Neben dieser Uebereinstimmung tritt aber ein wichtiger Unterschied hervor. Nach der Drude'schen Theorie läßt sich die Ellipticität einer normal zur Hauptaxe fortschreitenden Welle quantitativ aus der Differenz der Geschwindigkeiten parallel zur Hauptaxe berechnen, nach der meinigen (und anderen zweiconstantigen) nicht. Hier ist also die Möglichkeit einer Entscheidung zwischen beiden Theorien gegeben, auf die weiter unten eingegangen werden soll.

Im Vorstehenden ist der Bequemlichkeit halber ein specieller Fall, nämlich das positive Vorzeichen von $\delta+\bar{\delta}$, $\bar{\delta}+\delta'$, $\delta+\bar{\delta}'$ vorausgesetzt. Die Abänderungen, die in der Discussion eintreten, wenn Anderes stattfindet, sind leicht zu erkennen.

Von Interesse erscheint die Frage, ob Fälle möglich sind, wo die rechtsrotirende Welle parallel der Hauptaxe die schnellere, normal dazu die langsamere ist, und umgekehrt, weil dann für eine Zwischenrichtung die Geschwindigkeiten der rechten und der linken Welle einander gleich werden müßten. Dies kann in der That bei meinem Erklärungssystem dann eintreten, wenn $\delta+\delta'$ entgegengesetztes Zeichen hat wie δ, d. h. δ' entgegengesetztes Zeichen hat wie δ, und dabei absolut größer ist. Ein Krystall, der diesen Bedingungen entspricht, würde sehr sonderbare Erscheinungen zeigen können, die hier aber noch nicht geschildert zu werden brauchen.

4) Angenäherte Gesetze für die Geschwindigkeiten.

Die allgemeine Behandlung der Gleichung (27) ist unbequem. In Bereichen, wo α^2 groß gegen δ ist, kann man in bekannter Weise angenäherte Werthe der beiden Wurzeln für v^2 erhalten, indem man rechts und in dem einen Factor links denjenigen Werth von v^2 einsetzt, der den zweiten Factor zum Verschwinden bringt.

Die so resultirenden Ausdrücke für v^2 sind umständlich und mögen daher nicht angegeben werden, zumal sie bisher geringe Anwendbarkeit besitzen.

Für kleine α, bei denen die meisten Beobachtungen vorgenommen sind, versagt der geschilderte Weg; hier ist es bequem,

in (27) die rechte Seite nach Potenzen von α^2 zu ordnen und durch successive Näherung zu behandeln. Die erste Annäherung besteht darin, daß man die Glieder, welche α^2 und das Product zweier δ als Factoren enthalten, ganz vernachlässigt und in dem mit $(\delta+\bar{\delta})^2$ proportionalen, allein übrig bleibenden Glied für ν^2 den Näherungswerth Δ einsetzt, der $\alpha = 0$ entspricht. So erhält man

35) $$(\Delta-\nu^2)(\Delta\Delta'-\nu^2(\alpha^2\Delta+\gamma^2\Delta')) = \Delta\Delta'(\delta+\bar{\delta})^2,$$

oder bei Einführung der Brechungsindices ν_o, ν_e des Krystalles bei fehlender Activität

36) $$\Delta = \nu_o^2, \quad \frac{\Delta\Delta'}{\alpha^2\Delta+\gamma^2\Delta'} = \nu_e^2,$$

sowie der Differenz der Brechungsindices parallel der ausgezeichneten Axe nach (28)

37) $$(\delta+\bar{\delta})^2 = (\nu_r-\nu_l)^2$$

auch

38) $$(\nu_o^2-\nu^2)(\nu_e^2-\nu^2) = \nu_e^2(\nu_r-\nu_l)^2.$$

Dies giebt für die beiden Wurzeln ν_1 und ν_2

39) $$\begin{aligned}\nu_1^2 &= \tfrac{1}{2}(\nu_o^2+\nu_e^2+\sqrt{(\nu_o^2-\nu_e^2)^2+4\nu_e^2(\nu_r-\nu_l)^2}),\\ \nu_2^2 &= \tfrac{1}{2}(\nu_o^2+\nu_e^2-\sqrt{(\nu_o^2-\nu_e^2)^2+4\nu_e^2(\nu_r-\nu_l)^2}),\end{aligned}$$

woraus auch folgt

40) $$(\nu_1^2-\nu_2^2)^2 = (\nu_o^2-\nu_e^2)^2+4\nu_e^2(\nu_r-\nu_l)^2.$$

Hebt man hier die nur wenig verschiedenen Factoren

$$(\nu_1+\nu_2)^2, \quad (\nu_o+\nu_e)^2, \quad 4\nu_e^2$$

gegen einander hinweg, so ergiebt sich

41) $$(\nu_1-\nu_2)^2 = (\nu_o-\nu_e)^2+(\nu_r-\nu_l)^2.$$

Bei schwacher Absorption, wo die complexen in die reellen Brechungsindices übergehen, nimmt die letzte Formel die Gestalt an

$$(n_1-n_2)^2 = (n_o-n_e)^2+(n_r-n_l)^2.$$

Diese Beziehung ist von Herrn Gouy[1]) aus seiner, übrigens von der vorstehenden durchaus abweichenden, Theorie deducirt und von Herrn Beaulard[2]) in einer ausführlichen Experimentaluntersuchung in großer Annäherung bestätigt worden. Die

1) Gouy, Journ. de Phys. (2) 4, p. 149, 1885.
2) Beaulard, l. c. p. 96 u. f.

Bestätigung überträgt sich natürlich ohne Weiteres auf die hier entwickelte Theorie.

5) Angenäherte Gesetze für die Ellipticitäten.

Die Untersuchung des allgemeinen Gesetzes der Axenverhältnisse wird dadurch besonders complicirt, daß die electrische Kraft, deren Componenten in (26) auftreten, im Allgemeinen nicht transversal schwingt und somit die Ellipticität der beobachtbaren Schwingungen nach dem Verhalten der Polarisationen (die nach (20) und (21) transversal schwingen) beurtheilt werden muß. Die Einführung der electrischen Polarisationen geschieht durch die Beziehungen (25); etwas einfacher und übersichtlicher macht sich die Benutzung der magnetischen Polarisation $\mathfrak{A}(\mathfrak{A},\mathfrak{B},\mathfrak{C})$, für die bei $\beta = 0$ nach (23) die Formeln gelten

$$\mathfrak{A} = -\nu\gamma Y, \quad \mathfrak{B} = -\nu(\alpha Z - \gamma X), \quad \mathfrak{C} = +\nu\alpha Y.$$

Setzen wir

42) $$\nu Y = \mathfrak{P}, \quad \nu X = \gamma\mathfrak{B} + \alpha\mathfrak{D}, \quad \nu Z = -\alpha\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{D},$$

so sind $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{B}$ die transversalen Componenten von $\mathfrak{A}$ parallel und normal zum Meridian, während $\mathfrak{D}, \nu = (X\alpha + Z\gamma)$ die Componente der elektrischen Kraft nach der Wellennormale darstellt. Diese letztere Componente verschwindet bei nicht activen Krystallen zugleich mit der Doppelbrechung, und es kann demgemäß $\mathfrak{D}$ bei den wirklichen Krystallen als klein neben $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}$ gelten. Die Einführung der Werthe (42) liefert aus (26)

$$\gamma\mathfrak{B}(\Delta - \nu^2) + \alpha\Delta\mathfrak{D} = -i\gamma\nu\mathfrak{P}(\vartheta + \bar{\vartheta}),$$

43) $$\mathfrak{P}(\Delta - \nu^2) = i\nu[\mathfrak{B}(\gamma^2(\vartheta + \bar{\vartheta}) + \alpha^2(\vartheta + \bar{\vartheta}')) + \alpha\gamma\mathfrak{D}(\bar{\vartheta} - \bar{\vartheta}')],$$

$$-\alpha\mathfrak{B}(\Delta' - \nu^2) + \gamma\Delta'\mathfrak{D} = i\alpha\nu\mathfrak{P}(\bar{\vartheta} + \vartheta').$$

Eliminirt man aus der ersten und dritten Gleichung $\mathfrak{D}$ und läßt in der zweiten das in $\mathfrak{D}(\bar{\vartheta} - \vartheta')$ multiplicirte Glied als nach dem Gesagten klein von zweiter Ordnung fort, so erhält man

$$\mathfrak{B}(\Delta\Delta' - \nu^2(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta')) = -i\nu\mathfrak{P}(\alpha^2\Delta(\bar{\vartheta} + \vartheta') + \gamma^2\Delta'(\vartheta + \bar{\vartheta})),$$

44)
$$\mathfrak{P}(\Delta - \nu^2) = i\nu\mathfrak{B}(\alpha^2(\vartheta + \bar{\vartheta}') + \gamma^2(\vartheta + \bar{\vartheta})).$$

Bei Elimination von $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{P}$ ergiebt sich eine Gleichung für ν^2, die innerhalb der eingeführten Annäherung mit (27) übereinstimmt. Dabei bleiben wir in der festgesetzten Genauigkeitsgrenze, wenn wir in der ersten Formel (44) rechts den Unterschied zwischen Δ und Δ' vernachlässigen.

Die beiden Wurzeln für $\mathfrak{P}/\mathfrak{B}$ und damit für das Axenverhältniß der Schwingungsellipsen folgen aus (44), wenn man darin für v^2 die beiden geltenden Werthe einsetzt.

Dabei ist für größeres α eine Annäherung zulässig, die der oben als ersten behandelten parallel geht und dadurch erhalten wird, daß man in der ersten Formel (44) $v^2 = \Delta$, in der zweiten $v^2 = \Delta\Delta'/(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta')$ setzt. Die erste Formel liefert dann das Axenverhältniß für die Welle, die der ordinären, die zweite für diejenige, die der extraordinären in dem nicht activen Krystall entspricht. Auch diese Formeln mögen als von bisher geringerer Bedeutung fortbleiben.

Bei kleinem α kann man die zweite der früheren Annäherungsmethoden anwenden und speciell bei Vernachlässigung der in $\alpha^2\delta$ u. s. f. multiplicirten Glieder bilden

$$45) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{B}(\Delta\Delta' - v^2(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta')) &= -iv\mathfrak{P}\Delta'(\delta + \bar{\delta}), \\ \mathfrak{P}(\Delta - v^2) &= iv\mathfrak{B}(\delta + \bar{\delta}). \end{aligned}$$

Hieraus folgt dann

$$46) \qquad \frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{B}^2} = -\frac{\Delta\Delta' - v^2(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta')}{\Delta'(\Delta - v^2)},$$

oder bei Einführung der früheren Abkürzungen

$$47) \qquad \frac{\mathfrak{P}^2}{\mathfrak{B}^2} = -\frac{v_o^2(v_e^2 - v^2)}{v_e^2(v_o^2 - v^2)},$$

und die Combination mit (39') liefert

$$48) \qquad \frac{i\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{B}_1} = \frac{v_o}{v_e}\,\frac{(v_e^2 - v_o^2) - \sqrt{(v_e^2 - v_o^2) + 4v_e^2(v_r - v_l)^2}}{2v_e(v_r - v_l)}.$$

Hebt man hier die in Praxi sich nur wenig unterscheidenden Factoren v_o, v_e, $\frac{1}{2}(v_o + v_e)$ zweimal heraus, so resultirt

$$49) \qquad \frac{i\mathfrak{P}_1}{\mathfrak{B}_1} = \frac{v_e - v_o}{v_r - v_l} - \sqrt{1 + \left(\frac{v_e - v_o}{v_r - v_l}\right)^2},$$

und für $-i\mathfrak{P}_2/\mathfrak{B}_2$ gilt dasselbe mit entgegengesetztem Vorzeichen der Wurzel.

Bei schwacher Absorption erhält man hieraus für die Axenverhältnisse der Schwingungsellipsen die Gleichung

$$\varkappa = \frac{n_e - n_o}{n_r - n_l} \mp \sqrt{1 + \left(\frac{n_e - n_o}{n_r - n_l}\right)^2}.$$

Auch diese Formel giebt Herr Gouy, und bestätigt Herr

Beaulard[1]) sehr nahezu durch seine Beobachtungen. Die Gleichung ist aber ebenso, wie (39), nur angenähert richtig.

6) Ziel der Beobachtungen.

Wie S. 166 ausgeführt ist, geben Messungen der Ellipticität der normal zur Hauptaxe fortgepflanzten Schwingungen ein einfaches Mittel zur Entscheidung zwischen dem von Herrn Drude und dem von mir vorgeschlagenen Erklärungssystem.

Nach Drude gilt gemäß (28) bei geringer Absorption für die Differenz der Brechungsindices in der Richtung der optischen Axe

50) $$n_l - n_r = \delta,$$

und für das Axenverhältniß der normal dazu fortschreitenden Wellen bei Vernachlässigung des Unterschiedes von n_o und n_e im Zähler

51) $$\pm \varkappa_s = \frac{\delta}{2(n_o - n_e)} = \frac{n_l - n_r}{2(n_o - n_e)};$$

mein allgemeiner Ansatz liefert in derselben Annäherung

52) $$n_l - n_r = 2\delta,$$

53) $$\pm \varkappa_s = \frac{(\delta + \delta')}{2(n_o - n_e)}.$$

Die quantitative Bestimmung von $\varkappa_s$, die ich an Quarz ausgeführt habe, bietet eine ziemliche Schwierigkeit wegen des außerordentlich kleinen Werthes der Ellipticität; es wird ja bekanntlich die Abweichung der Schwingungsellipse von der Geraden für die betrachtete Richtung von den meisten Autoren als streng oder wenigstens practisch gleich Null betrachtet, und die allgemeine Verwendung von Quarzplatten und -keilen mit der Ebene parallel der Hauptaxe zu Compensatoren demonstrirt die Herrschaft dieser Vorstellung recht augenscheinlich.

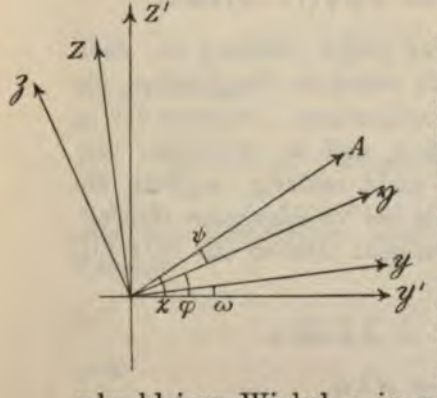
Nun kann man sich allerdings von der Unrichtigkeit dieser Auffassung sehr einfach überzeugen; bei Einschaltung einer parallel der Axe geschliffenen Quarzplatte zwischen zwei gekreuzten Nicols gelingt es, wenn nur die Lichtquelle genügend hell (z. B. eine Bogenlampe) ist, im allgemeinen keineswegs, durch Drehen der Platte vollständige Dunkelheit hervorzubringen. Aber die mit einfarbigem (und demgemäß immer etwas schwächerem) Licht auszuführenden Messungen verlangen doch sehr gute Hülfsmittel und eine längere Uebung.

1) Beaulard, l. c. p. 73 u. f.

In Bezug auf Ersteres gewährte mir die freundliche Ueberlassung eines neuen, nach seinen Angaben für das hiesige mineralogische Institut gefertigten Polarisationsspectrometers durch meinen Collegen Herrn Professor Liebisch eine große Hülfe. Das Instrument, das a. a. O. ausführlich beschrieben ist [1]), hat recht gute Nicols und gestattet ein sehr bequemes Beobachten. Als Lichtquelle wurde eine Natriumflamme benutzt, in der ein Gemisch von Sauerstoff und Leuchtgas brannte. Die untersuchten Quarzplatten, eine aus einem rechts-, eine aus einem linksdrehenden Krystall geschnitten und, neben einander gekittet, gemeinsam abgeschliffen und polirt, sind von Dr. Steeg und Reuter in Kirdorf-Homburg hergestellt; die linke Platte erwies sich als nicht ganz rein, beide Platten waren nicht absolut planparallel, aber für die verfolgten Zwecke doch eben genügend.

Um die Beobachtungsmethode im Einzelnen zu erläutern, ist auf die Theorie des Vorganges kurz einzugehen, die hier dadurch von vorn herein vereinfacht werden kann, daß gewisse Größen als sehr klein erster Ordnung betrachtet werden dürfen. Von der Berücksichtigung der mehrfachen inneren Reflexionen ist dabei abgesehen, da deren Wirkungen innerhalb der Grenze der Beobachtungsfehler liegen.

7) Verhalten einer ebenen Welle beim Durchgang durch eine parallel der Hauptaxe geschnittene Platte.



Wir beziehen die Quarzplatte, in deren Ebene nach dem Obigen die Y- und Z-Axe unseres Coordinatensystemes liegen, auf ein zweites Axenkreuz $Y'\,Z'$, dessen Z'-Axe in die Schwingungsebene des einfallenden Lichtes fällt. Es giebt kein einfaches Mittel, um den Hauptschnitt, also die Z-Axe, genau mit der Schwingungsebene des einfallenden Lichtes zur Coincidenz zu bringen. Das Axensystem YZ sei demgemäß um den sehr kleinen Winkel ω in positiver Richtung gegen das System $Y'\,Z'$ gedreht angenommen.

Ist die einfallende Schwingung durch den Schwingungsvector

1) G. Horn, Götting. Dissert. 1898; N. Jahrb. f. Miner. 12. Beil.-Bd., p. 269. 1899.

(je nach Belieben die electrische oder die magnetische Kraft)

$$54) \qquad p = A \sin T$$

gegeben, wobei T eine Abkürzung ist, so sind die Componenten nach Y und Z bestimmt durch

$$55) \qquad v_0 = A \sin \omega \sin T, \quad w_0 = A \cos \omega \sin T.$$

Jede dieser Componenten wird im Quarz in zwei entgegengesetzt rotirende elliptische mit gekreuzten Axen zerlegt, sodaß wir setzen können

$$\begin{aligned} v_0 &= A(1-k^2) \sin \omega \sin T + A k^2 \sin \omega \sin T \\ &\quad - B \cos T + B \cos T, \\ w_0 &= C \cos T - C \cos T \\ &\quad + A k^2 \cos \omega \sin T + A (1-k^2) \cos \omega \sin T. \end{aligned} \qquad 56)$$

Hierin bezeichnen B, C, k, h Constanten; sind B und C positiv, k und h kleiner als Eins, so ergeben in diesen Ausdrücken die ersten und die dritten Glieder rechts-, die zweiten und die vierten linksrotirende Wellen.

Nach S. 166 sind die Schwingungsellipsen sämmtlich (in genügender Annäherung) ähnlich; hieraus ergeben sich für die Constanten die Beziehungen

$$57) \qquad h = k,$$

$$B = A k \sqrt{(1-k^2)} \cos \omega, \quad C = A k \sqrt{(1-k^2)} \sin \omega.$$

Nun nehmen wir ω und k als klein von erster Ordnung an; dann können wir in den Ausdrücken für die einzelnen Amplituden, die in (56) auftreten, k^2 neben Eins vernachlässigen. Dagegen ist es — da die verschiedenen Antheile von v_0 und w_0 weiterhin verschiedene Verzögerungen erfahren — nicht zulässig, sogleich die Amplituden der verschiedenen Antheile bei verschiedener Größenordnung gegen einander zu vernachlässigen. Die so aus (57) folgenden Beziehungen

$$\begin{aligned} B &= A k \cos \omega, \quad C = A k \sin \omega \\ \text{resp.} \qquad B &= A k, \quad C = A k \omega \end{aligned} \qquad 58)$$

zeigen, daß k jetzt das Axenverhältniß der Schwingungsellipsen darstellt, also mit dem früher benutzten $\varkappa$ zusammenfällt.

Wir erhalten somit aus (56) für die in die Platten eintretenden Wellen

$$59) \qquad \begin{aligned} v_0 &= A[\omega \sin T + \varkappa^2 \omega \sin T - \varkappa \cos T + \varkappa \cos T], \\ w_0 &= A[\varkappa\omega \cos T - \varkappa\omega \cos T + \varkappa^2 \sin T + \sin T]. \end{aligned}$$

Nun mögen die rechtsrotirenden Wellen im Quarz die Verzögerung r, die linksrotirenden die Verzögerung l erfahren; dann gilt für die aus der Platte austretenden Schwingungen

$$60) \qquad \begin{aligned} v_1 &= A[\omega \sin(T-r) + \varkappa^2 \omega \sin(T-l) - \varkappa \cos(T-r) + \varkappa \cos(T-l)], \\ w_1 &= A[\varkappa\omega \cos(T-r) - \varkappa\omega \cos(T-l) + \varkappa^2 \sin(T-r) + \sin(T-l]. \end{aligned}$$

Nach den festen Axen $Y' Z'$ zerlegt, liefert dies

$$v' = v_1 \cos\omega - w_1 \sin\omega, \qquad w' = v_1 \sin\omega + w_1 \cos\omega,$$

oder in der früheren Annäherung

$$61) \qquad v' = v_1 - w_1\omega, \qquad w' = v_1\omega + w_1.$$

Durch eine einfache Reduction erhält man hieraus, wenn

$$62) \qquad T - l = T', \qquad \tfrac{1}{2}(l-r) = \varepsilon$$

gesetzt wird,

$$63) \qquad \begin{aligned} v' &= 2A[\omega \cos(T'+\varepsilon) + \varkappa \sin(T'+\varepsilon)] \sin\varepsilon \\ w' &= A \sin T'; \end{aligned}$$

falls man noch schreibt

$$64) \qquad v' = a \sin(T' - \Delta), \qquad w' = b \sin T',$$

wird hiernach

$$65) \qquad \frac{a^2}{b^2} = 4(\varkappa^2 + \omega^2)\sin^2\varepsilon, \qquad tg\,\Delta = \frac{\varkappa \sin\varepsilon + \omega\cos\varepsilon}{-\varkappa\cos\varepsilon + \omega\sin\varepsilon},$$

oder bei Einführung zweier Hülfsgrößen μ und ϑ durch die Formeln

$$66) \qquad \varkappa = \mu\cos\vartheta, \qquad \omega = \mu\sin\vartheta$$

auch

$$67) \quad \frac{a}{b} = 2\mu\sin\varepsilon, \quad tg\,\Delta = -tg(\varepsilon+\vartheta), \text{ resp. } \Delta = m\pi - (\varepsilon+\vartheta),$$

wobei m eine beliebige ganze Zahl bezeichnet, die man unbedenklich mit Null vertauschen kann. Demgemäß wird schließlich

68) $$\varkappa = \frac{a}{2b\sin\varepsilon}\cos(\varepsilon+\Delta), \qquad \omega = \frac{-a}{2b\sin\varepsilon}\sin(\varepsilon+\Delta).$$

Die Größen ε, sowie a/b und Δ sind der Beobachtung mit Hilfe von Compensator und Analysator zugänglich. Wir gehen jetzt zur Theorie dieser Messungsmethode über.

8) Theorie der Beobachtungsmethode.

Die Schwingungsrichtungen des Glimmercompensators mögen durch $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ gegeben sein; $\mathfrak{Y}$ entspreche der schnelleren Welle; das Axenkreuz $\mathfrak{Y}\mathfrak{Z}$ sei um den wiederum klein angenommenen Winkel φ in positivem Sinne gegen das absolut feste Kreuz $Y'Z'$ gedreht. Die Schwingungsebene des Analysators schließe den im gleichen Sinne positiv gerechneten Winkel χ mit Y' ein; $\chi-\varphi$ sei $=\psi$ gesetzt. (S. Fig. 1 auf S. 171).

Bezeichnet man die aus dem Glimmer austretenden Schwingungscomponenten mit $\mathfrak{v}_1$ und $\mathfrak{w}_1$, so beobachtet man verschwindende Intensität, wenn

69) $$\mathfrak{v}_1\cos\psi + \mathfrak{w}_1\sin\psi = 0.$$

Die auf den Glimmer fallenden Componenten nach $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$ seien $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{w}_0$, und es gelte

70) $$\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{a}\sin(T_1-\alpha), \qquad \mathfrak{w}_0 = \mathfrak{b}\sin(T_1-\beta);$$

sind dann noch ξ und η die Verzögerungen der beiden Schwingungen im Glimmer, so gilt

71) $$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{a}\sin(T_1-\alpha-\xi), \qquad \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{b}\sin(T_1-\beta-\eta),$$

und die Gleichung (69) verlangt, daß

72) und
$$\alpha-\beta = \eta-\xi$$
$$\mathfrak{a}/\mathfrak{b} = -tg\,\psi$$

ist. Dies sind die Bedingungen für die Beobachtung verschwindender Intensität.

Gegeben sind im Obigen aber die Schwingungscomponenten v', w' nach dem absolut festen Coordinatensystem $Y'Z'$. Mit diesem sind $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ verbunden durch die Gleichungen

$$v' = \mathfrak{v}_0\cos\varphi - \mathfrak{w}_0\sin\varphi, \qquad w' = \mathfrak{v}_0\sin\varphi + \mathfrak{w}_0\cos\varphi,$$

oder bei, wie vorausgesetzt, kleinem φ,

73) $$v' = \mathfrak{v}_0 - \mathfrak{w}_0 \varphi, \quad w' = \mathfrak{v}_0 \varphi + \mathfrak{w}_0.$$

Setzt man in diese Beziehungen die Ausdrücke (71) für $\mathfrak{v}_0$ und $\mathfrak{w}_0$ ein und schreibt, wie in (64),

$$v' = a \sin (T' - \Delta), \quad w' = b \sin T',$$

so erhält man in der früheren Annäherung

74) $$a^2 = \mathfrak{a}^2 + \mathfrak{b}^2 \varphi^2 - 2 \mathfrak{a} \mathfrak{b} \varphi \cos (\alpha - \beta), \quad b = \mathfrak{b},$$

$$T' = T_1 - \beta, \quad tg \Delta = \frac{\psi \sin (\alpha - \beta)}{\varphi + \psi \cos (\alpha - \beta)}.$$

$\alpha - \beta = \eta - \xi = \delta$ ist aber die Verzögerung der $\mathfrak{Z}$- gegen die $\mathfrak{Y}$-Componente im Glimmer, also eine dem Compensator individuelle Constante, und $\mathfrak{a}/\mathfrak{b}$ ist nach (72²) gleich $-\psi$. Somit kann man schließlich schreiben

75) $$\frac{a}{b} = \sqrt{\psi^2 + \varphi^2 + 2 \psi \varphi \cos \delta},$$

$$tg \Delta = \frac{\psi \sin \delta}{\varphi + \psi \cos \delta}.$$

Die Bestimmung von $\varkappa$ hat nun folgendermaßen zu erfolgen.

Die Abweichungen der Stellungen von Compensator und Analysator von den Nullstellungen, in denen die Nicols gekreuzt sind und die Schwingungsebene des Compensators für die schnellere Welle mit derjenigen des Analysators zusammenfällt, geben φ und χ, und somit $\psi = \chi - \varphi$. Diese Werthe zusammen mit dem für die benutzte Farbe geltenden δ lassen nach (75) die Größen a/b und Δ berechnen.

Ist ferner für die Krystallplatte die Verzögerung $\varepsilon = \frac{1}{2}(l - r)$ bekannt, so folgt aus (67)

76) $$\mu = \frac{a}{2 b \sin \varepsilon}, \quad \vartheta = -\varepsilon - \Delta,$$

und mit Hülfe dieser Größen schließlich nach (66)

77) $$\varkappa = \mu \cos \vartheta, \quad \varpi = \mu \sin \vartheta.$$

9) Die Beobachtungen.

Bei der Schwierigkeit der Beobachtungen genügen für δ und ε angenähert richtige Werthe. δ ist für den benutzten Glim-

mercompensator von Herrn Horn[1]) bestimmt und kann auf 84° (in Winkelmaß) geschätzt werden. ε ist für die untersuchte rechtsdrehende Quarzplatte mittelst eines Quarzkeilcompensators hier im Institut von Herrn Houstoun gemessen und bis auf ein irrelevantes Vielfaches von 2π zu 65° gefunden.

Bei den eigentlichen Beobachtungen wurde der Nullpunkt des Nicols und des Glimmercompensators (bei Annahme der Drehungsaxe des Spectrometers als Z'-Axe der obigen Rechnungen) in folgender Weise bestimmt. Auf dem Spectrometertischchen wurde ein Glan-Foucault'scher Nicol mit zur Axe normalen Endflächen so befestigt, daß seine Polarisationsrichtung nahezu normal zu Z' lag und seine vordere Grenzfläche normal zur Axe des Beobachtungsfernrohres stand. Hierauf wurde der Analysator auf größte Helligkeit gestellt und dann das Licht im Beobachtungsfernrohr durch Drehung des Polarisators ausgelöscht. Dieselbe Beobachtung wurde angestellt, nachdem der Nicol mit Tischchen und Kreis um genau 180° gedreht war. Das Mittel aus beiden Ablesungen giebt die Nullstellung des Polarisators, vorausgesetzt, daß die zwei Hälften des Nicols richtig auf einander orientiert sind, was nach der guten Auslöschung, die letzterer gab, angenommen werden durfte. Zur Controle wurde die Bestimmung mit einer einfachen Kalkspathplatte wiederholt, wobei sich genaue Uebereinstimmung (innerhalb 1′) ergab.

Nachdem die Nullstellung des Polarisators festgelegt war, wurde diejenige des Analysators und darnach die des nun erst eingefügten Compensators in der gewöhnlichen Weise aufgesucht. Alle Nullpunkte dürften, Dank der Helligkeit des hier benutzbaren Nernst-Lichtes, bis auf etwa eine Bogenminute zuverlässig sein.

Die Einstellungen bei den eigentlichen Messungen, die mit Sauerstoff-Natriumlicht auszuführen waren, ließen sich natürlich nicht so genau machen, da einerseits jetzt die Lichtstärke viel geringer, andererseits Analysator und Compensator gleichzeitig zu bewegen waren; immerhin kamen Abweichungen vom Mittel, die 4′ erreichten, kaum vor.

Für die Beobachtungen wurde die Quarzplatte mit Hülfe des Gauß'schen Oculares normal zur Fernrohraxe gestellt und um letztere so gedreht, daß bei der Nullstellung von Analysator und Compensator die beobachtete Intensität möglichst klein war, die Hauptaxe Z des Quarzes also nahezu mit der Polarisationsrichtung Z' des einfallenden Lichtes zusammenfiel und demgemäß ω einen

1) l. c. p. 288.

kleinen Werth erhielt. Die Beobachtungen am Analysator und Compensator zur Bestimmung von $\varkappa$ und ω wurden dann jedesmal wiederholt, nachdem das Präparat mit Kreis und Tischchen um genau 180° gedreht, also der Winkel ω in $-\omega$ übergeführt war. Dieses Verfahren gab durch Vergleichung der erhaltenen ω eine Art von Controle für die Zuverlässigkeit der Beobachtung. Es mag bemerkt werden, daß einige in sich gut stimmende Beobachtungen in Bezug auf diesen Punkt unerwartete, auch bei wiederholten Umdrehungen der Quarzplatte constant bleibende Abweichungen gaben, die sich wohl nicht anders erklären lassen, als durch die Annahme kleiner Fehler in der Bearbeitung der Axenzapfen, vermöge deren z. B. die Normale des Kreises bei einer Drehung einen sehr spitzen Kegel beschreibt und demgemäß auch bei gewissen Anfangs-Stellungen des Kreises nach einer halben Drehung in der Ebene normal zur Fernrohraxe aus der ursprünglichen Lage abweicht.

10) Resultate.

Ich theile zunächst einige Beobachtungen mit der rechtsdrehenden Quarzplatte mit, ohne indessen die einzelnen Ablesungen anzugeben. Die römischen Zahlen unterscheiden die bei verschiedenen Aufstellungen des Präparates, die arabischen diejenigen bei derselben Aufstellung nach einer Umdrehung gemachten Messungen.

I. 1) $\varphi_1 = -3',3, \quad \chi_1 = +7',5, \quad \psi_1 = 10',8,$

2) $\varphi_2 = -8',8 \quad \chi_2 = -0',9, \quad \psi_2 = 7',9.$

Hieraus folgt

$$\Delta_1 = -78°, \quad \Delta_2 = -45°,$$

also

$$\vartheta_1 = +13°, \quad \vartheta_2 = -20°;$$

ferner

$$\frac{a_1}{b_1} = 0{,}0032_0, \quad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0032_5,$$

$$\mu_1 = 0{,}0017_7, \quad \mu_2 = 0{,}0018_0,$$

also schließlich

$$\varkappa_1 = 0{,}0017_2, \quad \varkappa_2 = 0{,}0017_0,$$

$$\omega_1 = 0{,}00039 = +1',4, \quad \omega_2 = -0{,}00058 = -2'.$$

Die entgegengesetzte Gleichheit von ω_1 und ω_2 ist hier –

da 1′ nicht mehr sicher ist, als vollkommen erreicht zu betrachten.

II. 1) $\varphi_1 = -13',5$, $\chi_1 = -6'$, $\psi_1 = +7',5$,
2) $\varphi_2 = +3'$, $\chi_2 = +13'$, $\psi_2 = +10'$.

$$\Delta_1 = -30^0,5, \qquad \Delta_2 = -112^0,$$
$$\vartheta_1 = -34^0,5, \qquad \vartheta_2 = +47^0;$$

ferner

$$\frac{a_1}{b_1} = 0{,}0042, \qquad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0031,$$
$$\mu_1 = 0{,}0023, \qquad \mu_2 = 0{,}0017,$$

also

$$\varkappa_1 = 0{,}0019, \qquad \varkappa_2 = 0{,}0012,$$
$$\omega_1 = -0{,}00128 = -4',4, \quad \omega_2 = +0{,}00125 = +4',3.$$

Dieser Zahlenreihe liegen weniger Ablesungen zu Grunde; das Resultat für $\varkappa$ ist also unsicherer. Immerhin weicht der mittlere Werth 0,00155 von dem vorstehend erhaltenen 0,0017 nur wenig ab.

III. 1) $\varphi_1 = -7',6$, $\chi_1 = +1',8$, $\psi_1 = 9',4$
$\varphi_2 = -6'$, $\chi_2 = +3'$, $\psi_2 = 9'$.

Die Beobachtungen über φ und ψ sind hier so nahe gleich, daß ω sehr klein sein muß. Man kann daher in (65¹) ω^2 neben μ^2 vernachlässigen und direct mit der Formel

$$\varkappa = \frac{a}{2b \sin \varepsilon}$$

und den Mittelwerthen von φ und ψ rechnen. Man erhält hieraus

$$\varphi = -6',8, \qquad \psi = 9',2,$$

also

$$\frac{a}{b} = 0{,}0031_4, \qquad \varkappa = 0{,}00173.$$

Mit dem linksdrehenden Quarz habe ich, weil seine theilweise Unreinheit ein vollständiges Auslöschen des Lichtes und somit eine genaue Einstellung nicht gestattete, nur wenige Beobachtungen gemacht, die aber immerhin nicht ohne Interesse sind, weil sie den etwaigen Verdacht, daß es sich bei den vorstehenden Messungen überhaupt nicht um ein regelmäßiges Phänomen, sondern etwa um die Wirkung innerer Spannungen in dem Krystall

handelte, im Voraus widerlegen. Ein solcher Verdacht ist zwar schon an sich wenig begründet, weil Spannungen lineäre Polarisation innerhalb eines Krystalles nicht in elliptische überführen; aber ein directer Nachweis, daß die Beobachtung an einem rechts- und einem linksdrehenden Quarz Erscheinungen liefert, die in der Weise sich qualitativ unterscheiden und quantitativ übereinstimmen, wie die Theorie es verlangt, ist doch in jedem Falle von erheblichen Gewicht.

Eine Betrachtung der Rechnungen von S. 173 zeigt nun, daß die Umkehrung der Rotationsrichtung keine andere Aenderung hervorbringt, als die Vertauschung von $\varkappa$ mit $-\varkappa$ und von l mit r resp. r mit l, d. h. von ε mit $-\varepsilon$.

Die Vorzeichenänderung von $\varkappa$ ist in (68') mit der von ε durch den Nenner $\sin\varepsilon$ direct verbunden; demgemäß ist die einzige Wirkung der Umkehrung der Drehungsrichtung, die von der Theorie verlangt wird, daß so, wie früher $-\varepsilon$ zwischen Δ_1 und Δ_2 (nahezu in die Mitte) fallen muß, Gleiches jetzt für $+\varepsilon$ gelten muß. Dies hat sich nun in der That gezeigt. Eine leidliche Beobachtungsreihe mit dem Linksquarz hat gegeben

$$1)\quad \varphi_1 = 0, \qquad \chi_1 = -19', \qquad \psi_1 = -19',$$
$$2)\quad \varphi_2 = -6',5, \qquad \chi_2 = -18', \qquad \psi_2 = -11',5.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\Delta_1 = +84^\circ, \qquad \Delta_2 = +56^\circ,$$

also

$$\vartheta_1 = -19^\circ, \qquad \vartheta_2 = +9^\circ,$$

was dem oben Gesagten entspricht. Ferner folgt

$$\frac{a_1}{b_1} = 0{,}0055, \qquad \frac{a_2}{b_2} = 0{,}0040,$$
$$\mu_1 = 0{,}0030_3, \qquad \mu_2 = 0{,}0022_1,$$

also schließlich

$$\varkappa_1 = -0{,}0028_5 \qquad \varkappa_2 = -0{,}0021_8$$
$$\omega_1 = +0{,}00099 = 3',4 \qquad \omega_2 = -0{,}000346 = -1',2.$$

Die Differenz von ω_1 und $-\omega_2$ übertrifft hier wenig die Beobachtungsfehler; der mittlere Werth von $\varkappa = -0{,}0025$ stimmt in der absoluten Größe so weit mit dem frühern ($\varkappa = +0{,}0017$ ca.) überein, daß man die Beobachtung mit der nicht ganz reinen

Platte auch als eine Stütze des früheren Resultates betrachten kann. Will man dem absoluten Werth, den die links drehende Platte gegeben hat, einen kleinen Einfluß auf die Abschätzung des wahrscheinlichsten Werthes von $\varkappa$ gewähren, so wird man diesen etwas größer als 0,0017, etwa gleich 0,0019 annehmen dürfen.

11) Folgerungen.

Um dies Resultat zur Entscheidung zwischen den beiden oben erörterten Ansätzen zu verwenden, hat man zu benutzen, daß bei Quarz der absolute Werth

$$|n_l - n_r| = 0{,}000071,$$
$$|n_o - n_e| = 0{,}00911,$$

ist. Die Drude'sche Theorie verlangt also nach (51) für $\varkappa_s$ den Werth

$$\varkappa_s = 0{,}0039$$

und Analoges gilt von anderen einconstantigen Theorieen, z. B. der Gouy'schen. Diese Zahl darf aber als weit aus dem Bereich der Messungen herausfallend und demgemäß als im Widerspruch mit der Beobachtung bezeichnet werden.

Was die von mir vorgeschlagene Theorie anbetrifft, so ist sie natürlich wegen der zweiten Constanten, die sie einführt, mit dem Resultat verträglich. Die Beobachtung zeigt aber, daß diese zweite Constante δ' neben der ersteren δ jedenfalls sehr klein ist; ja die Erfahrung scheint damit vereinbar, daß δ' verschwindet, denn der hieraus folgende Werth von $\varkappa$, nämlich 0,00195, liegt den beobachteten außerordentlich nahe. Wenn genauere Bestimmungen, (an die ich gehen werde, sowie mir vollkommnere Hilfsmittel es gestatten), dies mit allem Vorbehalt ausgesprochene Resultat bestätigen sollten, so würde die Activität von Quarz für jede Farbe allerdings auch nur von einer Constanten abhängen, aber in einer wesentlich anderen Weise, als Herr Drude angenommen hat.

11) Ueber active zweiaxige Krystalle.

Die krystallographischen Symmetrieverhältnisse lassen bekanntlich das Auftreten polarer Vectorcomponenten in lineärer Verbindung mit axialen auch bei gewissen Krystallgruppen zu, die sich optisch zweiaxig verhalten. Die einfachste Erweiterung der oben benutzten Gleichungen gilt für die hemiedrische Gruppe

des rhombischen Systemes, die durch zwei zu einander normale zweizählige Symmetrieaxen characterisirt ist. Dieser Gruppe läßt sich für einfarbiges Licht (in einer in der folgenden Abhandlung näher zu erörternden Annäherung) die hemimorphe Gruppe des monoklinen Systemes unterordnen, welche eine einzige zweizählige Axe besitzt, da sich für jede Farbe ein Axenkreuz angeben läßt, für welches die optische Symmetrie mit derjenigen der rhombischen Gruppe übereinstimmt. Eine etwas andere Stellung nehmen die übrigen acentrischen Gruppen des monoklinen und des triklinen Systemes ein. Wir wollen uns aus gewissen Gründen hier auf die Betrachtung der zuerst genannten Gruppe beschränken und auch in Bezug auf sie nicht die allgemeinen Formeln entwickeln, sondern nur eine specielle Frage erörtern.

Es ist bekannt, daß die auf der Activität beruhende Drehung der Polarisationsebene bisher allein bei durch Druck zweiaxig gemachtem Quarz [1]), aber bei keinem von Natur zweiaxigen Krystall beobachtet worden ist. Es entsteht somit die Frage, ob sich etwa in Wirklichkeit bei zweiaxigen Krystallen parallel den optischen Axen garnicht zwei circularpolarisirte Wellen fortpflanzen, sondern zwei elliptische, die nur in dem Falle sehr kleiner Axenwinkel (also sehr kleiner Abweichungen des Verhaltens von einaxigen Krystallen) den circularen sehr ähnlich werden und demgemäß eine Erscheinung bewirken, die sich von der eigentlichen Drehung der Polarisationsebene nicht merklich unterscheidet.

Die einconstantigen Theorien führen zwar auf streng circulare Schwingungen; da aber, wie mir scheint, durch die vorstehend beschriebenen Beobachtungen diese Theorien definitiv widerlegt und überdies bei den mehrconstantigen sehr verschiedene Zahlwerthe der Constanten desselben Körpers als vorkommend erwiesen sind, so erhellt die Möglichkeit, daß durch den letzteren Umstand das Resultat der älteren Theorien bezüglich der Polarisationsverhältnisse erhebliche Aenderungen erfahren möchte. Ergäbe sich z. B. aus der allgemeinsten Theorie, daß parallel den optischen Axen nicht circular, sondern stark elliptisch polarisirte Wellen fortschreiten können, so würde dadurch das Nichtzustandekommen der Drehungen erklärt sein. Diese Untersuchung soll nach Aufstellung der allgemeinen Formeln für active Krystalle rhombischer Symmetrie allein durchgeführt werden.

Legen wir das vorstehend erprobte Erklärungssystem zu

1) E. Mach und J. Merten, Wien. Ber. 72, (2), p. 315, 1875.

Grunde, so treten an Stelle der Gleichungen (14)–(17) die folgenden, keiner erneuten Erläuterung bedürfenden:

78) $$\frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \ldots;$$

79) $$\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum \frac{d_h}{e_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right),$$
$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} + \sum \frac{d'_h}{e'_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right).$$
$$\frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial l} = \frac{\partial C}{} + \sum \frac{d''_h}{e''_h} \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right);$$

80) $$\mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \ldots;$$

81) $$\mathfrak{X}_h + a_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h \frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} + d_h \frac{\partial A}{\partial t} = e_h X,$$
$$\mathfrak{Y}_h + a'_h \frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b'_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + d'_h \frac{\partial B}{\partial t} = e'_h Y,$$
$$\mathfrak{Z}_h + a''_h \frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b''_h \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} + d''_h \frac{\partial C}{\partial t} = e''_h Z.$$

Die Einführung complexer Lösungen, die ebene homogene Wellen mit den Richtungscosinus α, β, γ darstellen, liefert hieraus

82) $$\mathfrak{X} = -v(\beta C - \gamma B), \ldots;$$

83) $$\mathfrak{A} = A + \frac{i}{\vartheta} \sum \frac{d_h}{e_h} \mathfrak{X}_h = -v(\gamma Y - \beta Z), \ldots;$$

84) $$\mathfrak{X} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \ldots;$$

85) $$\mathfrak{X}_h D_h + \frac{i d_h}{\vartheta} A = e_h X, \ldots;$$

hierin stellt wiederum v den complexen Brechungsindex dar, und ist

$$D_h = 1 + \frac{i a_h}{\vartheta} - \frac{b_h}{\vartheta^2}, \ldots$$

Die Seite 162 eingeführte Beschränkung auf Glieder erster Ordnung und Einführung der Abkürzungen

$$\frac{1}{\vartheta} \sum \frac{d_h}{D_h} = \delta, \ldots \quad 1 + \sum \frac{e_h}{D_h} = \Delta, \ldots$$

liefert aus (83) und (85)

86) $$\mathfrak{A} = A + i\delta X = -\nu(\gamma Y - \beta Z), \ldots;$$

87) $$\mathfrak{X}_h D_h = e_h X + \frac{i\nu}{\vartheta}(\gamma Y - \beta Z)\delta_h, \ldots;$$

88) $$\mathfrak{X} = X\Delta + i\nu(\gamma Y - \beta Z)\delta, \ldots;$$

und durch Elimination von A, B, C und $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ folgt, analog zu (26),

89) $$X(\Delta - \nu^2) + \alpha\nu^2(\alpha X + \beta Y + \gamma Z) = i\nu(\beta Z(\delta + \delta'') - \gamma Y(\delta + \delta')),$$

. . . . . .

welche Gleichungen die Gesetze der Geschwindigkeiten und Schwingungsformen enthalten.

Liegt die Richtung der Wellennormale in der XZ-Ebene, ist also $\beta = 0$, so gilt einfacher

$$X(\Delta - \nu^2) + \nu^2\alpha(\alpha X + \gamma Z) = -i\nu\gamma Y(\delta + \delta'),$$

90) $$Y(\Delta' - \nu^2) = i\nu(\gamma X(\delta + \delta') - \alpha Z(\delta' + \delta'')),$$

$$Z(\Delta'' - \nu^2) + \nu^2\gamma(\alpha X + \gamma Z) = +i\nu\alpha Y(\delta' + \delta'').$$

Zur Beurtheilung des Gesetzes der Polarisationen führen wir, wie früher, am einfachsten die Componenten $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ der magnetischen Polarisation ein, für die nach (86) bei $\beta = 0$ gilt

$$\mathfrak{A} = -\nu\gamma Y, \quad \mathfrak{B} = -\nu(\alpha Z - \gamma X), \quad \mathfrak{C} = +\nu\alpha Y.$$

Wir setzen demgemäß wieder

91) $$\nu Y = \mathfrak{P}, \quad \nu X = \gamma\mathfrak{B} + \alpha\mathfrak{D}, \quad \nu Z = -\alpha\mathfrak{B} + \gamma\mathfrak{D},$$

wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{P}$ die Seite 168 erörterte Bedeutung haben. Die erste und dritte Gleichung liefert leicht

$$\mathfrak{B}(\Delta\Delta'' - \Delta'(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta'')) = -i\nu\mathfrak{P}(\gamma^2\Delta''(\delta + \delta') + \alpha^2\Delta(\delta' + \delta'')),$$

92) $$\mathfrak{D}(\Delta\Delta'' - \Delta'(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta'')) = i\nu\alpha\gamma\mathfrak{P}((\delta' + \delta'')(\Delta - \nu^2) - (\delta + \delta')(\Delta'' - \nu^2));$$

dagegen folgt aus der zweiten

93) $$\mathfrak{P}(\Delta' - \nu^2) = i\nu(\mathfrak{B}[\gamma^2(\delta + \delta') + \alpha^2(\delta' + \delta'')] + \alpha\gamma\mathfrak{D}(\delta - \delta'')).$$

Für Weiteres wollen wir wiederum das mit $\mathfrak{D}(\delta - \delta'')$ multiplicirte Glied als klein von zweiter Ordnung vernachlässigen, was darauf hinauskommt, daß wir in den mit einem δ proportionalen Termen die Differenzen der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten unbeachtet lassen, also Δ, Δ' und Δ'' als unter einander gleich betrachten.

Die Richtungen der optischen Axen sind dadurch definirt, daß für sie gilt

$$\Delta\Delta'' = \Delta'(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta'').$$

Bei Benutzung dieser Relation liefert (92) und (93)

$$94)\quad \mathfrak{B}(\Delta-\Delta'')(\Delta'-v^2) = -iv\mathfrak{P}(\delta(\Delta'-\Delta'')+\delta'(\Delta-\Delta'')+\delta''(\Delta-\Delta')),$$
$$\mathfrak{P}(\Delta-\Delta'')\Delta'(\Delta'-v^2) = iv\mathfrak{B}(\delta\Delta(\Delta'-\Delta'')+\delta'\Delta'(\Delta-\Delta'')+\delta''\Delta''(\Delta-\Delta')).$$

Da innerhalb der oben eingeführten Annäherung in der zweiten Gleichung rechts die Factoren Δ und Δ'' mit Δ' vertauscht werden dürfen, so hebt sich Δ' aus der zweiten Formel heraus, und man erhält, unabhängig von den Werthen von $\delta, \delta', \delta''$,

$$\mathfrak{B}^2 = -\mathfrak{P}^2.$$

Aehnliches gilt, wenn die Wellennormale in der XY- oder YZ-Ebene liegt, und diese die optischen Axen enthält. Auch nach der mehrconstantigen Theorie findet somit in der Richtung der optischen Axen merklich circulare Polarisation statt.

13) Einige Beobachtungen.

Aus Vorstehendem ergiebt sich, daß für das anscheinende Fehlen der Drehung der Polarisationsebene bei zweiaxigen Krystallen andere Umstände maßgebend sein müssen, als Verschiedenheit der Activitätsconstanten $\delta, \delta', \delta''$. Auf den wichtigsten Umstand ist schon an verschiedenen anderen Stellen hingewiesen worden. Wie bei nicht activen Krystallen die beiden Hüllen der Wellenflächen in den optischen Axen je nach deren Anzahl verschieden zusammenhängen (bei einaxigen Krystallen sich berühren, bei zweiaxigen sich schneiden), so ist in activen Krystallen das Gesetz der Geschwindigkeiten in der Umgebung der optischen Axen je nach deren Anzahl wesentlich verschieden; in einaxigen Krystallen nimmt die Geschwindigkeitsdifferenz für die beiden Wellen sehr langsam, in zweiaxigen sehr schnell mit wachsendem Winkelabstand zu. Eine eventuelle Drehung der Polarisationsebene kann sich daher bei einem zweiaxigen Krystalle nur innerhalb eines äußerst kleinen Winkelraumes geltend machen und wird, wenn sie gar noch geringe Größe besitzt, sehr schwer wahrnehmbar sein. Ich weiß nicht, ob schon unter Bedingungen, welche dieser Schwierigkeit Rechnung tragen, systematische Versuche zur Auffindung der Drehung bei zweiaxigen Krystallen angestellt worden sind.

Jedenfalls scheinen mir einige an Rohrzucker gemachte Be-

obachtungen zu zeigen, daß dieser Krystall parallel einer optischen Axe eine Drehung der Polarisationsebene bewirkt, und ich möchte glauben, daß die von mir angewendete einfache Untersuchungsmethode auch in andern Fällen positive Resultate ergeben würde.

Dr. Steeg und Reuter hat mir aus eingelieferten guten Krystallen drei Platten von beiläufig $2\frac{1}{2}$, 5 und $6\frac{1}{2}$ mm Dicke senkrecht zu einer optischen Axe hergestellt, die, zwischen gekreuzten Nicols mit bloßem Auge und Natriumlicht beobachtet, prachtvolle Ringsysteme mit tiefschwarzen Polarisationsbüscheln zeigen. Von einer Aufhellung des Axenbildes, wie sie bei einer Drehung stattfinden mußte, ist hierbei nichts zu sehen.

Indessen wird durch den intensiven Contrast der benachbarten hellen Felder die Beobachtung sehr unsicher. Ich befestigte demgemäß die Zuckerpräparate auf dem Krystallhalter des Liebisch-Fueß'schen Polarisationsspectrometers, das einen ganz kurzen Spalt besitzt, und brachte das verticale Polarisationsbüschel in das Spaltbild, sodaß die Spur der optischen Axe in dessen Mitte fiel. Wurde der Spalt so verengt, daß die dem Büschel benachbarten Maxima völlig abgeblendet waren, so ergab sich das Minimum der Intensität in der optischen Axe nicht bei gekreuzten Nicols, sondern nach Ausführung einer Drehung, die für alle drei Platten in der Linksrichtung und in der Plattendicke angenähert proportionaler Größe erforderlich war. Die Drehung in einer Platte von 1 mm Dicke schätze ich auf nahezu 1^0.

Trotz naheliegender Bedenken, die sich auf die Erfolglosigkeit aller bisherigen Versuche, auf den unerwarteten Sinn der Drehung (Zuckerlösung dreht rechts) und vielleicht auch auf das häufig Störungen aufweisende Material gründen lassen, scheint mir das Resultat nicht ohne Interesse. Jedenfalls dürfte eine systematische Suche nach zweiaxigen activen Krystallen geboten und einigermaßen aussichtsvoll sein.

Göttingen, Juni 1903.

Ueber specifische optische Eigenschaften hemimorpher Krystalle.

Von

W. Voigt.

(Vorgelegt[1]) in der Sitzung vom 7. März).

Einige wenige Ausnahmen abgerechnet ist in der Krystalloptik die Beobachtung der Theorie voran gegangen; letzterer fiel somit meist nur die Aufgabe einer Erklärung der ohne ihre Anleitung aufgefundenen Thatsachen zu. Auch die Entwickelung unserer Kenntnisse bezüglich der natürlichen Activität hat im Wesentlichen diesen Weg genommen; die Theorie hat sich darauf beschränkt, für die an enantiomorphen Krystallen des regulären, wie des hexagonalen, quadratischen und rhomboedrischen Systemes beobachteten Erscheinungen Erklärungssysteme aufzustellen, indem sie zu den polaren Gliedern der optischen Gleichungen solche von rotatorischem Character fügte, — eine Erweiterung, die man dann versuchsweise auf die enantiomorphen Gruppen des rhombischen und des monoclinen Systemes übertrug.

Bei der führenden Rolle, die in dieser Entwickelung die unabhängig von der Theorie gefundenen Thatsachen spielten, ist es begreiflich, daß (wie mir scheint) noch Niemand an eine eigentlich systematische Untersuchung des ganzen Kreises zusammenhängender Fragen gegangen ist, welche die bekannten Erscheinungen wecken, so nahe dieselben im Grunde liegen. In der That: wenn die Eigenschaften der natürlichen Activität eine Erweiterung der optischen Gleichungen durch Berücksichtigung specifischer Wirkungen verlangen, die in lineären Beziehungen zwischen polaren und axialen Vectorcomponenten Ausdruck finden, wenn sich

1) Im Druck bis nach Vollendung der vorstehenden Arbeit zurückgehalten.

diese Ergänzungen genau den krystallographischen Symmetrieverhältnissen fügen, so taucht fast von selbst die Frage auf, ob denn die enantiomorphen Gruppen die einzigen sind, welche solche Beziehungen zulassen, und wenn nicht, welche Form und welchen Inhalt diese Beziehungen für die übrigen in Betracht kommenden Gruppen besitzen. Und diese Frage dürfte eine nicht unerhebliche practische Bedeutung haben; denn es ist nach vielen Analogien zu schließen, keineswegs wahrscheinlich, daß Wirkungen, die gemäß den Symmetrieverhältnissen bei ganz verschiedenen Krystallgruppen auftreten können, sich in Wirklichkeit auf ganz einzelne von ihnen beschränken sollten. Freilich ist die natürliche Activität (in merklicher Stärke wenigstens) keine nothwendige Begleiterin der Enantiomorphie, und so kann immerhin das in Bezug auf andere Gruppen als möglich, resp. wahrscheinlich Signalisirte nur bei bestimmten Substanzen deutlich erkennbar sein. In jedem Fall dürfte es aber von Interesse sein, daß die Theorie überhaupt für gewisse Krystallgruppen bisher noch nicht gefundene Eigenschaften ankündigt, daß sie die Bedingungen klarstellt, unter denen dieselben — die im Allgemeinen sehr fein zu sein scheinen — am sichersten aufzufinden sein werden, und auch erklärt, warum gewisse Vorgänge, die man wohl erwarten könnte, in Wirklichkeit nicht eintreten.

Ich werde im Folgenden damit beginnen, für alle Krystallgruppen diejenigen lineären Beziehungen zwischen polaren und axialen Vectorcomponenten abzuleiten, die mit deren Symmetrieverhältnissen vereinbar sind. Es wird sich ergeben, daß mit wenigen Ausnahmen alle Krystalle ohne Symmetriecentrum dergleichen zulassen, und daß diese Krystalle sich in Bezug auf sie deutlich in Obergruppen von verwandtem Character zusammenfassen lassen. Unter letzteren repräsentirt diejenige der enantiomorphen Formen, die bisher (allerdings meist nur in einer willkürlichen Vereinfachung der Gleichungen) allein untersucht ist, einen hervorragend einfachen Typus; ein zweiter wird durch die hemimorphen Formen geliefert; ein dritter stellt sich als eine Superposition der beiden ersteren dar.

Da es nicht angemessen erscheint, in einem neuen Gebiet sogleich die complicirtesten Fälle in Angriff zu nehmen, so habe ich mich bei der Untersuchung des Inhaltes der neu gefundenen Beziehungen auf die hemimorphe Obergruppe beschränkt. Es bietet keinerlei principielle Schwierigkeit, die Betrachtung zu erweitern.

1) Allgemeinste Formen der lineären Beziehungen zwischen polaren und axialen Vectorcomponenten für die 32 Krystallgruppen.

Die lineären Beziehungen zwischen den Componenten X, Y, Z eines polaren und denjenigen A, B, C eines axialen Vectors, deren specielle Gestalten für die verschiedenen Krystallgruppen wir abzuleiten haben, wollen wir in der allgemeinen Form

$$X = a_{11} A + a_{12} B + a_{13} C,$$
$$Y = a_{21} A + a_{22} B + a_{23} C,$$
$$Z = a_{31} A + a_{32} B + a_{33} C$$

ansetzen. Für die Anwendung derselben ist zu benutzen, daß in Bezug auf alle Drehungen des Coordinatensystemes axiale Vectorcomponenten sich genau ebenso verhalten, wie polare, daß aber bei einer Inversion einer Coordinatenaxe von polaren Vectoren die parallelen Componenten ihre Vorzeichen umkehren, die normalen dieselben beibehalten, während sich axiale Vectorcomponenten gerade umgekehrt verhalten.

Unter Benutzung dieser Regeln erhält man leicht die folgenden Hülfssätze:

Ein Symmetriecentrum (C) verlangt das Verschwinden aller a_{hk}.

Eine zweizählige Symmetrieaxe parallel Z (Symbol A_z^2) bedingt das Constantensystem

$$a_{11}, a_{12}, 0;\ a_{21}, a_{22}, 0;\ \ 0, 0, a_{33};$$

eine ebenso gelegene drei-, vier- oder sechszählige Axe (Symbol A_z^3, A_z^4, A_z^6) dagegen das System

$$a_{11}, a_{12}, 0;\ \ -a_{12}, a_{11}, 0;\ \ 0, 0, a_{33}.$$

Eine Symmetrieebene normal zur Z-Axe (Symbol E_z) hat zur Folge

$$0, 0, a_{13};\ \ 0, 0, a_{23};\ \ a_{31}, a_{32}, 0;$$

eine (zweizählige) Spiegelaxe parallel der Z-Axe (Symbol S_z) dagegen

$$a_{11}, a_{12}, 0;\ \ a_{12}, -a_{11}, 0;\ \ 0, 0, 0.$$

Die Combination dieser Gesetze liefert nun ohne Weiteres die Constanten-Schemata für die 32 krystallographischen Gruppen, die durch die in Klammer beigesetzten Symbole für die Symmetrieelemente characterisirt sind.

I. Triklines System.

1) Holoedrie (C) alle $a_{hk} = 0$;
2) Hemiedrie (keine Symmetrie) alle a_{hk} möglich.

II. Monoklines System.

3) Holoedrie (C, A_y^2 oder C, E_y) alle $a_{hk} = 0$;
4) Hemiedrie (E_y) $0, 0, a_{13}$; $0, 0, a_{23}$; $a_{31}, a_{32}, 0$;
5) Hemimorphie (A_y^2) $a_{11}, a_{12}, 0$; $a_{21}, a_{22}, 0$; $0, 0, a_{33}$.

III. Rhombisches System.

6) Holoedrie (C, A_y^2, A_z^2 oder C, A_y^2, E_z) alle $a_{hk} = 0$;
7) Hemiedrie (A_y^2, A_z^2) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{22}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
8) Hemimorphie (A_y^2, E_z) $0, a_{12}, 0$; $a_{21}, 0, 0$; $0, 0, 0$.

IV. Rhomboedrisches System.

9) Holoedrie (C, A_y^3, A_z^2 oder C, A_y^3, E_z) alle $a_{hk} = 0$;
10) Enantiomorphe Hemiedrie (A_y^3, A_z^3) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
11) Hemimorphe Hemiedrie (A_y^3, E_z) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$;
12) Paramorphe Hemiedrie (C, A_y^3) alle $a_{hk} = 0$;
13) Tetartoedrie (A_y^3) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$.

V. Tetragonales System.

14) Holoedrie (C, A_y^4, A_z^2 oder C, A_y^4, E_z) alle $a_{hk} = 0$;
15) Enantiomorphe Hemiedrie (A_y^4, A_z) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
16) Hemimorphe Hemiedrie (A_y^4, E_z) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$;
17) Paramorphe Hemiedrie (C, A_y^4) alle $a_{hk} = 0$;
18) Tetartoedrie (A_y^4) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;

---

19) Hemiedrie mit Spiegelaxe (S_y, A_z^2) $a_{11}, 0, 0$; $0, -a_{11}, 0$; $0, 0, 0$;
20) Tetartoedrie mit Spiegelaxe (S_y) $a_{11}, a_{12}, 0$; $a_{12}, -a_{11}, 0$; $0, 0, 0$.

VI. Hexagonales System.

21) Holoedrie (C, A_y^6, A_z^2 oder C, A_y^6, E_z) alle $a_{hk} = 0$;
22) Enantiomorphe Hemiedrie (A_y^6, A_z^2) $a_{11}, 0, 0$; $0, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;
23) Hemimorphe Hemiedrie (A_y^6, E_z) $0, a_{12}, 0$; $-a_{12}, 0, 0$; $0, 0, 0$.
24) Paramorphe Hemiedrie (C, A_y^6) alle $a_{hk} = 0$;
25) Tetartoedrie (A_y^6) $a_{11}, a_{12}, 0$; $-a_{12}, a_{11}, 0$; $0, 0, a_{33}$;

---

26) Hemiedrie mit dreizähliger Symmetrieaxe (A_y^3, E_y, A_z^2) alle $a_{hk}=0$!
27) Tetartoedie „ „ (A_y^3, E_y) „ „

VII. Reguläres System.

28) Holoedrie (C, A_x^4, A_y^4) alle $a_{hk} = 0$;
29) Enantiomorphe Hemiedrie (A_x^4, A_y^4) $a_{11}, 0, 0;\ 0, a_{11}, 0;\ 0, 0, a_{11}$;
30) Hemimorphe Hemiedrie (S_x, S_y) alle $a_{hk} = 0$;
31) Paramorphe Hemiedrie $(C, A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2)$ alle $a_{hk} = 0$ [1]);
32) Tetartoedrie $(A_x^2 \sim A_y^2 \sim A_z^2)$ $a_{11}, 0, 0;\ 0, a_{11}, 0;\ 0, 0, a_{11}$.

Das vorstehende Schema [2]) giebt die Mittel an die Hand, bei Benutzung der in demselben vorausgesetzten Coordinatenaxen sogleich die optischen Gleichungen aufzustellen, welche den Symmetrieverhältnissen bezüglich der möglichen Activität entsprechen. So ergeben sich insbesondere die in der vorigen Abhandlung verfolgten Gleichungssysteme für die enantiomorphen Krystalle mit einer ausgezeichneten Axe (Gruppe 10, 15, 22) und für die entsprechenden (Gruppe 29) des regulären Systemes, wie auch für den allgemeineren Fall (Gruppe 7) des rhombischen Systemes, die sämmtlich mit einander nahe verwandte Gestalt erhalten.

Daneben aber treten (wie schon oben bemerkt) Gleichungssysteme von vollständig abweichendem Habitus auf, die sich am einfachsten bei den hemimorphen Krystallen mit einer ausgezeichneten Axe (Gruppe 11, 16, 23, ähnlich 8) gestalten, und eine dritte Gattung von Formeln läßt sich als durch Superposition der activen Glieder in den beiden ersten Gleichungssystemen erhalten ansehen (Gruppe 13, 18, 25). Die Gruppen, welche außer diesen noch von Null verschiedene a_{hk} erlauben, lassen sich mit der dritten Gattung mehr oder weniger direct in Verbindung setzen, haben aber im Allgemeinen zunächst geringeres Interesse.

2) Grundformeln für hemimorphe optischeinaxige Krystalle und ihre Anwendung auf die Fortpfanzung ebener Wellen.

Bei den hemimorphen Krystallen mit einer 3-, 4-, 6-zähligen Axe treten nach dem aufgestellten Schema an Stelle der Ergänzungsglieder (5) der Formeln (4) in der vorigen Abhandlung die folgenden

$$-c_h \frac{\partial B}{\partial t},\quad +c_h \frac{\partial A}{\partial t},\quad 0$$

---

1) Das Symbol $\sim$ soll die Gleichwerthigkeit zweier Symmetrieaxen andeuten.

2) S. auch W. Voigt, Kompendium Bd. II S. 802, Leipzig 1896. Dort ist indessen die Spiegelaxe in Gruppe 19) und 20) unrichtig in Rechnung gesetzt, auch in Gruppe 8) a_{21} mit $-a_{12}$ vertauscht.

und an Stelle von (7) zum Zweck der Erfüllung der Energiegleichung

$$+\sum \frac{c_h}{e_h}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2},\quad -\sum \frac{c_h}{e_h}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2},\quad 0,$$

so daß die Systeme (2) und (4) der vorigen Arbeit die Form annehmen

$$1)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial t} + \sum \frac{c_h}{e_h}\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right),\\ \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} &= \frac{\partial B}{\partial t} - \sum \frac{c_h}{e_h}\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t^2} = v\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial t} \qquad\qquad = v\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right); \end{aligned}$$

$$2)\qquad \begin{aligned} \mathfrak{X}_h + a_h\frac{\partial \mathfrak{X}_h}{\partial t} + b_h\frac{\partial^2 \mathfrak{X}_h}{\partial t} - c_h\frac{\partial B}{\partial t} &= e_h X,\\ \mathfrak{Y}_h + a_h\frac{\partial \mathfrak{Y}_h}{\partial t} + b_h\frac{\partial^2 \mathfrak{Y}_h}{\partial t^2} + c_h\frac{\partial A}{\partial t} &= e_h Y,\\ \mathfrak{Z}_h + a_h'\frac{\partial \mathfrak{Z}_h}{\partial t} + b_h'\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}_h}{\partial t^2} &= e_h' Z. \end{aligned}$$

Hierzu kommen die ungeändert bleibenden Formelsysteme:

$$3)\qquad \mathfrak{x} = X + \sum \mathfrak{X}_h, \ldots$$

$$4)\qquad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial t} = v\left(\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z}\right), \ldots$$

Die Formeln (1), (2), (4), liefern mit A, B, C, $\partial \mathfrak{X}_h/\partial t$, $\partial \mathfrak{Y}_h/\partial t$, $\partial \mathfrak{Z}_h/\partial t$, X, Y, Z zusammengefaßt und über einen beliebigen Raum integrirt die Gleichung der Energie in der Form, die aus der allgemeinen Electrodynamik bekannt ist; die Zusatzglieder geben einen Antheil nur zur räumlichen Energie, nicht zum Poyntingschen Energiestrom.

Ueber die Größenordnung der in die c_h multiplicirten Ergänzungsglieder läßt sich naturgemäß Bestimmtes nicht sagen; indessen macht es die Analogie der vorstehenden Formeln mit den für enantiomorphe Krystalle geltenden wahrscheinlich, daß ihre Einwirkung auf die Erscheinungen gering ist.

Eine erste, vorläufig jedenfalls genügende Annäherung erhält man daher (ebenso, wie oben), indem man in den vorstehenden Formeln (1) und (2) für die in c_h multiplicirten Ausdrücke die

Näherungswerthe setzt, die aus (2) und (1) bei Vernachlässigung von c_h folgen.

Die Formeln haben die Symmetrie eines Rotationskörpers, alle Meridiane durch die Z-Axe sind gleichwerthig. Wir können uns also auf die Fortpflanzung von Wellen in der XZ-Ebene beschränken und erhalten bei Anwendung der früheren Bezeichnungen ϑ für den 2πten Theil der Periode, ν für den im Allgemeinen complexen Brechungsindex und der Abkürzungen

$$5)\quad 1+\frac{i a_h}{\vartheta}-\frac{b_h}{\vartheta^2} = D_h,\quad 1+\frac{i a_h'}{\vartheta}-\frac{b_h'}{\vartheta^2} = D_h',\quad \frac{1}{\vartheta}\sum\frac{c_h}{D_h} = \mu$$

folgende Grundgleichungen für complexe Lösungen:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A} = A + i\mu Y = -\nu\gamma Y,\\ 6)\qquad &\mathfrak{B} = B - i\mu X = -\nu(\alpha Z - \gamma X),\\ &\mathfrak{C} = C = \nu\alpha Y; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mathfrak{x}_h D_h + \frac{i c_h \nu}{\vartheta}(\alpha Z - \gamma X) = e_h X,\\ 7)\qquad &\mathfrak{y}_h D_h - \frac{i c_h \nu}{\vartheta}\gamma Y = e_h Y,\\ &\mathfrak{z}_h D_h' = e_h' Z; \end{aligned}$$

$$8)\qquad \mathfrak{x} = \nu\gamma B,\quad \mathfrak{y} = -\nu(\gamma A - \alpha C),\quad \mathfrak{z} = -\nu\alpha B.$$

Hierin stellen α und γ die Richtungscosinus der Wellennormale gegen die X- und die Z-Axe dar.

Aus (7) und (3) folgt, wenn man wieder setzt

$$9)\qquad 1+\sum\frac{e_h}{D_h} = \Delta,\quad 1+\sum\frac{e_h'}{D_h'} = \Delta',$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{x} &= X\Delta + i\nu\mu(\gamma X - \alpha Z),\\ 10)\qquad \mathfrak{y} &= Y(\Delta + i\nu\gamma\mu),\\ \mathfrak{z} &= Z\Delta', \end{aligned}$$

und aus den neun Gleichungen (6), (8) und (10) kann man $A, B, C, X, Y, Z, \mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ eliminieren. Dabei ist zu beachten, daß einem Gleichungssystem $A, C, Y, \mathfrak{y}$, einem zweiten $B, X, Z, \mathfrak{x}, \mathfrak{z}$ angehören; die ersteren Componenten bestimmen die ordinäre Welle (o), die letzteren die extraordinäre (e).

Wir bilden zunächst durch Elimination der Polarisationen aus (8) und (10) unter Benutzung von (6) die Systeme für die Welle (o)

$$11) \qquad A = -(\nu_o \gamma + i\mu)\, Y, \qquad C = \nu_o \alpha\, Y,$$
$$Y(\Delta + i\nu_o \gamma\mu) = -\nu_o(\gamma A - \alpha C),$$

und analog für die Welle (e)

$$B = \nu_e(\gamma X - \alpha Z) + i\mu X,$$
$$12) \qquad \nu_e \gamma B = X\Delta + i\nu_e \mu(\gamma X - \alpha Z),$$
$$-\nu_e \alpha B = Z\Delta',$$

wobei die complexen Brechungsverhältnisse ν bereits durch die Indices o und e unterschieden sind. Aus dem ersten Tripel (11) folgt

$$13) \qquad \nu_o^2 = \Delta;$$

aus dem zweiten (12) erhält man durch Combination der letzten beiden Gleichungen

$$14) \qquad 0 = \alpha X(\Delta + i\nu_e \gamma\mu) + \gamma Z\left(\Delta' - \frac{i\nu_e \alpha^2}{\gamma}\mu\right),$$

was kurz

$$15) \qquad 0 = \alpha X\Theta + \gamma Z\Theta'$$

geschrieben werden mag; hieraus ergiebt sich, daß man setzen kann

$$16) \qquad X = \gamma P\Theta', \qquad Z = -\alpha P\Theta,$$

worin P eine Abkürzung ist. Die Combination der ersten und der letzten Gleichung (12) liefert unter Rücksicht hierauf, wenn man wieder die Glieder zweiter Ordnung in Bezug auf c_h resp. μ vernachlässigt und die Werthe von Θ und Θ' heranzieht,

$$17) \qquad \nu^2(\alpha^2\Delta + \gamma^2\Delta') = \Delta\Delta'.$$

Aus den Ausdrücken für die complexen Brechungsindices ν_o und ν_e sind alle Glieder erster Ordnung in Bezug auf ein c_h resp. μ verschwunden; die Gesetze der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in hemimorphen einaxigen Krystallen weichen also von den für holoedrische Krystalle gültigen erst um Glieder zweiter Ordnung in den Ergänzungsconstanten c_h ab.

Die Grundlage der vorstehenden Entwickelung ist eine Erweiterung der gewöhnlichen Dispersionsformeln, die der in der vorigen Abhandlung benutzten (ersten) durchaus parallel geht.

Selbstverständlich könnte auch der zweite der dort erörterten Wege benutzt und könnten Analoga zu den Ergänzungsgliedern (6) und (12) jener Arbeit herangezogen werden, die, als leicht zu bilden, hier nicht angeführt zu werden brauchen. Die Gründe, welche dies zweite Erklärungssystem minder vortheilhaft erscheinen lassen, als das erste, sind S. 160 aufgeführt worden. Es genügt hier, hervorzuheben, daß beide Systeme bezüglich des vorstehenden in Bezug auf die Gesetze der Geschwindigkeit negativen Ergebnisses übereinstimmen.

3) Beobachtungen über Geschwindigkeiten.

Eine Durchsicht der betreffenden Rechnung zeigt, daß dies negative Resultat gerade durch diejenigen Ergänzungsglieder in dem System (1) bedingt ist, welche zur Erfüllung der Energiegleichung hinzugefügt worden sind und deren Wirkung diejenige der betr. Glieder in (2) aufhebt. Würde man dieselben nicht heranziehen, so würde ein Einfluß der Hemimorphie von erster Ordnung übrig bleiben, der hauptsächlich dahin geht, daß entgegengesetzten Fortpflanzungsrichtungen nicht mehr gleiche Geschwindigkeiten entsprechen, — eine Dissymmetrie, die nach den Symmetrieverhältnissen der behandelten Körper viel Wahrscheinlichkeit hat.

Aus diesem Grunde schien mir, trotz der Aussage der vorstehenden Theorie, eine orientirende Beobachtung ein Interesse zu bieten. Zum Nachweis kleiner Geschwindigkeitsdifferenzen sind die Interferenzmethoden unvergleichlich, und eine solche empfahl sich sonach auch zur Aufsuchung einer Geschwindigkeitsdifferenz in den Richtungen der $+Z$- undder $-Z$-Axe eines einaxigen hemimorphen Krystalles.

Derjenige Krystall, der sich in erster Linie für derartige Untersuchungen empfiehlt, ist natürlich Turmalin; indessen dauerte es ziemlich lange, bis ich in den Besitz eines Präparates kam, das die Beobachtung, (die ja in der Richtung der stärksten Absorption geschehen mußte) gestattete. Aus einem ungewöhnlich hellen brasilianischen Turmalin stellte mir die Firma Steeg und Reuter in Kirdorf eine Doppelplatte von der Form ⊏⊐ her, deren beide Hälften normal zur Hauptaxe geschnitten, in verwendeter Stellung zusammengekittet und dann gemeinsam planparallel geschliffen waren, so daß nun normal auffallendes Licht die eine Hälfte parallel der $+Z$-, die andere parallel der $-Z$-Axe durchsetzte. Dies Präparat wurde aufrecht auf einen Schlitten

gesetzt, der mit einer Schraube in der Richtung normal zur Axe des Beobachtungsfernrohres verschoben werden konnte; mit dem Fernrohr wurden die Interferenzstreifen beobachtet, welche durch ein Paar $1^1/_2$ mm von einander entfernter Spalten und ein Collimatorrohr hervorgerufen wurden. Das Turmalinpräparat wurde successive in drei Stellungen gebracht; in der ersten lagen beide Spalten vor der linken Halbplatte, in der dritten vor der rechten, in der mittleren lag die eine Spalte vor der linken, die andere vor der rechten Halbplatte. Der Schliff des Präparates war so gut, daß bei einer Verschiebung die Interferenzstreifen nur in dem Augenblick verschwanden, wo die eine Spalte auf die Grenzlinie beider Hälften traf, und zwanzigstel Streifenbreiten mit Sicherheit gemessen werden konnten. Aber die Positionen der Streifen zeigten bei den genannten drei Stellungen des Präparates keine Differenzen von einem solchen Betrage. Da nun die Dicke des Präparates gleich 2 mm war, der mittlere Brechungsindex des Turmalin 1,63 ist und bei der Beobachtung die doppelte Differenz der Geschwindigkeiten parallel der $+Z$- und der $-Z$-Axe zur Geltung kommt, so überschlägt man leicht, daß jene (einfache) Differenz den Werth von 1/160 000 des absoluten Werthes nicht übersteigen kann. Bis auf diesen Betrag erweist also die Beobachtung die Gleichheit der Geschwindigkeiten parallel den beiden Axenrichtungen des Turmalin.

4) Reflexion ebener Wellen an einer zur Hauptaxe normalen Grenzfläche.

Der negative Erfolg des die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten im Turmalin betreffenden Experimentes kann nach dem Inhalt von § 2 nicht überraschen; es handelt sich nunmehr darum, andere Erscheinungen in Betracht zu ziehen, bei denen die den hemimorphen Krystallen specifischen Glieder sich nicht gegenseitig zerstören. Da nach Obigem die Vorgänge der einfachen Fortpflanzung ausgeschlossen sind, kommen hierfür nur diejenigen der Reflexion und Brechung in Betracht.

Nach dem S. 191 Gesagten ändert sich durch die den hemimorphen Krystallen individuellen Zusatzglieder der Ausdruck für den Poynting'schen Energiefluß nicht; es ist demnach kein Grund vorhanden, die gewöhnlichen electromagnetischen Grenzbedingungen zu erweitern; die Erhaltung der Energie in der Grenzfläche zwischen zwei Medien ist ohne dies gewährleistet. Wir behalten sonach die Bedingung bei, daß die zur Grenze parallelen

Componenten der electrischen und der magnetischen Kraft stetig durch die Grenzfläche gehen.

Von vorn herein ist wahrscheinlich, und die Rechnung bestätigt es, daß die stärkste Wirkung der auf Hemimorphie beruhenden Glieder dann eintreten wird, wenn die reflectirende Ebene normal zur ausgezeichneten Z-Axe steht. Als Einfallsebene wählen wir die XZ-Ebene, so daß die Formeln des vorigen Abschnittes für die im Krystall fortgepflanzten Wellen benutzbar sind. Behalten wir die Formeln (1) und (2) bei, so wird, wenn die innere Normale der reflectirenden Fläche die $+Z$-Axe ist, das Vorzeichen der c_h ungeändert zu lassen, wenn sie die $-Z$-Axe ist, aber umzukehren sein. Zeichnen wir noch die Componenten der einfallenden und der reflectirten Welle durch die Indices i und r aus, so lauten die Grenzbedingungen für die eine (parallel der Einfallsebene polarisirte) Schwingungscomponente (o)

$$18) \qquad Y_i + Y_r = Y_o, \qquad A_i + A_r = A_o.$$

Für letzteres schreiben wir nach (11^1), indem wir Brechungsindex ν und Richtungscosinus α, γ für die einfallende Welle gleichfalls mit dem Index i, für die gebrochene mit dem Index o versehen,

$$19) \qquad \nu_i \gamma_i (Y_i - Y_r) = (\nu_o \gamma_o + i\mu)\, Y_o$$

und erhalten aus (18^1) und (19)

$$20) \qquad \begin{gathered} 2\nu_i \gamma_i Y_i = Y_o(\nu_i \gamma_i + \nu_o \gamma_o + i\mu) \\ (\nu_i \gamma_i - \nu_o \gamma_o - i\mu)\, Y_i = Y_r(\nu_i \gamma_i + \nu_o \gamma_o + i\mu). \end{gathered}$$

Für die zweite (normal zur Einfallsebene polarisirte) Schwingungscomponente sind die Grenzbedingungen

$$21) \qquad X_i + X_r = X_e, \qquad B_i + B_r = B_e;$$

für letzteres schreiben wir nach (12^3), indem wir das der Größe Δ in (9) Analoge für das erste Medium mit Δ_i bezeichnen und für die gebrochene Welle den Index e benutzen

$$22) \qquad \frac{(Z_i + Z_r)\, \Delta_i}{\nu_i \alpha_i} = \frac{Z_e \Delta'}{\nu_e \alpha_e}.$$

Dabei ist nach (15)

$$\gamma_e Z_e \Theta' = -\alpha_e X_e \Theta,$$

also, da für das erste Medium $\Theta = \Theta' = \Delta_i$ ist,

$$\frac{(X_i - X_r)\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} = \frac{X_e \Delta' \Theta}{\nu_e \gamma_e \Theta'},$$

und bei Beschränkung auf Glieder erster Ordnung und bei Berücksichtigung von (17)

23) $$(X_i - X_r)\frac{\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} = \frac{X_e \Delta}{\nu_e \gamma_e}\left(1 + \frac{i\mu}{\nu_e \gamma_e}\right).$$

Aus (21[1]) und (23) aber folgt

24)
$$\frac{2X_i \Delta_i}{\nu_i \gamma_i} = X_e\left[\frac{\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} + \frac{\Delta}{\nu_e \gamma_e}\left(1 + \frac{i\mu}{\nu_e \gamma_e}\right)\right],$$
$$X_i\left[\frac{\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} - \frac{\Delta}{\nu_e \gamma_e}\left(1 + \frac{i\mu}{\nu_e \gamma_e}\right)\right] = X_r\left[\frac{\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} + \frac{\Delta}{\nu_e \gamma_e}\left(1 + \frac{i\mu}{\nu_e \gamma_e}\right)\right].$$

Bei nicht metallischer Absorption sind die ν als mit den reellen Brechungsindices der beiden Körper merklich identisch und die Δ sämmtlich als reell zu betrachten; in diesem Falle ergeben reelle einfallende Componenten X_i, Y_i dann complexe reflectirte X_r, Y_r und gebrochene X_e, Y_e, wenn μ, d. h. die für die Hemimorphie characteristischen Parameter von Null verschieden sind. Hierdurch wird also eine Erscheinung signalisirt, auf welche in der That die Glieder erster Ordnung, die bei den Vorgängen der einfachen Fortpflanzung fortfallen, influiren.

Bei der Reflexion an einer normal zur Hauptaxe an einen einaxigen hemimorphen Krystall geschliffenen Ebene wird einfallendes lineär polarisirtes Licht in elliptisches verwandelt, und zwar von entgegengesetzter Umlaufsrichtung, je nachdem die innere Normale der Fläche mit der einen oder der anderen Seite der krystallographischen Hauptaxe zusammenfällt.

Die im Allgemeinen sehr complicirten Formeln vereinfachen sich für denjenigen Einfallswinkel, für welchen

25) $$\frac{\Delta_i}{\nu_i \gamma_i} = \frac{\Delta}{\nu_e \gamma_e}$$

ist, und für den X_r verschwinden würde, falls $\mu = 0$ wäre; diesen Winkel dürfen wir als den Polarisations- oder (besser) als den Haupteinfallswinkel der Krystallfläche normal zur Z-Axe bezeichnen. Hier liefert (24[2]) bei Vernachlässigung der Glieder zweiter Ordnung

26) $$X_r = -X_i \frac{i\mu}{2\nu_e \gamma_e},$$

und (20²) bei Vernachlässigung schon der ersten Ordnung

$$27) \qquad Y_r = Y_i \frac{\nu_i\gamma_i - \nu_o\gamma_o}{\nu_i\gamma_i + \nu_o\gamma_o}.$$

Für den Fall eines reellen X_i/Y_i ist hier also X_r/Y_r rein imaginär, die Phasendifferenz der Componenten beträgt $\frac{1}{2}\pi$, wodurch der Name des Haupteinfallswinkels sich rechtfertigt.

Aus dem Gesagten folgt eine theoretisch überaus einfache Beobachtungsmethode für die in den Formeln ausgesprochene Erscheinung. Man operirt mit einfallendem lineärpolarisirten Licht, dessen Polarisationsebene sehr wenig von der Normale zur Einfallsebene abweicht, um X_i/Y_i resp. B_i/A_i recht groß zu machen, und benutzt den Haupteinfallswinkel; dann kann man für X_r/Y_r beliebig große Werthe erhalten.

In Wirklichkeit liegen die Verhältnisse wesentlich complicirter, hauptsächlich deshalb, weil alle polirten Flächen bei einfallendem lineär polarisirten Lichte elliptisch polarisirtes reflectiren, — ein Phänomen, das aller Wahrscheinlichkeit nach auf Oberflächenschichten beruht —, und sodann auch, weil es Schwierigkeiten bietet, den Haupteinfallswinkel so genau zu bestimmen, wie zur Vernachlässigung der Differenz $\frac{\Delta_i}{\nu_i\gamma_i} - \frac{\Delta}{\nu_o\gamma_o}$ neben dem im Allgemeinen sehr kleinen $\frac{\Delta\mu}{\nu_o^2\gamma_o^2}$ in (24²) erforderlich ist. Man wird in Wahrheit für X_r/Y_r stets einen Ausdruck von der Form haben

$$28) \qquad \frac{X_r}{Y_r} = \frac{X_i}{Y_i}(M + i(P+Q)), \quad (M, P, Q, \text{ reell})$$

wobei M auf der Abweichung vom Haupteinfallswinkel und P auf der Oberflächenschicht beruht, Q aber die Wirkung der Hemimorphie enthält. Das Ziel muß dann sein, die beiden Krystallflächen normal zur $+Z$- und zur $-Z$-Axe bei so genau gleichem Einfallswinkel zu beobachten, daß M den gleichen Werth besitzt, und ihnen so nahe gleiche Oberflächenbeschaffenheit zu geben, daß P für beide dasselbe ist; da Q für beide Flächen entgegengesetzte Werthe besitzt, so würde es sich dann isoliren lassen.

5) Beobachtungen über Reflexion.

Beobachtungen über die theoretisch vorhergesagten Einwirkungen der Activität des Quarzes auf das an ihm reflectirte Licht sind bisher meines Wissens stets ohne Erfolg geblieben. Es war daher von vorn herein nicht wahrscheinlich, daß unter analo-

gen Verhältnissen, d. h. in Bereichen geringer Absorption angestellte Messungen der Ellipticität des an einem hemimorphen Krystall reflectirten Lichtes ein besseres Resultat liefern sollten. Ganz anders lägen die Verhältnisse, wenn hemimorphe Krystalle mit großer selectiver Absorption zur Verfügung stünden. Denn der in die Endformeln eingehende Parameter μ, der nach (5) gegeben ist durch

$$\mu = \frac{1}{\vartheta}\Sigma\frac{c_h}{D_h},$$

enthält im Nenner das Aggregat

$$D_h = 1 + \frac{i a_h}{\vartheta} - \frac{b_h}{\vartheta^2},$$

das in der Nähe eines Absorptionsstreifens äußerst klein werden kann. In solchen Bereichen nimmt also μ einen ausnahmsweise großen Werth an; die von der Theorie signalisirten Erscheinungen können sehr deutlich werden und sogar die oben vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung merkliche Wirkungen ergeben. Aber dergleichen Krystalle habe ich bisher nicht erhalten können und habe mich daher vorläufig darauf beschränken müssen, zu versuchen, ob unter ungünstigeren Bedingungen durch möglichst hoch gesteigerte Genauigkeit der Beobachtung ein Resultat zu erzielen wäre.

Die sehr zahlreichen und sorgsamen Beobachtungen sind mit dem Liebisch-Fueß'schen Polarisationsspectrometer an der oben beschriebenen Turmalindoppelplatte angestellt, die zu diesem Zwecke auf der einen (vorderen) Fläche nochmals hochpolirt, auf der Rückseite aber nachgeschliffen und geschwärzt wurde. Um die Oberflächenschicht nach Möglichkeit zu beseitigen, wurde die Platte wiederholt mit dem Wernicke'schen Gelatineverfahren [1]) behandelt. Indessen gelang es trotz vieler aufgewandter Mühe nicht, eine Verschiedenheit in der Ellipticität der auf den beiden Plattenhälften reflectirten Wellen sicher zu stellen. Die Erscheinung, die nach dem Vorstehenden gewiß als höchst wahrscheinlich vorhanden betrachtet werden darf, ist jedenfalls so fein, daß sie von der Wirkung des nicht absolut gleichen Oberflächenzustandes der beiden Plattenhälften nahezu verdeckt wird; jedes Abwischen der Platte mit einem reinen Leinen veränderte das Beobachtungsresultat derartig, daß sichere Schlüsse nicht möglich

1) W. Wernicke, Wied. Ann. **30**, p. 461, 1886.

waren, zumal es sich schließlich um sehr kleine Differenzen großer gemessener Zahlen handelte. Ich sehe demgemäß davon ab, die Methode und die Resultate der Messung genauer zu schildern.

6) Eigenschaften hemimorpher Krystalle des rhombischen Systemes.

In dem Vorstehenden sind ausschließlich optisch einaxige Krystalle von hemimorpher Bildung in Betracht gezogen worden. Wenn bei ihnen ein Einfluß der Activität auf die Vorgänge der Fortpflanzung von Wellen nur in Gliedern zweiter Ordnung übrig blieb, so ist dadurch doch nicht ausgeschlossen, daß stärkere Wirkungen sich in zweiaxigen Krystallen geltend machen. Freilich können bei ihnen die Glieder erster Ordnung nur in solche Functionen multiplicirt auftreten, daß sie beim Uebergang zur Einaxigkeit verschwinden; aber diese können doch viele Tausend Mal größer sein, als die früher vernachlässigten Glieder zweiter Ordnung, und bei der großen Genauigkeit, deren Beobachtungen über Fortpflanzungsvorgänge fähig sind, beobachtbare Einflüsse üben. Dies scheint nun in der That der Fall zu sein, und darum will ich noch kurz auf die Theorie activer hemimorpher Krystalle des rhombischen Systemes (Gruppe 8) eingehen.

Behalten wir, wie in dem Schema auf S. 189, die Z-Axe als ausgezeichnete Axe bei, so ändert sich das Gleichungssystem (1) nur dadurch, daß in der ersten Gleichung c_h'/e_h' an Stelle von c_h/e_h tritt; analog ist in der zweiten Formel (2) a_h', b_h', c_h', e_h', in der dritten a_h'', b_h'', e_h'' einzusetzen; (3) und (4) bleiben ungeändert. Bei naturgemäßer Uebertragung der Bezeichnungen (5) und (9) tritt demgemäß an die Stelle der Systeme (6), (8) und (10) für eine Wellenebene mit den Richtungscosinus α, β, γ Folgendes:

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{A} &= A + i\mu' Y = -\nu(Y\gamma - Z\beta),\\
\mathfrak{B} &= B - i\mu X = -\nu(Z\alpha - X\gamma),\\
\mathfrak{C} &= C \qquad\quad = -\nu(X\beta - Y\alpha);
\end{aligned}
\tag{29}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= X\Delta - i\nu\mu(Z\alpha - X\gamma), &&= -\nu(C\beta - B\gamma),\\
\mathfrak{Y} &= Y\Delta' + i\nu\mu'(Y\gamma - Z\beta), &&= -\nu(A\gamma - C\alpha),\\
\mathfrak{Z} &= Z\Delta'' &&= -\nu(B\alpha - A\beta).
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Setzt man in (30) rechts die Werthe A, B, C aus (29) ein, so ergiebt sich

$$
\begin{aligned}
X\Delta - i\nu\alpha\mu Z &= \nu^2[\beta(X\beta - Y\alpha) - \gamma(Z\alpha - X\gamma)],\\
Y\Delta' - i\nu\beta\mu' Z &= \nu^2[\gamma(Y\gamma - Z\beta) - \alpha(X\beta - Y\alpha)],\\
Z\Delta'' + i\nu(X\alpha\mu + Y\beta\mu') &= \nu^2[\alpha(Z\alpha - X\gamma) - \beta(Y\gamma - Z\beta)].
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Dies System bestimmt die Gesetze der Geschwindigkeiten und der Amplituden. Ein meßbarer Einfluß der Activität ist am ersten in der Richtung einer optischen Axe zu erwarten, deshalb wollen wir die Formeln zunächst auf die drei Hauptebenen anwenden, in denen die optischen Axen liegen können.

a) YZ-Ebene ($\alpha = 0$, $\beta^2+\gamma^2 = 1$)

$$\begin{aligned} X\Delta &= \nu^2 X, \\ Y(\Delta'-\nu^2\gamma^2) &= -\nu Z\beta(\nu\gamma - i\mu'), \\ Z(\Delta''-\nu^2\beta^2) &= -\nu Y\beta(\nu\gamma + i\mu'). \end{aligned} \tag{32}$$

Diese Formeln zeigen, daß die electrischen Schwingungen parallel und normal zur YZ-Ebene stattfinden; die normale Componente hat einen constanten Brechungsindex, derjenige der parallelen bestimmt sich aus der Gleichung

$$(\Delta'-\nu^2\gamma^2)(\Delta''-\nu^2\beta^2) = \nu^2\beta^2(\nu^2\gamma^2+\mu'^2). \tag{33}$$

μ' und damit die Wirkung der Activität tritt in dieser ganzen Ebene nur in einem Glied zweiter Ordnung auf, das wir als unmerklich ansehen müssen.

Analoges gilt für die ZX-Ebene ($\beta = 0$, $\gamma^2+\alpha = 1$).

b) XY-Ebene ($\gamma = 0$, $\alpha^2+\beta^2 = 1$).

$$\begin{aligned} X(\Delta-\nu^2\beta^2) &= -\nu^2\alpha\beta Y + i\nu\alpha\mu Z, \\ Y(\Delta'-\nu^2\alpha^2) &= -\nu^2\alpha\beta X + i\nu\beta\mu' Z, \\ Z(\Delta''-\nu^2) &= -i\nu(X\alpha\mu + Y\beta\mu'). \end{aligned} \tag{34}$$

Hier sondert sich die Componente normal zur XY-Ebene nicht ab; die Schwingungen sind demgemäß elliptisch. Zu ihrer näheren Untersuchung führen wir die transversal schwingenden magnetischen Polarisationen ein nach den Formeln

$$\mathfrak{A} = \nu Z\beta, \quad \mathfrak{B} = -\nu Z\alpha, \quad \mathfrak{C} = -\nu(X\beta - Y\alpha)$$

und setzen

$$\nu Z = \mathfrak{P}, \quad \nu X = -\mathfrak{C}\beta + \mathfrak{D}\alpha, \quad \nu Y = \mathfrak{C}\alpha + \mathfrak{D}\beta, \tag{35}$$

wobei $\mathfrak{D}$ wiederum mit der sehr kleinen longitudinalen Componente der elektrischen Kraft proportional ist.

Man erhält dann bei Vernachlässigung des Productes aus $\mathfrak{D}$ und dem μ oder μ' in der dritten Gleichung (34)

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}(\Delta\Delta'-\nu^2(\alpha^2\Delta+\beta^2\Delta')) &= i\nu\alpha\beta\mathfrak{P}(\Delta\mu'-\Delta'\mu), \\ \mathfrak{P}(\Delta''-\nu^2) &= -i\nu\alpha\beta\mathfrak{C}(\mu'-\mu). \end{aligned} \tag{36}$$

Nach ihrer Definition sind im Allgemeinen Δ und Δ' nur wenig

von einander und von Δ'' verschieden. Hebt man aus der ersten Gleichung einen Factor, der einen mittleren Werth dieser Ausdrücke darstellt, heraus, so stellt das System (36) für die Richtung der optischen Axen, wo $1-v^2/\Delta'' = 1-v^2(\alpha^2\Delta+\beta^2\Delta')/\Delta\Delta''$ ist, die Fortpflanzung zweier circularpolarisirter Wellen mit verschiedenen Geschwindigkeiten dar. Dabei pflanzt sich parallel der einen Axe die rechts-, parallel der andern Axe die linksrotirende Welle mit größerer Geschwindigkeit fort.

Die Theorie signalisirt also eine ganz neue und höchst merkwürdige Erscheinung. Nach ihr drehen rhombische hemimorphe Krystalle, deren optische Axen in einer Ebene normal zu der ausgezeichneten Axe liegen, die Polarisationsebene für Licht, das sie parallel einer optischen Axe durchsetzt, aber den beiden Axen entspricht ein verschiedener Drehungssinn.

Die Drehung wird allerdings bei durchsichtigen Krystallen zumeist gering sein, denn das für sie maßgebende Glied

$$\mu'-\mu = \frac{1}{\vartheta}\left(\Sigma\frac{c_h'}{D_h'}-\Sigma\frac{c_h}{D_h}\right)$$

verschwindet mit der Zweiaxigkeit; sie kann aber in selectiv absorbirenden Krystallen sehr merkliche Größe erhalten, wie ja auch Zinnober die gewöhnliche Drehung in einer beispiellosen Stärke zeigt.

Resultat.

Die Uebertragung der bei den enantiomorphen Krystallen erprobten Theorie der Activität auf die hemimorphen Formen macht das Vorkommen einer Reihe sehr merkwürdiger, bisher noch nicht aufgefundener optischer Erscheinungen höchst wahrscheinlich, die allerdings ausnahmslos viel feiner sind, als die bei enantiomorphen Krystallen ohne Anleitung der Theorie aufgefundene Drehung der Polarisationsebene, aber bei selectiv absorbirenden Körpern sich nachweisen lassen dürften.

Göttingen im Februar 1903.

Die Konstruktion des Klassenkörpers für solche algebraische Zahlkörper, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten und deren Idealklassen eine cyclische Gruppe vom Grade l^h bilden.

Von

Ph. Furtwängler.

Vorgelegt von Herrn Hilbert in der Sitzung vom 27. Juni 1903.

Einleitung.

Bei der Fortsetzung meiner Untersuchungen über die Reciprocitätsgesetze in algebraischen Zahlkörpern ergab sich die Notwendigkeit, in einem gewissen Umfange den von *D. Hilbert* aufgestellten Satz über die Klassenkörper, der von fundamentaler Bedeutung für die Theorie der algebraischen Zahlkörper ist, zu beweisen. Dies ist mir bereits von längerer Zeit gelungen, aber andere unaufschiebbare Arbeiten haben mich bisher verhindert, meine Untersuchungen zu publicieren.

Ich gebe hier den ersten Teil dieser Untersuchungen, in dem über den Grundkörper k folgende Annahmen gemacht werden: k soll eine $l$te Einheitswurzel enthalten, wo l eine ungerade Primzahl bedeutet; die Klassenzahl von k sei ql^h, wo $q \not\equiv 0\ (l)$ ist, und die $q$ten Potenzen aller Klassen sollen eine cyclische Gruppe vom Grade l^h bilden. Es handelt sich dann darum nachzuweisen, daß ein unverzweigter relativ-cyclischer Körper in bezug auf k vom Relativgrad l^h existiert. Dieser Nachweis wird im Folgenden vollständig erbracht. Den allgemeineren Fall, daß die genannte Gruppe vom Grade l^h nicht cyclisch ist, werde ich in einem zweiten

Aufsatze behandeln, der im nächsten Hefte dieser Nachrichten erscheinen wird [1]).

Es sei noch erwähnt, daß Herr *F. Bernstein* kürzlich eine Mitteilung über denselben Gegenstand publiciert hat, zu der ich in meinem zweiten Aufsatze einige Bemerkungen gebe [2]).

§ 1.

Es sei zunächst der Satz angeführt, den ich im Folgenden vollständig beweisen werde:

Satz 1: *Es sei l eine ungerade Primzahl und k bezeichne einen algebraischen Zahlkörper, der eine $l$te Einheitswurzel enthält. Ist dann die Klassenzahl von k gleich $q\,l^h$, wo $q \not\equiv 0\,(l)$ ist, und bilden die $q$ten Potenzen der Klassen aus k eine cyclische Gruppe vom Grade l^h, so existiert ein Körper K_h mit folgenden Eigenschaften:*

1. K_h ist ein relativ-Abel'scher Körper vom Relativgrad l^h in bezug auf k.

2. K_h ist unverzweigt in bezug auf k.

3. Die Klassenzahl von K_h ist zu l prim.

4. K_h enthält alle relativ-Abel'schen unverzweigten Körper in bezug auf k, deren Relativgrad eine Potenz von l ist, als Unterkörper in sich.

5. Alle $q$ten Potenzen von Idealen aus k werden in K_h Hauptideale.

6. Die Relativgruppe von K_h in bezug auf k ist holoedrisch isomorph mit der Gruppe, welche die $q$ten Potenzen der Klassen von k enthält.

---

1) Die in Betracht kommende Litteratur ist hauptsächlich folgende:

D. Hilbert. Ueber die Theorie der relativ-Abel'schen Zahlkörper. Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen 1898. [Citiert mit „*Hilbert*, Rel.-Abel'sche Zahlk."]

Ph. Furtwängler. Ueber das Reciprocitätsgesetz der $l$ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. Abhandlungen der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Math.-Phys. Klasse. Neue Folge Bd. II, Nr. 3, 1902. [Citiert mit „*Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz"]. (Ein Auszug aus dieser Arbeit wird demnächst in den Mathematischen Annalen erscheinen).

D. Hilbert. Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Annalen Bd. 51, 1898.

D. Hilbert. Die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1897. [Citiert mit „*Hilbert*, Algebr. Zahlk."].

Man vergl. auch:

H. Weber. Ueber Zahlengruppen in algebraischen Körpern. Drei Abhandlungen. Math. Annalen Bd. 48, 49, 50; 1895, 1896, 1897.

2) *F. Bernstein.* Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. Nachrichten von der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen 1903.

Wir werden im Folgenden annehmen, daß $q = 1$ ist, daß also die Klassenzahl von k gleich l^h ist. Dies geschieht nur der einfachen Ausdrucksweise halber, es bedeutet keine Beschränkung in der Gültigkeit des Beweises. Man kann die folgenden Betrachtungen vielmehr fast wörtlich auf einen Körper k, bei dem $q > 1$ ist, anwenden, wenn man unter einem Ideal immer die $q$te Potenz eines Ideals aus k versteht.

§ 2.

Wir wollen in diesem Paragraphen einen Hülfssatz transcendenter Natur entwickeln, der eine der Hauptstützen der folgenden Betrachtungen ist.

Der Satz lautet:

Satz 2: *Der Körper k vom Grade m besitze die Klassenzahl ql^h, wo $q \not\equiv 0 (l)$ ist, und G_{l^h} sei die Untergruppe aller Idealklassen in k, die $q$te Potenzen von Klassen sind. Ist dann $G_{l^{h-1}}$ eine Untergruppe von G_{l^h} vom Grade l^{h-1} und durchläuft $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale der Klassen aus $G_{l^{h-1}}$, $\mathfrak{w}^{(-)}$ alle Primideale der übrigen Klassen aus G_{l^h}, so liegt die Summe:*

$$1) \qquad (l-1)\cdot\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})}\frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s}-\sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})}\frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \qquad s>1$$

stets unter einer positiven endlichen Grenze, wenn sich s der Grenze 1 nähert [1]).

Beweis: Die Untergruppe $G_{l^{h-1}}$ möge durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$2) \quad G_{l^{h-1}} = C_1^{a_1} C_2^{a_2} \ldots\ldots C_n^{a_n} \begin{pmatrix} a_1 = 0,1 \ldots l^{h_1}-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = 0,1 \ldots l^{h_n}-1 \end{pmatrix} (h_1+h_2+\cdots h_n = h-1).$$

Ist dann C_{n+1} eine Klasse aus G_{l^h}, die nicht zu $G_{l^{h-1}}$ gehört, so ist die Gruppe G_{l^h} in der Gestallt darstellbar:

$$3) \qquad G_{l^h} = G_{l^{h-1}} C_{n+1}^{a_{n+1}} \quad (a_{n+1} = 0,1,\ldots l-1).$$

Bedeutet nun T die Anzahl aller Ideale einer bestimmten Klasse C aus G_{l^h}, deren Normen $\leqq t$ sind, wo t eine reelle positive Größe bedeutet, so ist bekanntlich [2]):

---

1) Vergl. *Hilbert*, Rel.-Abel'sche Zahlk. Hülfssatz 5, pg. 390 und *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz § 9.

2) Vergl. *Hilbert*, Algebr. Zahlk. § 26 und *D. Hilbert*, Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers. Math. Ann. Bd. 51, 1898. § 22, pg. 53—60.

$$4) \qquad T = t\varkappa + Rt^{1-\frac{1}{w}},$$

wo $\varkappa$ eine nur vom Körper k und nicht von t abhängende Konstante und R eine derart von t abhängige Größe bedeutet, die für unendlich wachsendes t zwischen endlichen Grenzen bleibt. Aus (4) folgt leicht, wenn man mit $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus C bezeichnet:

$$5) \qquad \sum_{(\mathfrak{j})} \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(t)} \frac{\varkappa}{t^s} + f(s) \qquad (s > 1),$$

wo die Summe rechts über $t = 1, 2, \ldots \infty$ zu erstrecken ist und mit $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bezeichnet wird, die für $s = 1$ gegen eine endliche Grenze convergiert. Ich ordne jetzt allen Klassen $l$te Einheitswurzeln in der Weise zu, daß den Klassen $C_1, C_2, \ldots C_n$ der Wert 1 entspricht, der Klasse C_{n+1} aber eine beliebige von 1 verschiedene $l$te Einheitswurzel ξ. Die den übrigen Klassen zugeordneten Einheitswurzeln bestimme ich gemäß ihrer Zusammensetzung aus den Klassen $C_1, \ldots C_{n+1}$ derart, daß dem Produkt $C_i C_{i'}$ zweier Klassen auch das Produkt der C_i und $C_{i'}$ zugeordneten Einheitswurzeln entspricht. Verstehe ich dann unter $\xi_{\mathfrak{j}}$ diejenige Einheitswurzel, die der Klasse zugeordnet ist, zu der $\mathfrak{j}$ gehört, so gilt offenbar:

$$6) \qquad \xi_{\mathfrak{j}} = \xi_{\mathfrak{p}}\, \xi_{\mathfrak{q}}\, \xi_{\mathfrak{r}} \ldots, \text{ wenn } \mathfrak{j} = \mathfrak{p} \cdot \mathfrak{q} \cdot \mathfrak{r} \ldots$$

Läßt man jetzt $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus den Klassen $C, C^2, \ldots C^l$ durchlaufen, wo C eine beliebige Klasse aus G_{p_h} bedeutet, die nicht in $G_{p_{h-1}}$ liegt, und bildet:

$$7) \qquad S = \sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \xi_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} \quad (e = 1, 2, \ldots l-1), \quad (s > 1)$$

so bleibt diese Summe, wie man sofort aus (5) erkennt, stets endlich, wenn sich s der Grenze 1 nähert. Das Gleiche gilt dann offenbar, wenn man in (7) $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus G_{p_h} durchlaufen läßt.

Da andererseits:

$$8) \quad \log \sum_{(\mathfrak{j})} \sum_{(e)} \xi_{\mathfrak{j}}^e \frac{1}{n(\mathfrak{j})^s} = \sum_{(\mathfrak{w})} \sum_{(e)} \xi_{\mathfrak{w}}^e \cdot \frac{1}{n(\mathfrak{w})^s} + f_1(s) \quad (e = 1, 2, \ldots l-1), \; (s > 1)$$

wo $\mathfrak{j}$ alle Ideale aus G_{p_h} und $\mathfrak{w}$ alle Primideale aus G_{p_h} zu durchlaufen hat und $f_1(s)$ eine Funktion darstellt, die für $s = 1$ gegen einen endlichen Grenzwert convergiert, so ist damit die Richtigkeit unseres Satzes bewiesen.

§ 3.

Wir setzen vom Körper k voraus, daß er ein Oberkörper des Kreiskörpers der $l$ten Einheitswurzeln vom Relativgrade m sei, daß die Anzahl seiner Idealklassen gleich l^h sei und daß die Gruppe dieser Klassen cyclisch sei. Das System der Klassen ist dann in der Form:

1) $$C^a \quad (a = 0, 1, \ldots l^h - 1)$$

darstellbar, wo C eine geeignete Idealklasse aus k bedeutet.

Es sei $\mathfrak{r}$ ein Ideal aus C und

2) $$\mathfrak{r}^{l^h} = (\varrho),$$

wo ϱ eine ganze Zahl aus k bedeutet. Ist dann $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_{m'-1}$ ein volles System von Grundeinheiten für k und versteht man unter $\varepsilon_{m'}$ eine in k liegende Einheitswurzel, deren $l$te Wurzel nicht in k liegt, und setzt endlich:

3) $$\varepsilon_{m+1} = \varrho,$$

so läßt sich jede Zahl in k, die $l$te Potenz eines Ideals ist, in der Form darstellen:

4) $$\varepsilon_1^{x_1} \varepsilon_2^{x_2} \ldots \varepsilon_{m'+1}^{x_{m'+1}} \alpha^l$$

wo $x_1, x_2, \ldots x_{m'+1}$ gewöhnliche ganze Zahlen und α eine Zahl aus k bedeutet.

Man bestimme jetzt $m'+1$ Primideale $\mathfrak{q}$ derart, daß:

5) $$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad (i \neq j) \; (i, j = 1, 2 \ldots m'+1)$$

und wähle darauf die Exponenten $w_1, \ldots w_{m'+1}$ so, daß:

6) $$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}^{w_1} = (\varkappa_1), \ldots\ldots \mathfrak{q}_{m'+1} \mathfrak{r}^{w_{m'+1}} = (\varkappa_{m+1})$$

Hauptideale in k werden.

Wir betrachten jetzt alle Zahlen von folgender Gestalt:

7) $$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_{m'+1}^{u_{m+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'+1}^{v_{m'+1}} \quad (u, v = 0, 1, \ldots l-1),$$

wo die v der Bedingung

8) $$v_1 w_1 + v_2 w_2 + \cdots v_{m'+1} w_{m'+1} \equiv 0 \; (l)$$

genügen sollen, damit das Ideal $\mathfrak{r}$ in den Zahlen des Systems nur in einer Potenz, deren Exponent durch l teilbar ist, vorkommt. Das System (7) enthält mindestens $l^{2m'+1}$ verschiedene Zahlen.

Wir nennen jetzt zwei Zahlen α, β aus k nach *D. Hilbert*[1]) von gleicher Art, wenn eine Congruenz

---

1) Rel. Abel'sche Zahlk. pg. 382.

9) $$\alpha \equiv \beta\, \gamma^{l} \,(\mathfrak{l}^{l})$$

besteht, wo γ eine Zahl aus k bedeutet und $\mathfrak{l} = (1-\zeta)$ ist.

Die primären Zahlen, die der $l$ten Potenz einer Zahl aus k nach $\mathfrak{l}^{l}$ congruent sind, bilden für sich eine Art.

Es folgt nun leicht aus den Betrachtungen, die der Schluß des § 8 meiner Preisarbeit[1]) enthält, daß es genau $l^{2m'}$ verschiedene Arten giebt. Es sei dies kurz in folgender Weise ausgeführt.

Bedeutet α_i ein System von Zahlen, das die sämtlichen Arten repräsentiert, und β_k ein volles Restsystem von ganzen, zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}$ incongruenten Zahlen, so bildet $\alpha_i \beta_k^{l}$ ein volles Restsystem der zu $\mathfrak{l}$ primen nach $\mathfrak{l}^{l}$ incongruenten Zahlen. Denn ist α eine beliebige ganze Zahl aus k, so gilt zunächst eine Congruenz:

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta^{l} \,(\mathfrak{l}^{l}),$$

wo β eine ganze Zahl aus k bedeutet. Genügt diese der Congruenz:

$$\beta \equiv \beta_k \,(\mathfrak{l}),$$

so ist auch

$$\beta^{l} \equiv \beta_k^{l} \,(\mathfrak{l}^{l}),$$

folglich

$$\alpha \equiv \alpha_i \beta_k^{l} \,(\mathfrak{l}^{l}).$$

Wäre andererseits:

$$\alpha_i \beta_k^{l} \equiv \alpha_{i'} \beta_{k'}^{l} \,(\mathfrak{l}^{l}),$$

so müßte zunächst $i = i'$ sein, also auch

$$\beta_k^{l} \equiv \beta_{k'}^{l} \,(\mathfrak{l}^{l})$$

und daher auch

$$\beta_k \equiv \beta_{k'} \,(\mathfrak{l}), \text{ also } k = k'.$$

Da nun das System $\alpha_i \beta_k^{l}$ im ganzen $\varphi(\mathfrak{l}^{l})$ Zahlen enthält und das System β_k $\varphi(\mathfrak{l})$ Zahlen, so muß das System α_i $N(\mathfrak{l}^{l-1}) = l^{2m}$ Zahlen enthalten. Aus dem Bewiesenen folgt, daß in (2) sicher 2 Zahlen derselben Art ω_1 und ω_2 enthalten sind, so daß die Zahl $\omega = \omega_1 \omega_2^{l-1}$ eine primäre Zahl von der Gestalt:

10) $$\omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots\ldots \varepsilon_{m'+1}^{u_{m'+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_{m'+1}^{v_{m'+1}} \alpha^{l}$$

ist, bei der die Exponenten u, v nicht sämtlich Null sind; α bedeutet eine Zahl aus k.

Wir betrachten jetzt den Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$. Ist in (10) $v_1 = v_2 = \cdots v_{m'+1} = 0$, so ist K in bezug auf k unverzweigt.

---

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz pg. 30—31.

Es wird die Aufgabe der nächsten Paragraphen sein nachzuweisen, daß die gegenteilige Annahme falsch ist.

§ 4.

Wir zeigen in diesem Paragraphen, daß die durch die Formel (10) des vorigen Paragraphen gegebenen primären Zahlen die folgende charakteristische Eigenschaft haben: Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal aus k und $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, so gehört $\mathfrak{p}$ einer Klasse in k an, die $l$te Potenz einer Klasse ist[1]).

Es sei also jetzt die primäre Zahl ω von der Gestalt:

$$1) \qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \ldots\ldots \varepsilon_{m'+1}^{u_{m'+1}} \varkappa_1^{v_1} \ldots\ldots \varkappa_{m'+1}^{v_{m'+1}}$$

gegeben und es mögen $v_{i_1}, \ldots v_{i_t}$ von Null verschieden sein. Es sei ferner $l^{\lambda-f}$ der niedrigste Exponent, für den in $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ die Aequivalenz

$$2) \qquad \mathfrak{r}^{l^{\lambda-f}} \sim 1$$

gilt. Die Zahl f kann dann nur die beiden Werte 0 und 1 haben, denn es gilt in K sicher die Aequivalenz:

$$\mathfrak{r}^{l^\lambda} \sim 1$$

und andererseits folgt aus der Aequivalenz (2) in K die Aequivalenz

$$\mathfrak{r}^{l^{\lambda-f+1}} \sim 1 \text{ in } k.$$

Ist $f = 1$, so werden die Ideale aus $C^{l^{\lambda-1}}$ in K Hauptideale; ist $f = 0$, so ist dies nicht der Fall.

Wir beweisen nun zunächst folgenden Satz[2]):

Satz 3: *Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l^t und machen die sämmtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Complexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, für a^* die Ungleichung:*

$$3) \qquad a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + f \quad \left(m' = \frac{m(l-1)}{2}\right)$$

Die Zahl f ist dadurch bestimmt, daß $l^{\lambda-f}$ der niedrigste Exponent ist, für den in K die Grundklasse C von k die Aequivalenz

$$C^{l^{\lambda-f}} \sim 1$$

befriedigt.

---

1) Vergl. hierzu *D. Hilbert*, Rel. Abel'sche Zahlk. § 10 und 11.

2) Vergl. *D. Hilbert*, Rel. quadr. Zahlk. § 15 und *Ph. Furtwängler*, Reciprocitätsges. § 5, Satz 19.

Beweis: Bezeichnet man mit $H_1, \dots H_{m'}$ ein System relativer Grundeinheiten von K in bezug auf k und mit $\eta_1, \dots \eta_{m'}$ ihre Relativnormen in k, so ist jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, in der Form darstellbar:

$$\varepsilon = \eta^{r_1} \dots\dots \eta_{m'}^{r_{m'}} \xi^t,$$

wo ξ eine Einheit aus k[1]) und $r_1, \dots r_{m'}$ irgendwelche Zahlen $0, 1, \dots l-1$ bedeuten.

Da nun zusammen l^{v^*} Einheitenverbände, die Relativnormen von Einheiten aus K enthalten, existieren, so muß man unter den Einheiten $\eta_1, \dots \eta_{m'}$ v^* auswählen können, etwa $\eta_1, \eta_2, \dots \eta_{v^*}$, so daß jede Einheit ε in k, die Relativnorm einer Einheit in K ist, sich eindeutig in die Gestalt bringen läßt:

$$4) \qquad \varepsilon = \eta_1^{r_1} \dots \eta_{v^*}^{r_{v^*}} \cdot \xi^t \quad (r_1, \dots r_{v^*} = 0, 1, \dots l-1).$$

Wendet man dies auf die Einheiten $\eta_i\,(i = v^*+1, \dots m')$ an, so ergiebt sich:

$$5) \qquad \eta_i = \eta_1^{r_1^{(i)}} \dots \eta_{v^*}^{r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^t \quad (i = v^*+1, \dots m')$$

wo $\xi^{(i)}$ eine Einheit aus k ist und die Exponenten bestimmte Werte $0, 1, \dots l-1$ haben. Daraus folgt, daß die $m'-v^*$ Ausdrücke:

$$6) \qquad \mathfrak{H}_i' = \mathfrak{H}_i \mathfrak{H}_1^{-r_1^{(i)}} \dots \mathfrak{H}_{v^*}^{-r_{v^*}^{(i)}} (\xi^{(i)})^{-1} \quad (i = v^*+1, \dots m')$$

Einheiten in K mit der Relativnorm 1 sind und daß man deshalb[2])

$$7) \qquad \mathfrak{H}_i' = \mathfrak{M}_i^{(1-S)}$$

setzen kann, wo $\mathfrak{M}_i$ eine ganze Zahl aus K bedeutet und S die Substitution bezeichnet, bei der $\sqrt[l]{\omega}$ in $\xi \sqrt[l]{\omega}$ übergeht. Die Ideale $(\mathfrak{M}_i)$ und $(\mathfrak{M}) = (\sqrt[l]{\omega})$ sind dann mit ihren relativconjugierten Idealen identisch und darum Produkte aus den ambigen Primidealen in K, die wir mit $\mathfrak{D}_1, \dots \mathfrak{D}_t$ bezeichnen, und Idealen aus k:

$$(\mathfrak{M}) = \mathfrak{D}_1^{a_1} \dots \mathfrak{D}_t^{a_t} \cdot \mathfrak{j}$$

$$8) \qquad (\mathfrak{M}_i) = \mathfrak{D}_1^{a_1^{(i)}} \dots \mathfrak{D}_t^{a_t^{(i)}} \mathfrak{j}^{(i)} \quad (i = v^*+1, \dots m')$$

Es ist nun zu untersuchen, ob eine Beziehung:

$$9) \qquad (\mathfrak{M})^b (\mathfrak{M}_{v^*+1})^{b_{v^*+1}} \dots (\mathfrak{M}_{m'})^{b_{m'}} = \mathfrak{j}^*$$

bestehen kann, wo die Exponenten $b, b_{v^*+1}, \dots b_{m'}$ irgendwelche

---

1) Im allgemeinen kann man nur behaupten, daß die $l$te Potenz von ξ in k liegt. Infolge unserer Annahme, daß ω kein Produkt aus einer Einheit mit der $l$ten Potenz einer Zahl aus k ist, muß ξ selbst in k liegen.

2) *Hilbert*, Algebr. Zahlk. Satz 90, pg. 272.

Werte $0, 1, \ldots l-1$ haben, die nicht sämmtlich Null sind, und $\mathfrak{j}^*$ ein Ideal aus k ist.

Ist $f = 0$, so ist $\mathfrak{j}^*$ in k Haupideal; ist $f = 1$, so ist $\mathfrak{j}^{*l}$ in k ein Hauptideal. Im Falle $f = 0$ würde daher aus (9) folgen:

$$10) \qquad \mathrm{M}^{b}\mathrm{M}_{v^*+1}^{b_{v^*+1}}\ldots\mathrm{M}^{b_{m'}} = i\mathrm{E}$$

wo i eine ganze Zahl aus k und E eine Einheit aus K ist.

Potenziert man (10) symbolisch mit $(1-S)$, so ergiebt sich:

$$11) \qquad \zeta^{b}(\mathrm{H}'_{v^*+1})^{b_{v^*+1}}\ldots(\mathrm{H}'_{m'})^{b_{m'}} = \mathrm{E}^{(1-S)},$$

und hieraus schließt man leicht mit Hilfe der fundamentalen Eigenschaft des Systems relativer Grundeinheiten, daß $b = b_{v^*+1} = b_{m'} = 0$ sein muß, wenn man noch beachtet, daß ω nicht das Produkt aus einer Einheit mit der $l$ten Potenz einer Zahl aus k ist. Es kann daher im Falle $f = 0$ keine Relation (9) bestehen. Im Falle $f = 1$ kann eine Relation (9) bestehen; es kann aber sicher keine zwei voneinander unabhängige Relationen von der Art (9) geben; denn aus ihnen könnte man eine Relation von der Art (9) ableiten, in der auf der rechten Seite ein Hauptideal aus k stände. Das würde genau so, wie eben gezeigt ist, zu einem Widerspruch führen. Im Falle $f = 1$ existiert daher höchstens eine Relation (9). Damit ist die Richtigkeit der Ungleichung (3) erwiesen.

Die Ungleichung (3) gilt auch in dem Falle, daß ω eine Einheit aus k ist. Denn in diesem Falle sind die Einheiten $\omega, \eta_1, \ldots \eta_{m'}$ Relativnormen von Einheiten in K und wir können als die Einheiten, welche die v^* linearen unabhängigen Einheitenverbände repräsentieren, etwa $\eta_1, \ldots \eta_{v^*-1}$, ω wählen. Dadurch, daß man die übrigen $m'-v^*+1$ Einheiten $\eta_{v^*}, \ldots \eta_{m'}$ durch diese ausdrückt, gelangt man dann zu $m'-v^*+1$ Relationen von der Art (8). Da wieder höchstens f Relationen (9) existieren können, gilt auch jetzt Ungleichung (3).

Um den Wert von a^* genau zu ermitteln, brauchen wir noch folgenden Satz:

Satz 4: *Jede Einheit ε in k, die den Bedingungen:*

$$12) \qquad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \quad \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_2}}\right) = 1, \ldots \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

genügt, ist Relativnorm einer Einheit in K.

Beweis: Zunächst ist klar, daß jede Einheit in k, die Relativnorm einer Einheit aus K ist, die Bedingungen (12) befriedigt.

Im Falle $f = 1$ kann nun unter den Indices i die Zahl $m'+1$ nicht vorkommen; denn es würde sich sonst $\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{q}_{m'+1}}\right) = 1$ ergeben, was gegen die Definition von $\mathfrak{q}_{m'+1}$ verstößt. Im Falle $f = 1$ kann man nämlich setzen:

$$\mathfrak{r}^{l^{h-1}} = (P),$$

wo P eine ganze Zahl aus k bedeutet. Bezeichnet man Relativnormen von Zahlen aus K in bezug auf k durch N_k, so folgt:

$$N_k(P) = \varepsilon_1 \varrho,$$

wo ε_1 eine Einheit aus k bedeutet. Aus der letzten Gleichung würde endlich folgen[1]):

$$1 = \left(\frac{N_k(P)}{\mathfrak{q}_{m'+1}}\right) = \left(\frac{\varepsilon_1 \varrho}{\mathfrak{q}_{m'+1}}\right) = \left(\frac{\varrho}{\mathfrak{q}_{m'+1}}\right),$$

was unmöglich ist.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß im Falle $f = 1$ höchstens $m'-t$, im Falle $f = 0$ höchstens $m'-t+1$ unabhängige Einheitenverbände von solchen Einheiten existieren, die Relativnormen von Einheiten in K sind, was wir in die Ungleichung zusammenfassen können:

13) $$v^* \leqq m'-t+1-f.$$

Nun folgt aus Ungleichung (3), da $a^* \geqq 0$ ist,

$$v^* \geqq m'-t+1-f.$$

Es ergiebt sich also:

14) $$v^* = m'-t+1-f.$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

Gleichzeitig ergiebt sich, daß $a^* = 0$ ist, d. h. daß der einzige ambige Complex in K der Hauptcomplex ist.

Außerdem schließt man aus (14), daß im Falle $f = 0$ das Primideal $\mathfrak{q}_{m'+1}$ notwendig in der Relativdiscriminante von K aufgehen muß.

Satz 5: *Ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus K und $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, so folgt aus der Aequivalenz*

$$\mathfrak{J}^{(1-s)} \sim \mathfrak{j}$$

immer die andere

$$\mathfrak{J} \sim \mathfrak{j}_1,$$

wo $\mathfrak{j}_1$ ebenfalls ein Ideal aus k bedeutet.

Beweis: Aus $\mathfrak{J}^{(1-s)} \sim \mathfrak{j}$ folgt $\mathfrak{j}^l \sim 1$ in k und daher im Falle $f = 1$ $\mathfrak{J}^{(1-s)} \sim 1$. Im Falle $f = 0$ muß $\mathfrak{j}$ in k Hauptideal sein; dann wäre dies nicht der Fall, so könnte man einen Exponenten

1) Vergl. *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz Satz 15, pg. 16.

$b \not\equiv 0 \,(l^k)$ bestimmen, so daß $\mathfrak{j}\mathfrak{r}^b$ Hauptideal in k würde. Es wäre dann

$$\mathfrak{J}^{(1-S)}\mathfrak{r}^b \sim 1,$$

also $\mathfrak{J}^{(1-S)}\mathfrak{r}^b = (\mathrm{B})$, wo B eine Zahl aus K bedeutet. Daraus würde wieder in analoger Weise wie bei dem Beweise von Satz 4 folgen, daß $\left(\frac{\varrho}{q_{m'+1}}\right) = 1$ ist, was unmöglich ist. Es ist daher in jedem Falle:

15) $$\mathfrak{J}^{(1-S)} = (\mathrm{A}),$$

wo A eine ganze Zahl aus K bedeutet. Die Relativnorm von A:

$$N_k(\mathrm{A}) = \varepsilon$$

ist dann eine Einheit in k, welche die Bedingungen (12) des Satzes 4 erfüllt. Bedeutet daher E eine geeignete Einheit aus K, so kann man setzen:

$$N_k(\mathrm{A\,E}) = 1,$$

und daher:

$$\mathrm{A\,E} = \Lambda^{(1-S)},$$

wo Λ eine ganze Zahl aus K bedeutet. Aus (15) ergiebt sich dann

$$(\mathfrak{J}\Lambda^{-1}) = S(\mathfrak{J}\Lambda^{-1}),$$

also wegen $a^* = 0$ $\mathfrak{J} \sim \mathfrak{j}_1$, wenn $\mathfrak{j}_1$ ein geeignetes Ideal aus k bezeichnet.

Satz 6: *Es giebt für jedes Ideal $\mathfrak{J}$ in K einen nicht durch l teilbaren Exponenten q_1, so daß $\mathfrak{J}^{q_1}$ einem Ideal in k äquivalent wird.*

Beweis: Es giebt stets einen Exponenten b, so daß

$$\mathfrak{J}^{q_1(1-S)^b} \sim 1$$

wird, wo q_1 eine geeignete nicht durch l teilbare ganze Zahl bezeichnet. Die Richtigkeit unserer Behauptung folgt dann aus Satz 5.

Satz 7: *Ist $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k, das die Bedingung:*

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

erfüllt, so gehört $\mathfrak{p}$ einer Klasse in k an, die $l$te Potenz einer Klasse in k ist.

Beweis: Da $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, wird $\mathfrak{p}$ in K zerlegbar[1]):

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{P} \,.\, S\mathfrak{P} \ldots . S^{q-1}\mathfrak{P}.$$

$\mathfrak{P}^{q_1}$ ist dann nach Satz 6 einem Ideal $\mathfrak{j}$ in k äquivalent:

$$\mathfrak{P}^{q_1} \sim \mathfrak{j},$$

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz Satz 6, pg. 7.

folglich auch:

$$S\mathfrak{P}^{q_1} \sim \mathfrak{j}, \ldots S^{l-1}\mathfrak{P}^{q_1} \sim \mathfrak{j}$$

und daher

$$\mathfrak{p}^{q_1} \sim \mathfrak{j}',$$

was zu beweisen war.

Mit Hülfe des Satzes 7 und des Satzes 2 wird es jetzt möglich, nachzuweisen, daß der Körper K unverzweigt in bezug auf k ist, was im nächsten Paragraphen geschehen soll.

§ 5.

Wir bestimmen ein von dem System der Primideale $\mathfrak{q}$ verschiedenes System von Primidealen $\mathfrak{q}'_1, \ldots \mathfrak{q}'_{m'}$, das auch die Bedingungen (5) in § 3 erfüllt und führen dann in bezug auf das System der $\mathfrak{q}'$ dieselben Entwickelungen durch, die wir eben in bezug auf das System der $\mathfrak{q}$ ausgeführt haben. Wir gelangen dadurch zu einer primären Zahl ω'; definiert diese einen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$, so ist die Existenz eines unverzweigten Körpers bewiesen. Wir nehmen daher an, daß der Körper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ verzweigt in bezug auf k sei. Aus Satz 7 folgt dann, daß alle Primideale $\mathfrak{p}$ aus k mit der Eigenschaft $\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ einer Klasse in k angehören, die $l$te Potenz einer Klasse ist.

Ich bezeichne nun alle Primideale aus k für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_\omega}\right) = 1,$$

mit $\mathfrak{p}_\omega$ und diejenigen, für die

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_{\omega\omega'}}\right) \neq 1 \quad \left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}_{\omega\omega'}}\right) = 1 \text{ mit } \mathfrak{p}_{\omega\omega'}.$$

Es gilt dann:

$$\sum_{(\mathfrak{p}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\omega)^s} = \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s)$$

$$\sum_{(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})^s} = \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_2(s) \qquad s > 1$$

1) $$\sum_{(\mathfrak{p}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})^s} = \frac{2l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) + f_2(s).$$

Hier bedeuten $f_1(s)$ und $f_2(s)$ ebenso wie im Folgenden die Funktionen $f(s)$ solche Funktionen der reellen Veränderlichen s, die stets zwischen endlichen Grenzen bleiben, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Bezeichnet man nun alle Primideale, die zu einer Klasse C^b gehören,

$$\text{mit } \mathfrak{p}^{(+)}, \text{ wenn } b \equiv 0(l)$$
$$\text{mit } \mathfrak{p}^{(-)}, \text{ wenn } b \not\equiv 0(l),$$

so folgt, da alle Primideale $\mathfrak{p}_\omega$ und $\mathfrak{p}_{\omega\omega'}$ verschieden sind und zu den Primidealen $\mathfrak{p}^{(+)}$ gehören, wie aus Satz 7 folgt:

$$2) \qquad \sum_{(\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(+)})^s} \geqq \frac{2l-1}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f_1(s) + f_2(s) \quad (s>1);$$

da ferner:

$$3) \qquad \sum_{(\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{p}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(-)})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_3(s), \ (s>1)$$

so ergiebt sich durch Subtraktion aus (2) und (3):

$$4) \qquad \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(-)})^s} \leqq \frac{(l-1)^2}{l^2} \log \frac{1}{s-1} + f_4(s) \ (s>1).$$

Demnach wäre:

$$5) \quad (l-1) \sum_{(\mathfrak{p}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{p}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}^{(-)})^s} \geqq \frac{l-1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s) \qquad s>1.$$

Die letzte Gleichung widerspricht dem Satz 2 und der Widerspruch fällt nur dann fort, wenn wir annehmen, daß der Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ oder $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ unverzweigt in bezug auf k ist.

Hiermit ist nachgewiesen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen sicher ein unverzweigter Körper K in bezug auf k existiert.

§ 6.

Wir wollen zunächst noch einige Eigenschaften dieses Körpers K kennen lernen, die wir im folgenden Satze zusammenfassen:

Satz 8: *Die Klassenzahl von K ist gleich $q_1 l^{h-1}$, wo $q_1 \not\equiv 0(l)$ ist, und die Gruppe der $q_1$ten Potenzen der Klassen von K ist cyclisch. Alle Ideale der Klassen C^b in k, wenn $b \equiv 0(l^{h-1})$, werden in K Hauptideale.*

Beweis: Daß alle Ideale aus den Klassen C^b in k, wenn $b \equiv 0(l^{h-1})$ ist, in K Hauptideale werden, folgt aus der früheren Bemerkung, daß im Falle $f = 0$ das Primideal $\mathfrak{q}_{w'+1}$ in der Relativdiscriminante von K aufgehen müßte; es ist also $f = 1$, was mit der eben ausgesprochenen Behauptung identisch ist. Es sei nun C_1 diejenige Klasse in K, in die das Ideal $\mathfrak{r}$ aus k übergeht; dann gilt, wie eben gezeigt,

$$C_1^{l^{h-1}} \sim 1$$

Ferner ist:

$$C_1^{l^{h-2}} \frown\!\!\!| \smile 1,$$

weil andernfalls die Aequivalenz

$$\mathfrak{r}^{l^{h-1}} \sim 1$$

in k gelten müßte.

Das System von Klassen

$$C_1^b \quad (b = 0, 1, \ldots l^{h-1}-1)$$

stellt daher l^{h-1} verschiedene Klassen dar und es ist leicht zu zeigen, daß die $q_1$te Potenz jedes Ideals in K einer dieser Klassen angehört. Es sei nämlich $\mathfrak{J}$ ein beliebiges Ideal aus K. Dann gilt nach Satz 6

$$\mathfrak{J}^{q_1} \sim \mathfrak{j},$$

wo $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k bedeutet. Ist dann

$$\mathfrak{j} \sim \mathfrak{r}^b,$$

so gehört $\mathfrak{J}^{q_1}$ zur Klasse C_1^b.

Wir schließen hier noch folgenden Satz an, der leicht aus Satz 2 folgt:

Satz 9: *Es existiert in bezug auf den Körper k nur ein unverzweigter Körper vom Relativgrad l.*

Beweis: Angenommen, es existierte außer dem Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ noch ein zweiter unverzweigter Körper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ in bezug auf k. Es würde dann aus Satz 7 folgen, daß sowohl alle Primideale, für die $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, als auch diejenigen, für die $\left(\frac{\omega'}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist, einer Klasse in k angehörten, die $l$te Potenz einer Klasse in k ist. Man kommt dann genau wie im § 5 zu einem Widerspruch mit Satz 2.

§ 7.

Wir können jetzt den Klassenkörper von k konstruieren und seine in Satz 1 aufgezählten Eigenschaften beweisen.

Im Falle $h = 1$ ist bereits $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ der gewünschte Klassenkörper. Ist $h > 1$, so können wir mit dem Körper $K = K_1$ genau so operieren, wie wir es in den vorigen Paragraphen mit dem Körper k gethan haben. Wir erhalten dadurch eine primäre Zahl $\omega^{(1)}$ in K_1, die einen relativ-cyclischen unverzweigten Körper $K_2(\sqrt[l]{\omega^{(1)}}, K_1)$ in bezug auf K_1 definiert, dessen Klassenzahl gleich $q_2 l^{h-2}$ ist, wo $q_2 \not\equiv 0 (l)$ ist. Diesen Proceß können wir fortsetzen, bis wir einen in bezug auf k unverzweigten Körper K_h vom Relativgrad l^h erhalten.

K_h ist dann der gesuchte Klassenkörper von k, der die in Satz 1 aufgezählten Eigenschaften hat.

Er ist unverzweigt in bezug auf k und seine Klassenzahl ist zu l prim; alle Ideale aus k werden in K_h Hauptideale. Um nachzuweisen, daß K_h in bezug auf k relativ cyclisch ist, zeigen wir dies zunächst für den Körper K_2. Der Körper K_2 wird erzeugt durch Adjunktion vo $\sqrt[l]{\omega^{(1)}}$ zu K_1, wo $\omega^{(1)}$ eine primäre Zahl aus K_1 bedeutet. Die Zahl $S\omega^{(1)}$ ist dann ebenfalls primär in K_1 und der durch Adjunktion von $\sqrt[l]{S\omega^{(1)}}$ zu K_1 erzeugte Körper unverzweigt in bezug auf K_1; er ist daher identisch mit K_2, weil nur ein unverzweigter Körper vom Relativgrad l in bezug auf K_1 existiert. Hieraus folgt, daß K_2 ein relativ Galois'scher Körper und auch, wie leicht einzusehen ist, ein relativ Abel'scher Körper in bezug auf k ist. Wäre er nicht relativ-cyclisch, so müßte die Relativgruppe von K_2 in bezug auf k offenbar zwei verschiedene Untergruppen vom Grade l enthalten und infolgedessen müßten auch zwei verschiedene unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren, was als unmöglich nachgewiesen ist; K_2 ist daher relativ-cyclisch in bezug auf k. Durch Fortsetzung des Verfahrens erkennt man leicht, daß dasselbe von K_h gilt.

K_h enthält alle relativ-Abel'schen unverzweigten Körper, deren Relativgrad eine Potenz von l ist. Denn ist $K'_{h'}$ ein solcher Körper vom Relativgrad $l^{h'}$, so kann zunächst nicht $h' > h$ sein, weil sonst $K'_{h'}$ die ganze Reihe von Körpern $K_1, K_2, \ldots K_h$ enthalten müßte, wie leicht aus Satz 9 folgt. Es müßte dann in bezug auf K_h ein unverzweigter Körper vom Relativgrad l existieren, was nicht möglich ist[1]). Ist $h' \leqq h$, so ist $K'_{h'}$ mit $K_{h'}$ identisch, weil nach Satz 9 $K'_{h'}$ die ganze Reihe von Körpern $K_1, K_2, \ldots K_{h'}$, enthalten muß.

Wir haben damit in dem betrachteten Falle, daß die Klassengruppe von k cyclisch ist, durch analoge Entwickelungen, wie sie *D. Hilbert* für $l = 2$ durchgeführt hat, den Satz 1 vollständig bewiesen. Den wesentlich schwierigeren Fall, daß die Gruppe der Klassen von k mehrere Grundklassen enthält, deren Exponent durch l teilbar ist, werden wir in einer im nächsten Hefte erscheinenden Arbeit behandeln.

Die vorstehenden Entwickelungen gelten auch für den Fall $l = 2$, wenn der Grundkörper k und seine conjugierten Körper imaginär sind.

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz Satz 24, pg. 28.

Untersuchungen aus dem Universitätslaboratorium zu Göttingen. XII.

Von

O. Wallach.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Juli 1903.

I. Ueber die Umwandlung cyclischer Ketone in Basen stickstoffhaltiger Ringsysteme.

1. Pyrazole aus cyclischen Ketonen.

Wir verdanken Claisen den Nachweis, daß die von ihm entdeckten Oxymethylenketone mit Phenylhydrazin ganz ähnlich reagieren wie 1.3 Diketone (Ann. d. Ch. 278, 261, 274) und daß man auf diesem Wege leicht zu Phenylpyrazolen gelangen kann. So entsteht aus Oxymethylenaceton und Phenylhydrazin das Methylphenylpyrazol.

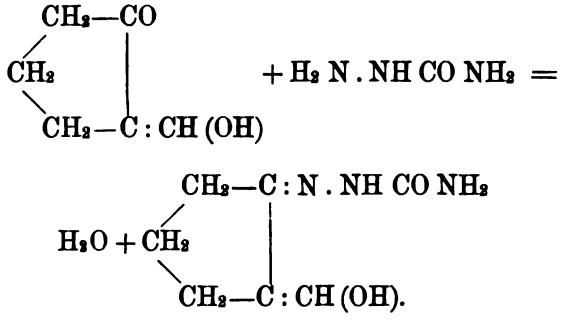
Ferner hat Knorr (Ann. d. Chem. 279, 217) aus Oxymethylenaceton und Hydrazin das entsprechende nicht phenylirte Methylpyrazol dargestellt.

Auch aus dem Campher hat Claisen durch Umsetzung von dessen Oxymethylenderivat mit Phenylhydrazin ein Phenylpyrazol gewinnen können. Im übrigen sind Pyrazole aus cyclischen Ketonen noch nicht aufgebaut worden und die im stickstoffhaltigen Ring nicht substituirten einfachsten Pyrazole mehrgliedriger Ringsysteme sind bisher überhaupt noch nicht bekannt. In Gemeinschaft mit Herrn Adolf Steindorff habe ich nun eine größere Reihe dieser auch für die chemische Systematik nicht

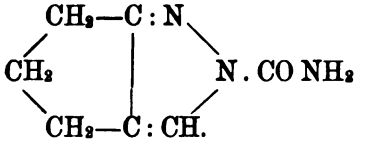
uninteressanten Verbindungen hergestellt und zwar gelang es auf folgendem sehr einfachem Wege an fünf-, sechs- und siebengliedrige Kohlenstoffringe den einfachen Pyrazolring anzugliedern.

Die cyclischen Oxymethylenketone reagieren, wie wir fanden, sehr leicht mit essigsaurer Semicarbazidlösung, wobei in erster Linie wohl immer das Ketonsauerstoffatom in Reaction tritt.

Für das Oxymethylenpentanon z. B. würde die erste Phase der Reaction in folgender Weise verlaufen können:

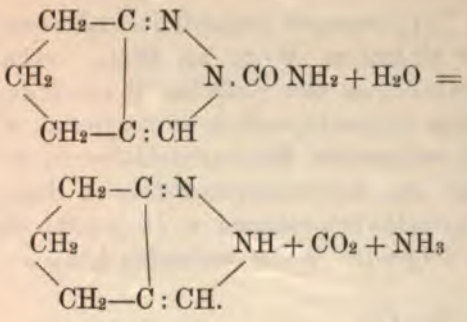


Diese Semicarbazone haben sich auch in einigen Fällen isoliren lassen (z. B. beim Campher, Menthon, Bihydrocarvon, Isothujon, Thujamenthon. Meist spalten aber diese Verbindungen intramolekular sofort noch 1 Mol. Wasser ab und es entstehen Verbindungen vom Typus:



Wo diese Condensationsproducte nicht freiwillig entstehen, wird die zweite Wasserabspaltung durch Zusatz von etwas Mineralsäure leicht eingeleitet.

Kocht man jedoch die letzterwähnten Verbindungen mit verdünnter Mineralsäure, so erleiden sie hydrolytische Spaltung und zerfallen dabei in freies Pyrazol, Kohlensäure und Ammoniak, genau in derselben Weise, wie das zuerst von Posner (Ber. d. Ges. **34**, 3973) bei den auf analogem Wege gewonnenen Condensationsproducten von 1.3 Diketonen mit Semicarbazid beobachtet worden ist. Für das obige Beispiel würde sich also die Reaction so gestalten:



Es ist natürlich auch möglich nach dem Vorgang von Knorr durch directe Umsetzung der Oxymethylenverbindungen cyclischer Ketone mit freiem Hydrazin zu denselben Verbindungen zu gelangen. Die bei dieser Umsetzung entstehenden Basen sind aber in den meisten Fällen viel weniger leicht in reinem Zustand heraus zu arbeiten, als wenn man zu ihrer Gewinnung den erwähnten Umweg einschlägt.

Ferner hat sich gezeigt, daß die bei der Reaction mit Semicarbazid entstehenden Carbamid-Derivate der Pyrazole wegen ihrer Schwerlöslichkeit und Krystallisationsfähigkeit zur Erkennung der Anwesenheit von Oxymethylenverbindungen und also auch zu deren Charakteristik ganz vorzüglich geeignet sind.

Von den für die Reaction zur Verwendung gelangenden Oxymethylenverbindungen waren eine ganze Reihe bis dahin noch nicht dargestellt worden. Für ihre Gewinnung kam die vortreffliche Claisen'sche Vorschrift zur Anwendung. Bei den substituirten Ringketonen ist die Stelle, an welcher das Oxymethylen in das Molekül eingreift, zum Theil noch unbestimmt. Bei der Umsetzung derselben mit Semicarbazid hätte man das Auftreten von Isomeren erwarten können. Auch soll nicht behauptet werden, daß sich solche nicht werden auffinden lassen. Im Wesentlichen erwiesen sich aber die bis jetzt untersuchten directen Reactionsproducte als einheitlich.

Wohl aber wurde eine andere Beobachtung gemacht, welche zeigte, daß innerhalb des Pyrazolringes Isomerisationen sich vollziehen können. In einigen der Fälle, wo Semicarbazid unter Austritt von nur einem Molekül Wasser mit der Oxymethylenverbindung direct reagirt hatte und die Abspaltung des zweiten Moleküls Wasser durch verdünnte Schwefelsäure erst eingeleitet werden mußte, wurde zuerst beobachtet, daß das unter Austritt von 2 Mol. Wasser entstandene, gut krystallisirte Pyrazolderivat

einen doppelten Schmelzpunkt zeigte. Die Verbindung schmolz verhältnißmäßig niedrig, erstarrte dann wieder und schmolz nun erheblich höher und behielt diesen hohen Schmelzpunkt auch nach dem Umkrystallisiren bei. Beim Erhitzen über den ersten Schmelzpunkt vollzieht sich also eine Isomerisation (vielleicht Bindungsverschiebung im Pyrazolring) und eine ursprünglich entstandene labile Verbindung geht in eine stabile Modification über. Bei der Spaltung mit Säuren kommt man aus beiden verschieden schmelzenden Semicarbazonen immer zu derselben Pyrazolbase.

Es ist nun sehr wahrscheinlich, daß die cyclischen Semicarbazone dieser Art in allen Fällen in zwei Modificationen existiren können. Nur entzieht sich die Existenz von Isomeren mit verschiedenem Schmelzpunkt bei der üblichen Bestimmungsart des Schmelzpunkts leicht der Beobachtung, da beim Erwärmen die niedrig schmelzende Modification manchmal schon unterhalb ihres Schmelzpunkts ganz allmählich in die höher schmelzende übergeht und man daher schließlich nur einen Schmelzpunkt — den höchst liegenden — ablesen kann. Die Doppelschmelzbarkeit ließ sich dann aber (wenigstens in den Beispielen, die darauf hin untersucht wurden) in anderer Weise constatiren. Für das cyclische Semicarbazon aus Oxymethylensuberon z. B. findet man nach der gewöhnlichen Bestimmungsmethode den Schmelzpunkt bei 181—183°. Taucht man aber das gefüllte Schmelzpunktsröhrchen direct (ohne die Substanz langsam anzuwärmen) in ein auf etwa 160° erwärmtes Bad, so sieht man, wie die Substanz plötzlich zusammenschmilzt, aber auch momentan wieder erstarrt und dann beim weiteren Erhitzen des Bades erst bei 181—183° wieder schmilzt. Andere Verbindungen desselben Typus, bei denen anfangs nur ein Schmelzpunkt beobachtet worden war, verhielten sich bei näherer Prüfung ganz ähnlich.

Was die Isomerisirbarkeit der Semicarbazone beim Schmelzen anbelangt, so ist auch an die früheren Beobachtungen von Markwald (Ber. **25**, 3098; **32**, 1083) und von Busch (Ber. **34**, 320; **36**, 1362) zu erinnern. Für den vorliegenden Fall muß es noch dahin gestellt bleiben, ob die bei unseren Pyrazolderivaten beobachteten Isomerien auf eine Verschiebung der Carbamidgruppe zurückzuführen ist und ob die Doppelbindungen im Pyrazolring nicht anders vertheilt sind, als es in den obigen Formeln angenommen wurde.

Die bei den cyclischen Ketonen gemachten günstigen Erfahrungen veranlassten, die angegebene Reactionsfolge auch auf die gewöhnlichen Ketone zu übertragen. Als zu dem Zweck das Aceton selbst als einfachste Verbindung zum Ausgangsmaterial gewählt wurde, wurde nun eine Beobachtung gemacht, deren weitere Verfolgung nicht ohne theoretisches Interesse sein dürfte.

Das nach Claisens Vorschrift dargestellte Oxymethylenaceton-Natrium wurde nach sorgfältigem Auswaschen mit Aether getrocknet, im Wasser gelöst und mit essigsaurer Semicarbazidlösung versetzt. Schon nach kurzer Zeit beginnt die Ausscheidung eines Niederschlages, der nach längerem Stehen abfiltrirt und aus heißem Wasser umkrystallisirt wurde. Die Verbindung zersetzt sich beim Erhitzen oberhalb 230° und erwies sich bei der Analyse ganz unerwartetermaßen als ein Bisemicarbazon der Zusammensetzung $C_6 H_{11} N_6 O_2$, das also durch Einwirkung von 2 Mol. Semicarbazid auf die Oxymethylenverbindung unter Austritt von 2 Mol. Wasser entstanden war. Mithin hatte das Oxymethylenaceton wie ein Aldehyd-Keton reagirt, im Sinne der Gleichung:

$$CH_3\,CO\,CH_2\,COH + 2H_2\,N\,.\,NH\,CO\,NH_2 = 2H_2O + CH_3\,C(:N\,.\,NH\,CO\,NH_2)\,CH_2\,CH:N\,NH\,CO\,NH_2$$

oder es war in bisher noch nicht beobachteter Weise Hydroxyl mit dem Semicarbazid in folgender Art in Reaction getreten:

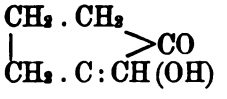
$$CH_3\,CO\,CH:CH\,(OH) + 2H_2\,N\,.\,NH\,CO\,NH_2 = 2H_2O + CH_3\,C(:N\,.\,NH\,CO\,NH_2)\,.\,CH_2\,CH\,N\,.\,NH\,CO\,NH_2.$$

Welche der beiden Möglichkeiten zutrifft, ist noch nicht entschieden worden. Bemerkenswerth ist aber, daß wenn man das Bisemicarbazid mit Säure kocht auch ganz glatt ein Pyrazol, also in diesem Fall das bei 240° siedende Methylpyrazol, $C_4 H_6 N_2$, entsteht. Offenbar wird unter diesen Bedingungen also die eine Semicarbazidgruppe abgespalten und dann vollzieht sich Ringschließung und Abspaltung von CO_2 und NH_3 ganz in dem oben besprochenen Sinne.

Ob noch andere Ketone mit kettenförmiger Anordnung sich ebenso verhalten wie das Aceton soll noch geprüft werden.

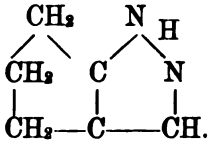
I. Pyrazole aus Pentanonen.

1. Die noch nicht bekannte Oxymethylenverbindung des Pentanon



siedet unter 40 mm bei 80—110° und erstarrt sehr schnell. Schmelzpunkt 72—73° unter vorhergehender Erweichung. Auch eine ganz concentrirte essigsaure Lösung giebt selbst bei mehrstündigem Stehen mit Semicarbazid keine Fällung. Die Umsetzung tritt aber schnell ein, wenn man der Flüssigkeit einige Tropfen concentrirter Schwefelsäure zusetzt. Es beginnt dann bald die Ausscheidung von Krystallen, die nach dem Umkrystallisiren aus Alkohol bei 175—177° schmelzen und die Zusammensetzung $C_7H_9N_3O$ aufweisen.

Beim Kochen mit verdünnter Schwefelsäure geht die Semicarbazidverbindung in Lösung und zerlegt sich dabei in dem erst erörterten Sinn. Bei der Neutralisation mit Ammoniak erhält man aus der sauren Lösung in krystallischer Form das Pyrazol $C_6H_8N_2$:



Aus Methylalkohol umkrystallisirt schmilzt die Base bei 57—59°.

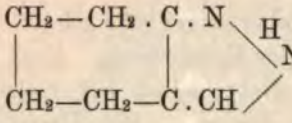
2. Die Oxymethylenverbindung des 1.3 Methylpentanons siedet unter 22 mm bei 105—112° und erstarrt gleichfalls leicht. Schmelzpunkt 53—54°. Die durch Umsetzung mit Semicarbazid daraus erhaltene Verbindung $C_8H_{11}N_3O$ schmilzt bei 115—116°, das aus ihr glatt entstehende Pyrazol $C_7H_{10}N_2$ fällt beim Neutralisiren der sauren Lösungen durch Ammoniak als Oel. Der Chlorhydrat $C_7H_{10}N_2HCl$ und das zugehörige Platindoppelsalz stellen gut krystallisirende Verbindungen vor.

II. Pyrazole aus Hexanonen.

1. Aus dem Cyklohexanon hat Hr. W. Grimmer auf meine Veranlassung die folgenden Verbindungen hergestellt:

Das Oxymethylenhexanon, $\begin{matrix} CH_2—CH_2 . CO \\ | \qquad\qquad | \\ CH_2—CH_2 . C : CH(OH), \end{matrix}$

Siedepunkt 98—100° unter 55 mm, das cyclische Semicarbazon daraus, $C_8 H_{11} N_3 O$, schmilzt zunächst (nicht ganz glatt) bei 183—185°, erstarrt wieder und schmilzt dann erst wieder (unvollkommen) gegen 220°. Das freie Pyrazol $C_7 H_{10} N_2$:



schmilzt bei 84°.

2. Verbindungen aus 1.3 Methylcyklohexanon.

Die Oxymethylenverbindung, $C_8 H_{12} O_2$, Siedepunkt 85° bei 12 mm, erstarrt leicht beim Abkühlen. Das Semicarbazon daraus, $C_9 H_{13} N_3 O$, schmilzt unscharf bei 154—157°. Die Pyrazolbase $C_8 H_{11} N_2$ schmilzt bei 99—100°, deren Chlorhydrat, $C_8 H_{11} N_2 . HCl$ bei 166—168°.

Diese leicht zugängliche Base ist etwas eingehender untersucht worden. Sie ist in viel heißem Wasser klar löslich und krystallisirt aus Wasser in feinen Nädelchen. Die wässrige Lösung reagirt gegen rothen Lackmusfarbstoff nur sehr schwach basisch.

Die wässrige Lösung giebt mit Mercurichlorid und mit Silbernitrat sofort Niederschläge von schwerlöslichen Doppelverbindungen. Die letztere Verbindung hat die Zusammensetzung $(C_8 H_{12} N_2)_2 NO_3 Ag$.

3. Verbindungen aus Bihydrocarvon.

Die Oxymethylen-Verbindung siedet unter 15 mm bei 115°. (Ber. Chem. Ges. **28**, 33). Mit Semicarbazid in Berührung bildet sie zunächst unter Austritt von 1 Mol. Wasser die bei 163—165° schmelzende Verbindung $C_{10} H_{14} \begin{matrix} : N . NH CO NH_2 \\ : CH(OH) \end{matrix}$, welche in Eisessiglösung mit etwas Schwefelsäure versetzt in die cyclische Verbindung $C_{10} H_{14} : \begin{matrix} N . N . CO NH_2 \\ \diagup \qquad\quad \\ CH \end{matrix}$ übergeht, die ihrerseits bei 125—127° schmilzt, dann wieder erstarrt und darauf unter Zersetzung erst oberhalb 140° schmilzt. Die durch Spaltung entstehende Pyrazolbase $\begin{matrix} C_{10} H_{14} — N_2 H \\ \diagdown \quad \diagup \\ CH \end{matrix}$ ist flüssig.

4. Verbindungen aus Tetrahydrocarvon.

Die Oxymethylenverbindung siedet unter 16 mm bei 131—135° und setzt sich mit Semicarbazid zu dem bei 179—182° schmelzenden Semicarbazon $C_{12}H_{19}N_3O$ um, das bei der Spaltung mit Schwefelsäure ein öliges Pyrazol liefert, dessen Platinsalz bei 226—228° schmilzt.

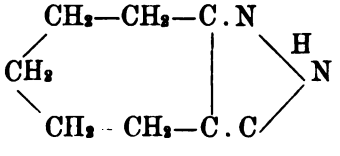
5. Verbindungen aus Menthon.

Aus der schon bekannten Oxymethylenverbindung des Menthons entsteht unter Austritt von 1 Mol. Wasser ein Semicarbazon, $C_{12}H_{21}N_3O_2$, das bei 167—169° schmilzt. Es spaltet unter den mehrfach erwähnten Bedingungen ein zweites Molekül Wasser ab, um in das cyclische Product überzugehen, das den doppelten Schmelzpunkt 117—118° und 143—144° zeigt.

Das Menthonpyrazol, $C_{11}H_{18}N_2$, ist eine ölige Base.

III. Pyrazol aus Heptanon.

Die Oxymethylenverbindung des Suberons $C_8H_{12}O_2$, siedet unter 10 mm bei 100°. Das cyclische Semicarbazon, $C_9H_{13}N_3O$, daraus schmilzt bei 181—183°, das Pyrazol



schmilzt bei 66—67°.

IV. Pyrazole der Thujonreihe.

1. Verbindungen aus Thujon.

Das krystallinische Oxymethylenthujon ist schon früher beschrieben worden (Ber. chem. Ges. 28, 33). Es giebt mit Semicarbazid zunächst ein Monosemicarbazon $C_{12}H_{19}N_3O_2$ vom Schmelzpunkt 179—181°, das in Eisessiglösung durch Schwefelsäure unter Wasserverlust in die cyclische Verbindung $C_{12}H_{17}N_3O$ vom Schmelzpunkt 133—134° übergeht.

Die freie Pyrazolbase des Thujons, $C_{11}H_{16}N_2$, ist ölig.

2. Verbindungen aus Isothujon.

Die Oxymethylenverbindung des Isothujons siedet bei 128—132° unter 18 mm Druck. Auch sie tauscht zunächst nur das Keton-

sauerstoffatom gegen den Semicarbazidrest aus. Die Verbindung $C_{12}H_{19}N_3O_2$ schmilzt bei 204—205°, verliert unter den mehrfach angegebenen Bedingungen Wasser und geht in das bei 193—194° schmelzende cyclische Product $C_{12}H_{17}N_3O$ über. Aus ersterem Semicarbazon wurde das Isothujonpyrazol, $C_{11}H_{16}N_2$, als gut krystallisirte Base vom Schmelzpunkt 89—90° erhalten.

3. Verbindungen aus Thujamenthon (dargestellt von W. Fritzsche).

Die Oxymethylenverbindung, $C_{11}H_{18}O_2$, siedet unter 11 mm bei 109—115°. Mit Semicarbazidlösung (ohne Zusatz von Schwefelsäure) reagirt die Verbindung nur langsam unter Austritt von 1 Mol. Wasser. Das sich abscheidende Product $C_{12}H_{21}N_3O_2$ schmilzt sehr unscharf zwischen 125—145°.

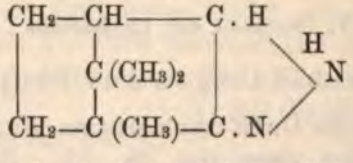
Bei Anwesenheit von Schwefelsäure condensirt sich die Oxymethylenverbindung des Thujamenthons mit Semicarbazid direct zu der cyclischen Verbindung $C_{12}H_{19}N_3O$, die den doppelten Schmelzpunkt 121—122° und 150—161° zeigt.

Das Pyrazol des Thujamenthons, $C_{11}H_{18}N_2$, ist flüssig.

V. Pyrazol aus Campher.

Oxymethylencampher verhält sich gegen Semicarbazid genau so wie die Oxymethylen-Verbindung von Thujamenthon. Es bildet sich zunächst die bei 217—218° schmelzende Verbindung $C_{12}H_{19}N_3O_2$, die unter Wasserabspaltung in die cyclische $C_{12}H_{17}N_3O$, mit dem unscharfen Schmelzpunkt 205—207°, überführbar ist.

Das Pyrazol des Camphers



krystallisirt gut und schmilzt bei 149—150°.

II. Ueber eine neue cyclische Base aus Methylheptenon.

Wenn man an das durch Reduction des Methylheptenonoxims entstehende Methylheptenylamin

$$(CH_3)_2C:CH.CH_2CH_2CH(NH_2)CH_3$$

in saurer Lösung Brom addirt, so entsteht beim Eindampfen dieser Lösung eine Base $C_8H_{15}N$, welche durch ihr auffallendes Verhalten

ausgezeichnet ist und welche ich als eine Pyrrolidin-Verbindung

$$(CH_3)_2\,C:C(-CH_2\,.\,CH_2)-NH-CH\,.\,CH_3$$

aufgefaßt habe (Ann. d. Chem. **319**, 119).

Das Methylheptenylamin vermag aber auch 2 Mol. Salzsäure aufzunehmen. Wenn man nun das so entstehende bei 153° schmelzende Bichlorhydrat für sich erhitzt, so entsteht nach Versuchen, welche in Gemeinschaft mit Herrn Petros Rhoussopoulos durchgeführt worden sind, neben einem Kohlenwasserstoff C_8H_{14} auch eine Base $C_8H_{17}N$. Diese Base ist durch folgende Eigenschaften characterisirt.

Siedepunkt 150—151°, d = 0,823, n_D = 1.4398 bei 20°
M = 40.65 (berechnet für $C_8H_{17}N$ = 40.87).

Das luftbeständige Chlorhydrat $C_8H_{17}N\,.\,HCl$ schmilzt bei 218—220°.

Bei der erschöpfenden Methylirung entsteht aus der Base leicht ein quaternäres Jodid, welches sich durch Lösen im Alkohol und Fällen mit Aether gut reinigen läßt, bei 242—243° schmilzt und die Zusammensetzung $C_8H_{16}N(CH_3)_2J$ besitzt.

Daraus geht hervor, daß die neue Base eine secundäre ist und man ihre Formel in $C_8H_{16}NH$ aufzulösen hat. Dem entsprechend läßt sich aus der Base auch eine Nitrosoverbindung $C_8H_{16}N\,.\,NO$ herstellen, welche bei 114° unter 10 mm siedet.

Je nach dem man für das als Ausgangsverbindung dienende Bichlorhydrat des Methylheptenylamins die Formel

I. $(CH_3)_2\,CCl\,.\,CH_2\,CH_2\,CH_2\,CH\,(NH_2)\,CH_3\,.\,HCl$ oder
II. $(CH_3)_2\,CH\,CHCl\,CH_2\,CH_2\,CH\,(NH_2)\,CH_3\,.\,HCl$

annimmt, kommt man für die secundäre Base $C_8H_{16}NH$ zu den Formeln

I.
$$(CH_3)_2\,C(-CH_2-CH_2-)-NH-CH\,(CH_3)-CH_2$$

oder

II.
$$(CH_3)_2\,CH\,.\,CH\,.\,CH_2\,CH_2$$
$$\qquad\qquad\qquad

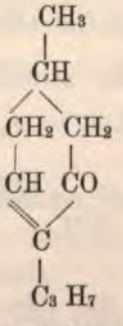
Gilbert auf ganz anderem Wege aus dem Methylheptenonoxim gewonnen worden ist (Ann. d. Ch. **319**, 80) und welche sich u. a. durch erheblich höheren Siedepunkt (160°) von der vorliegenden unterscheidet.

Ferner ist durch Willstätter erwiesen (Ann. d. Ch. **317**, 312, Ber. **34**, 139), daß bei „intramolekularer Alkylirung", wie sie im vorliegenden Fall anzunehmen ist, die Bildung von Pyrrolidinringen bevorzugt wird.

Nimmt man nun Formel II an, so erscheint die neue Base als Hydrirungsproduct der aus dem Bibrom-Methylheptenylamin gewonnenen Base $C_8H_{15}N$. Ob diese Beziehungen in der That existieren, bleibt noch durch besondere Versuche zu erweisen, ebenso, ob die beiden oben formulirten Hydrochloradditionsproducte des Methylheptenylamins isolirbar sind und — wofür die vorliegenden Beobachtungen zu sprechen scheinen — sich in ihrem Verhalten dadurch unterscheiden, daß I bei der trockenen Destillation den Kohlenwasserstoff C_8H_{14} liefert, während II unter denselben Bedingungen in die cyclische Base übergeht.

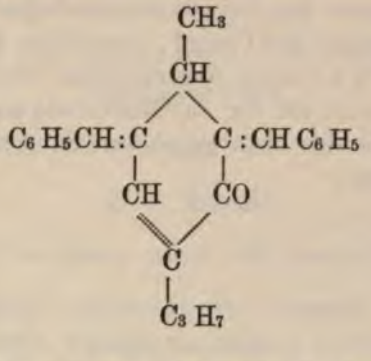
III. Ueber Verhalten und Constitution des Menthenons.

Vor einiger Zeit (Ann. d. Chemie **305**, 262) habe ich eine Reihe von Condensationsproducten zwischen Terpenonen und Benzaldehyd beschrieben, deren Zusammensetzung als „anormal" bezeichnet werden mußte, wenn man von der Voraussetzung ausging, daß sich in Ketonen bloß diejenigen Methylengruppen zur Condensation bringen lassen, welche der Carbonylgruppe des Ketons benachbart stehen. Am auffallendsten verhielt sich das aus dem Menthennitrosochlorid erhältliche Menthenon, dem man gemäß seiner Bildung die Formel



zuschreiben muß, das aber trotzdem sich mit zwei Mol. Benzaldehyd unter Austritt von 2 Mol. Wasser besonders leicht condensiren läßt.

Nun ist neuerdings durch verschiedene Forscher (Thiele, Henrich, Vorländer u. a.) darauf hingewiesen worden, daß Methylenwasserstoffatome ganz ähnlich wie durch eine benachbarte CO-Gruppe auch durch eine benachbart liegende Aethylenbindung in ihrer Reactionsfähigkeit beeinflußt werden können. Wenn das für das Menthenon obiger Formel auch zutrifft, so ist klar, daß dem erwähnten bei 130° schmelzenden Condensationsproduct die Formel



zukommen kann, daß man es also mit einem in Bezug auf das CH_3 symmetrischen Dibenzyliden-Menthenon zu thun hat.

Um diese plausibele Interpretation zu stützen, bedurfte es aber noch eines Nachweises dafür, daß dem Menthenon die angenommene Formel wirklich zukommt und daß nicht etwa bei seiner Entstehung weitgehende Bindungsverschiebungen Platz gegriffen haben.

Zu diesem Zweck habe ich schon vor längerer Zeit Herrn H. Schulenberg veranlaßt, das Menthenon durch Oxydation abzubauen. Dabei wurden als Spaltungsproducte Isobuttersäure und eine zweite Säure gefunden, welche 6 Kohlenstoffatome zu enthalten schien. Diese Resultate sprechen nicht gegen obige Formel, beweisen aber auch nicht viel. Es erschien daher nöthig noch besonders nachzuweisen, daß die Anordnung der Kohlenstoffatome im Menthenon thatsächlich noch dieselbe ist, wie im Menthon. Von diesem Gesichtspunkt aus sind durch Herrn Adolf Steindorff die folgenden Versuche ausgeführt worden.

Zunächst wurde nachgewiesen, daß sich das Menthenon, [welches beiläufig auch leicht in ein normal zusammengesetztes bei 135—136° schmelzendes Semicarbazon überführbar ist] sich in ätherischer Lösung bei Anwendung von viel überschüssigem metall. Natrium zu Menthol reduciren läßt. Das so gewonnene Menthol schmolz zwar niedriger als das natürliche Menthol, (wahrscheinlich bestand

es z. Th. aus einer physikalisch isomeren Modification), konnte aber durch Oxydation in Menthon übergeführt werden, dessen bei 184° schmelzendes Semicarbazon analysenrein vorlag.

Als sehr characteristische Verbindung hat sich das Additionsproduct von Brom zu Menthenon von der Formel $C_{10}H_{16}Br_2O$ und dem Schmelzpunkt 36°, herausgestellt. Die Substanz bildet sich leicht beim Zusammenbringen der Bestandtheile in Eisessig-Lösung. Sie verliert beim Erwärmen leicht Bromwasserstoff und unter den Zersetzungsproducten findet sich (leider nur in kleiner Menge) ein Phenol, das seinen Eigenschaften nach unzweifelhaft als Thymol angesprochen werden durfte. Durch diese Reactionen wird die für das Menthenon angenommene Formel und damit auch die der oben gegebenen Dibenzyliden-Verbindung wesentlich gestützt.

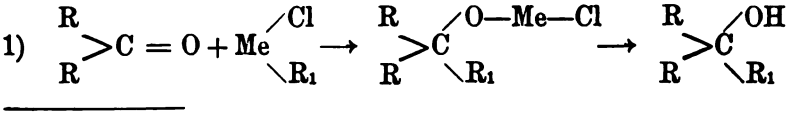
Ein Beitrag zur Kenntniß des vierwerthigen Sauerstoffs.

Von

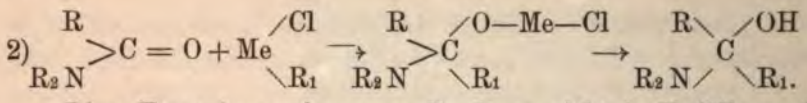
J. v. Braun.

Vorgelegt in der Sitzung vom 11. Juli durch O. Wallach.

Die im folgenden beschriebenen Versuche sind durch den Wunsch hervorgerufen worden zu solchen tertiären Basen zu gelangen, welche an einem dem Stickstoff benachbarten Kohlenstoffatom eine Hydroxylgruppe tragen und bis jetzt auf künstlichem Wege noch nicht erhalten worden sind, während man sie unter den natürlich vorkommenden Aminen (z. B. in der Gruppe der China-Alkaloide) bereits seit längerer Zeit kennt. Einen Weg, auf dem man scheinbar das Ziel hätte erreichen sollen, wies eine vor kurzer Zeit von mir gemachte flüchtige Beobachtung, wonach Säureamide $R.CO.NR_2$ gegenüber einem Gemenge von Zink und Halogenalkylen, oder gegenüber den nach Grignard[1]) leicht zu erhaltenden Magnesiumhalogenalkylaten die gleiche Reaktionsfähigkeit zeigen, wie sie seit längerer Zeit für Säureester und -chloride, Aldehyde und Ketone bekannt ist: Es lag nämlich nahe, die Doppelbindung zwischen Kohlenstoff und Sauerstoff, die in diesen letzteren Körpern den Angriffspunkt für die Reaktion bietet, auch bei den Amiden als maßgebend zu betrachten, und dann mußte man aus einem Amid die Bildung einer hydroxylierten Base (2) analog z. B. der Bildung eines tertiären Alkohols aus einem Keton (1) erwarten:



1) Compt. rend. 130. 1322 [1900].



Diese Erwartung ging nun allerdings nicht in Erfüllung, hingegen aber führten die Versuche zu einem andern, theoretisch nicht uninteressanten Resultat.

Mit Zink oder Magnesium und Halogenalkylen, oder mit fertigen Magnesiumhalogenalkylaten reagiren die Säureamide sehr heftig: trägt man in ein Gemenge eines Säureamids [1]) (1 Mol.-Gew.) und Halogenalkyls (1 Mol.-Gew.) geraspeltes Zink (1 Mol.) ein, so beginnt beim Erwärmen eine Reaktion, die unter Wärmeentwicklung und mit einer von Moment zu Moment sich steigender Heftigkeit verläuft und zuweilen zu einer vollständigen Verkohlung der Reaktionsmasse führt. Noch heftiger ist die Einwirkung von gepulvertem Magnesium. Durch Verdünnen der Componenten mit Benzol läßt sich die Reaktion sehr mildern: das Zink wirkt dann außerordentlich träge und langsam ein, das Magnesium geht — schon bei schwachen Erwärmen — nach kurzer Zeit in Lösung und es resultiren vollkommen klare meist grünlich-braun gefärbte Lösungen. Am schnellsten wirkt fertiges Magnesiumhalogenalkylat, wie man es durch zusammenbringen von Magnesium und Halogenalkyl in ganz trockenem Aether erhält: beim Zusammengießen der aetherischen Lösungen des Amids (1 Mol.-Gew.) und des Alkylats (1 Mol.-Gew.) tritt momentan eine starke Erwärmung und in den meisten Fällen eine Abscheidung des Reaktionsproduktes ein. Die Produkte der Reaktion die man auf dem einen oder andern Wege erhält sind in Benzol leicht löslich, in Aether schwer löslich, in Petrolaether unlöslich und lassen sich aus Benzol und aus Aether vollständig durch Zusatz von Ligroin ausfällen. In ihrem Aussehen ähneln sie — gleichgiltig ob Zink oder Magnesium zu ihrer Darstellung Verwendung gefunden hat — denjenigen, Produkten die man aus Ketonen und Aldehyden mit Zink und Halogenalkylen erhält. In den meisten Fällen, so bei Verwendung von $C_2H_5O.CON(C_2H_5)_2$, Mg und JCH_3, $CH_3CON(C_2H_5)_2$ resp. $CH_3CON(C_3H_7)_2$, Mg oder Zn und JCH_3 resp. JC_3H_7, $CH_3CO.N(CH_3)C_6H_5$, Mg und JC_5H_{11}, $C_4H_9.CO.N(CH_3)C_6H_5$ [2]), Mg und JCH_3, $CH_3CON(C_3H_7)_2$, Mg oder Zn und

1) Um intramolekulare Atomverschiebungen, wie sie bei primären und sekundären Säureamiden nicht ausgeschlossen sind, zu vermeiden, wurde bloß mit tertiären Verbindungen gearbeitet.

2) Dargestellt durch Umsetzung von Valerylchlorid C_4H_9COCl und Methylanilin in Aether. Schwach gelblich gefärbte Flüssigkeit vom Sdp. 258—262° bei gew. Druck, 151—152° bei 14 mm.

$BrCH_2.CO_2C_2H_5$, $CH_3CON(C_2H_5)_2Mg$ und BrC_6H_6, $C_6H_5CON(C_2H_5)_2$, Mg und JC_5H_{11}, $C_6H_5CON(C_2H_5)C_6H_5$, Mg und JCH_3 u. s. w. konnten sie nur als gummiartige nicht krystallisirende Substanzen erhalten werden, die auch durch Lösen in Benzol und Fällen mit Petroläther ihr Aussehen nicht veränderten. Das aus Methylphenylvaleramid und Jodmethyl mit Hilfe von Magnesium dargestellte Produkt gelang es durch sehr vorsichtigen Zusatz von Ligroïn zur benzolischen Lösung in Form eines festen weißen Pulvers zu erhalten, dasselbe verwandelte sich jedoch nach kurzer Zeit selbst im evacuirten Exsiccator in ein zähes Gummi. Die qualitative Prüfung ergab für alle die so erhaltenen Körper die Anwesenheit von Kohlenstoff, Stickstoff, Metall und Halogen; ihre quantitative Zusammensetzung ließ sich natürlich in Anbetracht ihrer Beschaffenheit nicht direkt ermitteln. Daß sie aber durch Zusammentritt eines Mol. Amid, eines At. Metall und eines Mol. Halogenalkyl zu stande kommen, folgt mit Wahrscheinlichkeit daraus, daß auf 1 Mol. Amid genau 1 At. Metall verbraucht wird und sich beispielsweise beim Arbeiten in Benzol mit überschüssigem Magnesium der Ueberschuß an Magnesium ziemlich quantitativ zurückgewinnen läßt.

Sehr merkwürdig erwies sich das Verhalten der Verbindungen beim Verseifen, welches der Erwartung zufolge zu tertiären in nächster Nähe des Stickstoffs hydroxylierten Basen hätte führen sollen. Zur Hydrolyse sind die Körper im allgemeinen bedeutend weniger geneigt als die Magnesiumhalogenalkylate: nur einige wenige wie z. B. das Einwirkungsprodukt von Magnesium und Jodmethyl auf Diaethylurethan und von Brombenzol und Magnesium auf Diaethylacetamid werden schon von kaltem Wasser zersetzt; die meisten sind gegen Wasser ganz beständig, während die Magnesiumhalogenalkylverbindungen bekanntlich durch Wasser eine momentane Zersetzung erleiden. Von Säuren werden sie dagegen wenn auch langsam angegriffen und als Produkte dieser Zersetzung erscheinen nicht tertiäre hydroxylhaltige Basen sondern die zur Reaktion angewandten Säureamide auf der einen Seite und auf der andern diejenigen Kohlenwasserstoffe, die den angewandten Halogenalkylen entsprechen. Zersetzt man beispielsweise das Einwirkungsprodukt von Bromessigester und Zink auf Diaethylacetamid mit verd. H_2SO_4, so macht sich momentan der intensive Essigester-Geruch bemerkbar und nach stattgefundener vollständiger Zersetzung scheidet sich der Ester in reiner Form ab; aus der sauren wäßrigen Lösung fällt Natronlauge des Diaethylacetamid. Die Einwirkungsprodukte von Jodmethyl resp. Jodpropyl auf Diaethyl-

und Dipropylacetamid, Diaethyl- und Aethylphenylbenzamid entwickeln bei der Zersetzung mit Säuren ein brennbares Gas (Methan resp. Propan) und liefern die ursprünglichen Amide in Quantitäten bis zu 95 % zurück. Aus dem durch Evacuiren möglichst von Petroläther befreiten Einwirkungsprodukt von Amyljodid $C_5H_{11}J$ auf Diaethylbenzamid ließ sich neben dem Amid eine — allerdings geringe — Menge einer Flüssigkeit isoliren, die bei ca 30° siedete, stickstoff- und hologenfrei war und wahrscheinlich das dem Jodid entsprechende Pentan darstellt. Aus Diaethylacetamid und Brombenzol gelang es etwas Benzol zu erhalten.

Ein derartiger Verlauf der Zersetzung ist nun, so werthlos die ganze Reaktion dadurch auch in praktischer Hinsicht erscheint insofern interessant, als er zu einer ganz neuen Auffassung der Natur der Additionsprodukte von Metallhalogenalkylaten an Säureamide führt. Die anfangs in Betracht gezogene Formel

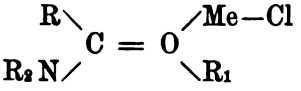
muß als ausgeschlossen gelten; erstens weil sie die Abspaltung des Radikals R_1 vom Kohlenstoff, also die Auflösung einer Kohlenstoff-Kohlenstoffbindung voraussetzen würde, und zweitens weil ein Körper von dieser Formel einerlei ob er aus einem Amid $\begin{matrix} R \\ R_1 \\ R_2N \end{matrix}\!>\!CO$ und einem Halogenalkyl ClR_1, oder einem Amid $\begin{matrix} R_1 \\ R_2N \end{matrix}\!>\!CO$ und einem Halogenalkyl ClR entstanden ist, in beiden Fällen dieselben Spaltungsstücke liefern mußte, während in Wirklichkeit, wie aus einigen der angeführten Beispiele hervorgeht immer das angewandte Amid zurückgebildet wird. Sucht man sich nun eine Vorstellung darüber zu machen, in welcher Weise die einzelnen Bestandteile in unseren Körpern verbunden sind, so hat man wohl zunächst blos mit drei Möglichkeiten zu rechnen:

1. Die Elemente des Metallhalogenalkylats werden durch die zwei supplementären Valenzen des Stickstoffs gebunden. — Diese Annahme ist wenig wahrscheinlich, da die Additionsfähigkeit des Stickstoffs in den Amiden eine nur geringe ist und weil tertiäre Amine (z. B. Dimethylanilin) unter denselben Bedingungen wie die Amide nicht mit Metallen und Halogenalkylen reagiren.

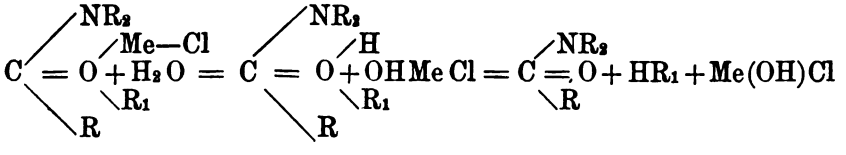
2. Das Amid und das Metallhalogenalkylat stehen im molekularen Verband miteinander. — Auch diese Annahme ist wenig wahrscheinlich in Anbetracht namentlich der Thatsache, daß Magnesium und Halogenalkyl allein in Bezol kaum auf einander ein-

wirken und daß Magenesiumhalogenalkylate so leicht durch Wasser zersetzt werden.

3. Die Elemente des Halogenalkyls und das Metallatom werden von den zwei supplementären Valenzen des Sauerstoffs gebunden:



Diese noch vor wenigen Jahren kaum discutirbare Hypothese, kann heute, wo die Vierwerthigkeit des Sauerstoffs wohl allgemein anerkannt sein dürfte, ernstlich in Betracht gezogen werden, um so mehr, als die Additionsfähigkeit der Magnesiumhalogenalkylverbindungen an zweiwerthigen Sauerstoff auch in einen andern Fall, bei Verbindungen welche diese Körper mit Aether liefern[1]), wahrscheinlich anzunehmen ist. Befremdend erscheint dann allerdings die Zersetzung unserer Körper, die dann nach der Gleichung:



verlaufen muß. Ob nun eine solche Spaltung, die für den zweiwerthigen Sauerstoff als ganz anormal gelten müßte, beim vierwerthigen Sauerstoff etwas normales darstellt, läßt sich bei dem heutigen Zustand unserer Kenntnisse über den vierwerthigen Sauerstoff leider nicht sagen. Die exakte experimentelle Prüfung der Frage, ob man es in unsern Verbindungen in der That mit Derivaten des vierwerthigen Sauerstoffs zu thun hat, erscheint infolge dessen im Augenblick kaum möglich und muß erst einer späteren Zukunft überlassen werden.

1) Vgt. Baeyer und Villiger Ber. 35. 1202 [1902].

Ueber näherungsweise gesättigte Ströme zwischen plan-parallelen Platten.

Von

Eduard Riecke.

Vorgelegt in der Sitzung der Gesellschaft vom 25. Juli.

In zwei früheren Arbeiten[1]) habe ich die Theorie der Ströme entwickelt, die zwischen zwei koncentrischen Kugelflächen in Folge von Ionisierung der in dem Hohlraume enthaltenen Luft auftreten. Es ergab sich, daß die Beobachtung dieser Ströme ein Mittel giebt, um die Constante α der Wiedervereinigung zu bestimmen. Mit Rücksicht auf diese Möglichkeit schien es mir von Interesse, auch den Fall eines zwischen zwei plan-parallelen Platten eingeschlossenen Luftraumes einer etwas genaueren Untersuchung zu unterwerfen.

I. Die allgemeinen Gleichungen des Problemes.

Von zwei unendlichen Platten, die einander in dem Abstande l parallel gegenüber gestellt sind, sei die eine positiv geladen, die andere mit der Erde leitend verbunden. Die Intensität des zwischen den Platten eingeschlossenen elektrischen Feldes sei $\mathfrak{F}$. Die Luft in dem Zwischenraume der Platten werde etwa durch Röntgen- oder Radiumstrahlen ionisiert. Die Ionisierungsstärke sei q, die Dichte des durch die Kraft $\mathfrak{F}$ erzeugten elektrischen Stromes c. Die Dichten der positiven und der negativen Ionen seien $\overset{+}{N}$ und $\bar{N}$, ihre absoluten Beweglichkeiten U und V, ihre Diffusionskoëffi-

1) Nachrichten d. K. G. d. W. zu Göttingen, math.-phys. Cl. 1903. Heft 1 und 2. Annalen d. Physik 1903. Bd. 12. S. 52.

cienten $\overset{+}{k}$ und $\bar{k}$. Der Coëfficient der Wiedervereinigung sei α, das elektrische Elementarquantum werde mit ε, die Lichtgeschwindigkeit mit ν bezeichnet. In irgend einem Punkte der positiven Platte errichten wir die Normale. Ihren Fußpunkt machen wir zum Nullpunkt, ihren nach der negativen Platte hinübergehenden Zweig zur positiven Richtung einer Axe x.

Dann ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}-\bar{N}),$$

$$\nu\varepsilon(U\overset{+}{N}+V\bar{N})\mathfrak{F}-\varepsilon\frac{d}{dx}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}-\bar{k}\bar{N}) = \mathfrak{c},$$

(I)

$$q = \nu U\frac{d(\overset{+}{N}\mathfrak{F})}{dx}-\overset{+}{k}\frac{d^2\overset{+}{N}}{dx^2}+\alpha\overset{+}{N}\bar{N},$$

$$q = -\nu V\frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx}-\bar{k}\frac{d^2\bar{N}}{dx^2}+\alpha\overset{+}{N}\bar{N}.$$

Wir haben vier Gleichungen und wir können als Unbekannte die Größen $\mathfrak{F}$, q, $\overset{+}{N}$, $\bar{N}$ betrachten; vorausgesetzt wird dann, daß die Stromdichte $\mathfrak{c}$ durch Beobachtung bestimmt ist.

II. Der Sättigungsstrom.

Vernachlässigt man den Einfluß der Wiedervereinigung und der Diffusion, so erhält man:

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}-\bar{N}),$$

(II)

$$\nu\varepsilon(U\overset{+}{N}+V\bar{N})\mathfrak{F} = \mathfrak{c},$$

$$q = \nu U\frac{d(\overset{+}{N}\mathfrak{F})}{dx} = -\nu V\frac{d(\bar{N}\mathfrak{F})}{dx}.$$

Die Auflösung der Gleichungen führt zu den folgenden Formeln:

$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_0^2-\frac{8\pi\mathfrak{c}}{\nu V}x+\frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV}qx^2.$$

(III)

$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \frac{q}{\nu U}x, \qquad \bar{N}\mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{c}}{\nu\varepsilon V}-\frac{q}{\nu V}x,$$

$$\mathfrak{c} = \varepsilon q l.$$

Für $x = 0$ wird:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_0, \qquad \overset{+}{N}_0 = 0, \qquad \bar{N}_0\mathfrak{F}_0 = \frac{c}{\nu\varepsilon V} = \frac{q}{\nu V}l.$$

Für $x = l$:

$$\overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l = \frac{q}{\nu U}l, \qquad \bar{N}_l\mathfrak{F}_l = 0.$$

Es ist also:

$$\varepsilon\nu V\bar{N}_0\mathfrak{F}_0 = \varepsilon\nu U\overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l = c.$$

Mit Benutzung dieser Werthe kann man die Gleichungen III auf die Form bringen:

$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_0^2 - 8\pi\varepsilon\bar{N}_0\mathfrak{F}_0 x + 4\pi\varepsilon(\bar{N}_0\mathfrak{F}_0 + \overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l)\frac{x^2}{l} \cdot$$

(III′)
$$\overset{+}{N}\mathfrak{F} = \overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l\frac{x}{l}, \qquad \bar{N}\mathfrak{F} = \bar{N}_0\mathfrak{F}_0\left(1-\frac{x}{l}\right),$$

$$c = \varepsilon q l.$$

Um von den Werthen der in diesen Gleichungen auftretenden Coëfficienten eine bestimmtere Vorstellung zu bekommen, scheint es nützlich, sie so weit möglich, in numerischer Form aufzustellen. Wir benützen zu diesem Zwecke die Werthe:

$$U = 1{,}26 \times 10^{-6}, \qquad V = 1{,}74 \times 10^{-6}, \qquad \frac{V}{U} = 1{,}38.$$

$$\frac{\overset{+}{k}}{U} = \frac{\bar{k}}{V} = 2{,}33 \times 10^{6},$$

$$\overset{+}{k} = 0{,}0293, \qquad \bar{k} = 0{,}0405,$$

$$\varepsilon = 4{,}69 \times 10^{-10}, \qquad \alpha = 1{,}59 \times 10^{-6}.$$

Dann wird:

$$\bar{N}_0\mathfrak{F}_0 = 0{,}00192 \times ql, \qquad \overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l = 0{,}00265 \times ql,$$
$$\mathfrak{F}^2 = \mathfrak{F}_0^2 - 0{,}226 \times 10^{-10}qlx + 0{,}268 \times 10^{-10}qx^2.$$

Daraus folgt, daß die Veränderlichkeit der Feldstärke im allgemeinen nur eine sehr kleine sein wird.

Die Theorie des Sättigungsstromes ist nur anwendbar, wenn $\alpha\overset{+}{N}\bar{N}$, $\overset{+}{k}\frac{d^2\overset{+}{N}}{dx^2}$ und $\bar{k}\frac{d^2\bar{N}}{dx^2}$ gegen q sehr klein sind.

Nun ist:

$$\alpha\overset{+}{N}\bar{N}\mathfrak{F}^2 = \alpha\overset{+}{N}_l\mathfrak{F}_l\bar{N}_0\mathfrak{F}_0\frac{x(l-x)}{l^2},$$

also mit Benützung der angegebenen Werthe:

$$\alpha \overset{+}{N}\bar{N} = 8{,}10 \times 10^{-13} \frac{q^2 x(l-x)}{\mathfrak{F}^2}.$$

Es muß somit q klein sein gegen

$$\frac{\mathfrak{F}^2}{8{,}10 \times x(l-x)} \times 10^{13}.$$

Es ist ferner:

$$\overset{+}{k}\overset{+}{N} = \overset{+}{k}\overset{+}{N}_1 \mathfrak{F}_1 \frac{x}{\mathfrak{F} l},$$

$$\frac{1}{\mathfrak{F}} = \frac{1}{\mathfrak{F}_0} + 0{,}113 \times 10^{-10} \frac{qlx}{\mathfrak{F}_0^3} - 0{,}134 \times 10^{-10} \frac{qx^2}{\mathfrak{F}_0^3}.$$

Somit:

$$\overset{+}{k} \frac{d^2 \overset{+}{N}}{dx^2} = \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^3} (1{,}75\, l - 6{,}21\, x) 10^{-15}.$$

Die Theorie des Sättigungsstromes setzt hiernach voraus, daß q klein sei gegen:

$$\frac{\mathfrak{F}_0^3}{1{,}75\, l - 6{,}21\, x} \times 10^{15}.$$

Aus der Bedingung, daß q groß sein soll gegen $\bar{k} \frac{d^2 \bar{N}}{dx^2}$, folgt ebenso:

$$q \text{ klein gegen } \frac{\mathfrak{F}_0^3}{6{,}21\, x - 3{,}78\, l} \times 10^{15}.$$

III. Nicht gesättigter Strom, erste Annäherung.

Von den Größen, die wir im vorhergehenden nach der Theorie des Sättigungsstromes berechnet haben, unterscheiden wir die in erster Annäherung für den nicht gesättigten Strom geltenden durch den Index 1. Die allgemeinen Gleichungen des Problemes kommen dann auf die folgende Form:

$$\frac{d\mathfrak{F}_1}{dx} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}_1 - \bar{N}_1),$$

$$\nu\varepsilon(U\overset{+}{N}_1 + V\bar{N}_1)\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{c} + \varepsilon \frac{d}{dx}(\overset{+}{k}\overset{+}{N} - \bar{k}\bar{N}),$$

(IV)

$$q_1 = \nu U \frac{d(\overset{+}{N}_1 \mathfrak{F}_1)}{dx} - \overset{+}{k} \frac{d^2 \overset{+}{N}}{dx^2} + \alpha \overset{+}{N}\bar{N},$$

$$q_1 = -\nu V \frac{d(\bar{N}_1 \mathfrak{F}_1)}{dx} - \bar{k} \frac{d^2 \bar{N}}{dx^2} + \alpha \overset{+}{N}\bar{N}.$$

Die Auflösung der Gleichungen führt zu den folgenden Ansätzen:

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}_0^2 + c_1 x + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV} q_1 x^2 + 8\pi\varepsilon \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}(\overset{+}{N} + \bar{N} - \bar{N}_0) - \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV}\alpha \int_0^x \int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}\,dx\,dx.$$

$$\overset{+}{N}_1 \mathfrak{F}_1 = \frac{\mathfrak{c}}{\nu\varepsilon(U+V)} + \frac{q_1}{\nu U} x + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{d\overset{+}{N}}{dx} - \frac{\alpha}{\nu U}\int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}\,dx + \frac{V}{8\pi\varepsilon(U+V)} c_1,$$

$$\bar{N}_1 \mathfrak{F}_1 = \frac{\mathfrak{c}}{\nu\varepsilon(U+V)} - \frac{q_1}{\nu V} x - \frac{\bar{k}}{\nu V}\frac{d\bar{N}}{dx} + \frac{\alpha}{\nu V}\int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}\,dx - \frac{U}{8\pi\varepsilon(U+V)} c_1.$$

Die Integrationskonstante c_1 bestimmt sich durch die Bedingungen, daß an den Elektrodenplatten

$$\mathfrak{c} = \varepsilon\nu V(\mathfrak{F}_1 \bar{N}_1)_0 + \varepsilon\bar{k}\left(\frac{d\bar{N}}{dx}\right)_0 = \varepsilon\nu U(\mathfrak{F}_1 \overset{+}{N}_1)_l - \varepsilon\overset{+}{k}\left(\frac{d\overset{+}{N}_1}{dx}\right)_l$$

sein muß.

Man findet:

$$c_1 = -\frac{8\pi\mathfrak{c}}{\nu V};$$

die Lösung der Gleichungen IV ist dann durch die folgenden Formeln gegeben:

$$q_1 = \frac{\mathfrak{c}}{\varepsilon l} + \frac{\alpha}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx = q + \frac{\alpha}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx.$$

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}^2 + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV}\alpha\left\{\frac{x^2}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx - 2\int_0^x\int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}\,dx\,dx\right\} + 8\pi\varepsilon\frac{\overset{+}{k}}{\nu U}(\overset{+}{N} + \bar{N} - \bar{N}_0),$$

(V)
$$\overset{+}{N}_1 \mathfrak{F}_1 = \overset{+}{N}\mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu U}\left\{\frac{x}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx - \int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}\,dx\right\} + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{d\overset{+}{N}}{dx},$$

$$\bar{N}_1 \mathfrak{F}_1 = \bar{N}\mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu V}\left\{\frac{l-x}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx - \int_x^l \overset{+}{N}\bar{N}\,dx\right\} - \frac{\bar{k}}{\nu V}\frac{d\bar{N}}{dx}.$$

Mit Benutzung der numerischen Werthe ergiebt sich:

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}^2 + 36{,}3 \times 10^{-24} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2}(l-x)^2x^2 + 0{,}67 \times 10^{-15} \times \frac{qx}{\mathfrak{F}_0},$$

$$\overset{+}{N}_1\mathfrak{F}_1 = \overset{+}{N}\mathfrak{F} + 3{,}56 \times 10^{-15} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2}(l-2x)(l-x)x + 0{,}228 \times 10^{-6} \frac{q}{\mathfrak{F}_0},$$

$$\bar{N}_1\mathfrak{F}_1 = \bar{N}\mathfrak{F} - 2{,}55 \times 10^{-15} \frac{q^2}{\mathfrak{F}_0^2}(l-2x)(l-x)x + 0{,}149 \times 10^{-6} \frac{q}{\mathfrak{F}_0}.$$

IV. Nicht gesättigter Strom, zweite Näherung.

In den Formeln I setzen wir an Stelle von $\overset{+}{N}$ und $\bar{N}$ in den mit α und k multiplicierten Gliedern die zuvor berechneten Größen $\overset{+}{N}_1$ und $\bar{N}_1$. Wir erhalten dann zur Berechnung der zweiten Annäherung die Formeln:

$$\frac{d\mathfrak{F}_2}{dx} = 4\pi\varepsilon(\overset{+}{N}_2 - \bar{N}_2),$$

$$v\varepsilon(U\overset{+}{N}_2 + V\bar{N}_2)\mathfrak{F}_2 = \mathfrak{c} + \varepsilon\frac{d}{dx}(\overset{+}{k}\overset{+}{N}_1 - \bar{k}\bar{N}_1),$$

$$q_2 = vU\frac{d(\overset{+}{N}_2\mathfrak{F}_2)}{dx} - \overset{+}{k}\frac{d^2\overset{+}{N}_1}{dx^2} + \alpha\overset{+}{N}_1\bar{N}_1,$$

$$q_2 = -vV\frac{d(\bar{N}_2\mathfrak{F}_2)}{dx} - \bar{k}\frac{d^2\bar{N}_1}{dx^2} + \alpha\overset{+}{N}_1\bar{N}_1.$$

Die Auflösung der Gleichungen giebt:

$$q_2 = q + \frac{\alpha}{l}\int_0^l \overset{+}{N}_1\bar{N}_1\,dx,$$

$$\mathfrak{F}_2^2 = \mathfrak{F}_0^2 - \frac{8\pi\mathfrak{c}}{vV}x + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{vUV}q_2x^2 + 8\pi\varepsilon\frac{\overset{+}{k}}{vU}(\overset{+}{N}_1 + \bar{N}_1 - \overset{+}{N}_{10} - \bar{N}_{10})$$

$$- \frac{8\pi\varepsilon(U+V)}{vUV}\alpha\int_0^x\int_0^x \overset{+}{N}_1\bar{N}_1\,dx\,dx, \qquad \text{(VI)}$$

$$\overset{+}{N}_2\mathfrak{F}_2 = \frac{q_2}{vU}x + \frac{\overset{+}{k}}{vU}\frac{d\overset{+}{N}_1}{dx} - \frac{\alpha}{vU}\int_0^x \overset{+}{N}_1\bar{N}_1\,dx,$$

$$\bar{N}_2\mathfrak{F}_2 = \frac{q_2}{vV}(l-x) - \frac{\bar{k}}{vV}\frac{d\bar{N}_1}{dx} - \frac{\alpha}{vV}\int_x^l \overset{+}{N}_1\bar{N}_1\,dx.$$

Wenn man in diesen Formeln an Stelle von q_2, $\overset{+}{N}_1$ und $\bar{N}_1$ die aus dem früheren folgenden Werthe substituiert, so ergeben sich

komplicierte Ausdrücke. Wir werden nur die erste der Gleichungen etwas weiter ausführen, da sich an diese die Möglichkeit knüpft, aus Beobachtungen nicht gesättigter Ströme den Werth der Constanten α der Wiedervereinigung zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke bringen wir die Gleichung auf die Form:

$$\varepsilon l q_2 - c = \alpha\varepsilon \int_0^l \overset{+}{N}_1 \bar{N}_1 dx.$$

Setzen wir zur Abkürzung:

$$\frac{x}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}dx - \int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}dx = \mathfrak{X}_1,$$

$$\frac{l-x}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}dx - \int_x^l \overset{+}{N}\bar{N}dx = \mathfrak{X}_2,$$

$$\frac{x^2}{l}\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}dx - 2\int_0^x\int_0^x \overset{+}{N}\bar{N}dx\,dx = \Xi,$$

so wird:

$$\overset{+}{N}_1\mathfrak{F}_1 = \overset{+}{N}\mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu U}\mathfrak{X}_1 + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\frac{d\overset{+}{N}}{dx},$$

$$\bar{N}_1\mathfrak{F}_1 = \bar{N}\mathfrak{F} + \frac{\alpha}{\nu V}\mathfrak{X}_2 - \frac{\bar{k}}{\nu U}\frac{d\bar{N}}{dx},$$

$$\mathfrak{F}_1^2 = \mathfrak{F}^2 + \frac{4\pi\varepsilon(U+V)}{\nu UV}\alpha\Xi + 8\pi\varepsilon\frac{\overset{+}{k}}{\nu U}(\overset{+}{N}+\bar{N}-\bar{N}_0).$$

Benützt man diese Werthe zur Berechnung des Integrales $\int_0^l \overset{+}{N}_1\bar{N}_1 dx$, so erhält man für α die Gleichung:

$$\varepsilon l q_2 - c =$$

$$\alpha\varepsilon\left[\int_0^l \overset{+}{N}\bar{N}dx + \frac{\overset{+}{k}}{\nu U}\left\{\int_0^l \frac{1}{\mathfrak{F}}\left(\bar{N}\frac{d\overset{+}{N}}{dx} - \overset{+}{N}\frac{d\bar{N}}{dx}\right)dx - 8\pi\varepsilon\int_0^l \frac{\overset{+}{N}\bar{N}(\overset{+}{N}+\bar{N}-\bar{N}_0)}{\mathfrak{F}^2}dx\right\}\right]$$

$$+\alpha^2\varepsilon\frac{1}{\nu UV}\left[\int_0^l \frac{V\bar{N}\mathfrak{X}_1 + U\overset{+}{N}\mathfrak{X}_2}{\mathfrak{F}}dx - 4\pi\varepsilon(U+V)\int_0^l \frac{\overset{+}{N}\bar{N}\Xi}{\mathfrak{F}^2}dx\right].$$

Die numerische Rechnung giebt:

$$\varepsilon l q_2 - c = \alpha\varepsilon \times 0{,}85 \times 10^{-6}\frac{q^2 l^2}{\mathfrak{F}_0^2}\left\{\begin{matrix} 1 + 4{,}65 \times 10^{-4}\dfrac{1}{\mathfrak{F}_0 l} \\ -3{,}34 \times 10^{-16}\dfrac{ql}{\mathfrak{F}_0^3}\end{matrix}\right\}$$

$$+\alpha^2\varepsilon \times 0{,}143 \times 10^{-12} \times \frac{q^2 l^5}{\mathfrak{F}_0^4}\left\{1 - 0{,}81 \times 10^{-12}\frac{ql^2}{\mathfrak{F}_0^2}\right\}.$$

Näherungsweise kann man schreiben:

$$\varepsilon l q_s - \mathfrak{c} = \alpha\varepsilon \times 0{,}85 \times 10^{-6} \frac{q^2 l^2}{\mathfrak{F}_0^2} + \alpha^2 \varepsilon \times 0{,}143 \times 10^{-12} \frac{q^2 l^5}{\mathfrak{F}_0^4} .$$

Hier ist:

$$\mathfrak{c} = \varepsilon l q.$$

Die Gleichung kommt daher auf die einfachere Form:

$$l(q_s - q) = \alpha \times 0{,}85 \times 10^{-6} \times \frac{q^2 l^2}{\mathfrak{F}_0^2} + \alpha^2 \times 0{,}143 \times 10^{-12} \times \frac{q^2 l^5}{\mathfrak{F}_0^4} .$$

Benützt man diese Gleichung zur Berechnung von α, so ergiebt sich:

$$\alpha = 1{,}18 \times 10^6 \times \frac{\mathfrak{F}_0^2 (q_s - q)}{l^2 q^2} \left\{ 1 - 0{,}20 \frac{q_s - q}{q} \right\} .$$

Der Werth von α wird also kleiner, wenn man das quadratische Glied mit berücksichtigt.

Führt man an Stelle von q_s und q die Dichten $\mathfrak{C}$ des Sättigungsstromes und $\mathfrak{c}$ des wirklich beobachteten Stromes ein, so wird:

$$\alpha = 5{,}52 \times 10^{-4} \times \frac{(\mathfrak{C} - \mathfrak{c}) \mathfrak{F}_0^2}{l \mathfrak{c}^2} \left(1 - 0{,}20 \frac{\mathfrak{C} - \mathfrak{c}}{\mathfrak{c}} \right) .$$

Zur Elektrodynamik. III.
Ueber die Bewegung des Elektrons.

Von

K. Schwarzschild.

(Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juli 1903 von F. Klein.)

§ 1. Einleitung.

Herrn Abraham's Theorie des masselosen, rein translatorisch bewegten Elektrons hat sich an den Versuchen von Herrn Kaufmann in der erstaunlichsten Weise bewährt[1]). Auf der andern Seite hat das Experiment bisher noch keine Wirkungen zu erkennen gegeben, die auf eine Rotation der Elektronen zurückzuführen waren. Dabei wäre es aber absurd, anzunehmen, daß die mit kolossaler Geschwindigkeit die Kathode verlassenden Elektronen nicht auch häufig bedeutende Rotationsgeschwindigkeiten aufweisen sollten. Die Dinge müssen also in Wirklichkeit so liegen, daß die Rotationen des Elektrons von relativ geringem Einfluß auf seine sichtbare Bewegung sind. Es erhebt sich daher die Frage, ob die Lorentz-Wiechert'sche Elektrodynamik für ein Elektron ohne wirkliche Masse auch von dieser — negativen — Thatsache Rechenschaft geben kann. Der erste Eindruck läßt sehr daran zweifeln. In den beiden einfachen Fällen der Rotation ohne Translation und der Rotation um die Richtung der Translation, welche von Herrn Abraham's Untersuchungen noch umfaßt werden, erweist sich die Wirkung der Rotationen freilich als gering. Sobald aber die Rotationsaxe schief steht gegen die Translationsrichtung, kann, wie Herr Abraham andeutet, das Elektron ohne Einwirkung äußerer Kräfte sich nicht mehr gradlinig weiter

1) Vgl. Drude's Annalen der Physik Bd. 10 p. 105 ff. und diese Nachrichten 7. März 1903.

bewegen, und es sieht fast so aus, als ob die translatorische Energie des Elektrons sich in rotatorische umsetzen und dann zu den merkwürdigsten Wirbelbewegungen des Elektrons führen würde. Hier ist also ein Punkt, über den Sicherheit herrschen muß, bevor die Vorstellung von dem Elektron ohne wirkliche Masse als logisch abgeschlossen gelten kann.

Wenn man nun von einem Variationsprinzipe ausgeht, welches sich sehr nahe an die in meiner früheren Mitteilung gegebenen anschließt, erweist es sich als verhältnismäßig leicht, nicht nur Herrn Abraham's Resultate über die Dynamik des Elektrons auf direktestem Wege wieder zu gewinnen, sondern auch über dieselben hinauszugehn bis zur Beherrschung der Bewegung des Elektrons für beliebige Translationen bei beliebig gerichteten Rotationen und damit die Frage nach der theoretischen Wirkung der Rotationen zur Entscheidung zu bringen. Natürlich wird dabei die Voraussetzung festgehalten, daß es sich um Bewegungen mit geringer Beschleunigung, um „quasistationäre" Bewegungen handelt. Das zieht, wie sich später zeigt, nach sich, daß die Rotationen einen Betrag nicht überschreiten dürfen, bei welchem die Oberfläche des Elektrons mit einem mäßigen Bruchteil der Lichtgeschwindigkeit herumgeführt wird.

Ein selbstständiges Interesse hat die folgende Untersuchung vielleicht nach der formalen Seite hin, insofern sie deutlicher die Art der Variationsprinzipe erkennen läßt, denen die Bewegung des Elektrons unterworfen ist. Es wird gezeigt, daß die Bewegung des Elektrons unter sehr allgemeinen Bedingungen aus einem Variationsprinzipe folgt, in welchem Funktionen aller höheren Differentialquotienten der Coordinaten auftreten. Im Falle der quasistationären Bewegung verwandelt sich dann das Variationsprinzip in ein eigentliches Minimalprinzip, welches sich nur dadurch von dem Hamilton'schen Prinzip der gewöhnlichen Mechanik unterscheidet, daß das kinetische Potential außer von den Geschwindigkeiten auch noch von den Beschleunigungen abhängt und für die Grenzzeiten bei der Variation Coordinaten und Geschwindigkeiten konstant zu bleiben haben. Man hat es also dann mit einem Beispiel zu Herrn L. Königsberger's erweiterter Mechanik zu thun. Bei der Spezialisierung auf Herrn Abraham's „ausgezeichnete Bewegungen" verschwinden schließlich die Beschleunigungen aus dem kinetischen Potential und man kommt in die engste Analogie zu den Verhältnissen, die in der gewöhnlichen Mechanik vorliegen.

§ 2. Die retardierten Potentiale des bewegten Elektrons.

Es sei χ die Dichte der Elektrizität im Raumelemente $d\omega$, es seien v_x, v_y, v_z ihre Geschwindigkeitskomponenten in demselben. Die Lichtgeschwindigkeit V werde gleich 1 gesetzt, obwohl sie gelegentlich zur Verdeutlichung der Dimensionen mit angeschrieben werden soll. Man definiere die retardierten Potentiale Φ, Γ_x, Γ_y, Γ_z durch die Integrale:

$$\Phi(t, x^0, y^0, z^0) = \int \frac{d\omega}{r}[\chi]_{t-\frac{r}{V}} \quad \Gamma_\nu(t, x^0, y^0, z^0) = \int \frac{d\omega}{r}[\chi v_\nu]_{t-\frac{r}{V}}. \quad \text{I)}$$

Hierbei bezeichne der Index ν eine der Coordinaten x, y, z. r sei der Abstand des Elementes $d\omega$ vom Aufpunkte x^0, y^0, z^0. Der Zusatz $t-\frac{r}{V}$ bedeute, daß in jedem Raumelement der Wert von χ oder χv_ν zu nehmen ist, welcher dort zu einer um die Lichtzeit vor t zurückliegenden Epoche galt.

Wir wollen Eigenschaften von Φ und Γ aufsuchen unter den folgenden speziellen Voraussetzungen: Wir denken uns ein einziges Elektron als im Raume existierend. Unter einem Elektron verstehen wir eine starre Kugel vom Radius R, welche mit gleichförmiger Raumdichte durch ihr Volumen hindurch elektrisch geladen ist. Außerhalb des Elektrons sei die Dichte der Elektrizität χ gleich null. Die Coordinaten und Geschwindigkeiten des Mittelpunkts des Elektrons zu irgend einer Zeit seien a_x, a_y, a_z und u_x, u_y, u_z, seine Rotationsgeschwindigkeiten um die Coordinatenaxen p_x, p_y, p_z. Ferner setze man:

$$x = a_x+\xi, \quad y = a_y+\eta, \quad z = a_z+\zeta$$

sodaß ξ, η, ζ Relativkoordinaten, bezogen auf den Mittelpunkt des Elektrons, bedeuten. Man hat dann für die Geschwindigkeit irgend eines Punktes des Elektrons:

$$v_x = u_x+p_y\zeta-p_z\eta, \quad v_y = u_y+p_z\xi-p_x\zeta, \quad v_z = u_z+p_x\eta-p_y\xi.$$

Wir wollen schließlich annehmen, daß die Bewegung des Elektrons jeder Zeit analytisch sei. Damit ist gemeint, daß die Mittelpunktskoordinaten und Rotationsgeschwindigkeiten für jedes t und hinreichend kleines $t'-t$ durch konvergente Reihen:

$$a_\nu(t') = a_\nu(t) + u_\nu(t)(t'-t) + u'_\nu(t)\frac{(t'-t)^2}{2!} + \cdots$$
$$p_\nu(t') = p_\nu(t) + p'_\nu(t)(t'-t) + p''_\nu(t)\frac{(t'-t)^2}{2} + \cdots \qquad \nu = x, y, z \qquad \text{II)}$$

dargestellt werden können.

Es ist unter diesen Voraussetzungen möglich, Φ und die Γ_ν für irgend eine Zeit t in Potenzreihen nach $u'_\nu(t)$, $u''_\nu(t)$, $p'_\nu(t)$, $p''_\nu(t)$ u. s. w. zu entwickeln. Es wird sich dies am bequemsten erkennen lassen, wenn wir die Anfangsglieder dieser Entwicklungen, nämlich die in den Beschleunigungen u'_ν und p'_ν linearen Glieder, wirklich aufstellen — zumal wir sie für die späteren Ableitungen nötig haben.

Zur Erleichterung der Schreibweise werde ich die Coordinaten statt mit x, y, z resp. ξ, η, ζ auch mit x_ν resp. ξ_ν ($\nu = x, y, z$) bezeichnen, ferner unter Σ eine Summe über die drei Coordinatenrichtungen verstehen und die Abhängigkeit einer Funktion von allen drei Coordinaten andeuten, indem ich unter ihren Argumenten nur x_ν anführe.

Beginnt man mit der Berechnung von Φ, so kommt in jedem Raumelement die Dichte χ zur Zeit $t-r$ (für $V = 1$) in Frage. Dieser Wert χ ist eine Funktion der Größen:

$$\xi_\nu = x_\nu - a_\nu(t-r)$$

und zwar derart, daß er konstant ist für $\Sigma\xi_\nu^2 < R^2$ und null für größere Werte der Summe. Der ursprüngliche Ausdruck von Φ lautet, ausführlicher geschrieben:

$$\Phi(x_\nu^0, t) = \int \frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x^0-x)^2+(y^0-y)^2+(z^0-z)^2}}\,\chi[x_\nu - a_\nu(t-r)].$$

Es empfiehlt sich, hier die Relativkoordinaten ξ_ν als neue Variable einzuführen. Durch Berechnung der Funktionaldeterminante der x_ν nach den ξ_ν geht Φ zunächst über in:

$$\Phi(x_\nu^0, t) = \int \frac{\delta\xi\,\delta\eta\,\delta\zeta\,\chi(\xi, \eta, \zeta)}{N} \qquad N = r - \Sigma(x_\nu^0 - x_\nu)u_\nu(t-r).$$

Es bleibt die Aufgabe, den Nenner N als Funktion der ξ_ν darzustellen, und das ist der Punkt, wo die Voraussetzung der analytischen Bewegung in's Spiel kommt. Es gilt nämlich:

$$r^2 = \Sigma[x_\nu^0 - x_\nu]^2 = \Sigma[x_\nu^0 - \xi_\nu - a_\nu(t-r)]^2$$

und, wenn man a_ν in Potenzreihen nach der Zeit entwickelt:

$$r^2 = \Sigma\left[x_\nu^0 - \xi_\nu - a_\nu(t) + u_\nu(t)\,r - u_\nu'(t)\frac{r^2}{2} + u_\nu''(t)\frac{r^3}{3!}\cdots\right]^2 \qquad \text{III)}$$

Aus dieser (im allgemeinen transcendenten) Grundgleichung kann man r explizit als Funktion der ξ_ν in Gestalt einer nach den Potenzen von $u_\nu'(t)$, $u_\nu''(t)$ u. s. w. fortschreitenden Reihenentwicklung gewinnen.

Man erhält eine erste Annäherung $\bar{r}$, indem man u_ν', u_ν'' u. s. w. vernachlässigt. Es geht dann die Grundgleichung in eine quadratische Gleichung für $\bar{r}$ über und es folgt als deren positive Lösung:

$$\bar{r}(1-u^2) = k + l. \qquad 1)$$

Dabei sind nachstehende Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned} u^2 &= \Sigma u_\nu^2 & k &= \sqrt{(1-u^2)\,\Sigma(\xi_\nu^0-\xi_\nu)^2 + l^2} \\ \xi_\nu^0 &= x_\nu^0 - a_\nu(t) & l &= \Sigma u_\nu(\xi_\nu^0-\xi_\nu) \end{aligned} \qquad 2)$$

Die ξ_ν^0 bedeuten Relativkoordinaten des Aufpunktes gegen den Mittelpunkt des Elektrons in seiner Lage zur Zeit t. Die Wurzel k ist stets absolut zu nehmen.

Setzt man diesen Näherungswert in den mit u_ν' behafteten Gliedern der Grundgleichung ein, so erhält man unter Berücksichtigung der ersten Potenzen von u_ν' die zweite Näherung, bei der wir stehen bleiben wollen:

$$r = \bar{r} - \tfrac{1}{2}\frac{\bar{r}^2}{k}\Sigma u_\nu u_\nu' - \tfrac{1}{2}\frac{\bar{r}^2}{k}\Sigma(\xi_\nu^0-\xi_\nu)u_\nu'. \qquad 3)$$

Bildet man nun den ganzen Nenner N:

$$\begin{aligned} N &= r - \Sigma[\xi_\nu^0 + a_\nu(t) - \xi_\nu - a_\nu(t-r)]\,u_\nu(t-r) \\ &= r - \Sigma\left[\xi_\nu^0 - \xi_\nu + u_\nu(t)\,r - u_\nu'(t)\frac{r^2}{2} + \cdots\right]\left[u_\nu - u_\nu' r + \frac{u_\nu''}{2}r^2\cdots\right], \end{aligned}$$

so erhält man durch Einsetzen aus (1) und (3) in der gewünschten Annäherung:

$$N = k + \frac{k^2-l^2}{2k(1-u^2)}\cdot\Sigma u_\nu'(\xi_\nu^0-\xi_\nu) + \frac{2k^2+3k^2l-l^3}{2k(1-u^2)^2}\Sigma u_\nu u_\nu'$$

und damit für Φ:

$$\Phi = \int\frac{d\xi\,\delta\eta\,\delta\zeta\,\chi}{N}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{k} + \frac{l^2-k^2}{2k^3(1-u^2)}\cdot\Sigma u_\nu'(\xi_\nu^0-\xi_\nu) + \frac{l^3-3k^2l-2k^3}{2k^3(1-u^2)^2}\Sigma u_\nu u_\nu'. \qquad \text{IVa)}$$

Die Entwicklung der Funktionen Γ_ν erfolgt auf völlig entsprechende Weise. Man hat hier nur z. B. bei Γ_x dem Integranden den Faktor

$$v_x(t-r) = u_x + p_y\xi - p_x\eta - r[u'_x + p'_y\xi - p'_x\eta] + \frac{r^2}{2}[u''_x + p''_y\xi - p''_x\eta] \cdots$$

hinzuzufügen.

Es empfiehlt sich dabei, die Hülfsfunktionen:

$$g_\nu(t, x^0, y^0, z^0) = \int \frac{\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\,\chi\,\xi_\nu}{N}$$

einzuführen. Damit wird der Ausdruck von Γ_x:

$$\begin{aligned}\Gamma_x = {} & u_x\Phi + p_y g_x - p_x g_y - \frac{u'_x}{1-u^2}\int\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\,\chi\left[1+\frac{l}{k}\right] \\ & - \frac{p'_y}{1-u^2}\int\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\,\chi\,\zeta\frac{l}{k} + \frac{p'_x}{1-u^2}\int\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\,\chi\,\eta\frac{l}{k} \qquad \text{IVb)} \\ & + \frac{p''_y}{(1-u^2)^2}\int\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\,\chi\,\zeta\frac{(l+k)^2}{2k} - \frac{p''_x}{(1-u^2)^2}\int\partial\xi\,\partial\eta\,\partial\zeta\chi\eta\frac{(l+k)^2}{2k}.\end{aligned}$$

Ich bin hier in der Annäherung — in Rücksicht auf späteres — etwas weiter gegangen, indem ich die Glieder mit p''_ν noch mitgenommen habe.

Es ist ersichtlich, wie man diese ganzen Entwicklungen, von der Grundgleichung (III) ausgehend, beliebig weit fortsetzen wird. Die Convergenzfrage für die entstehenden Reihen läßt sich in bekannter Weise mit Hülfe der Majorantenmethode beantworten. Die Convergenz wird offenbar davon abhängen, ob man den Wert der Potentiale in einem dem Elektron näher oder ferner gelegenen Punkte x^0, y^0, z^0 berechnen will. Je weiter der Punkt entlegen ist, um so frühere Lagen des Elektrons kommen für das zu einer bestimmten Zeit in diesem Punkte herrschende Feld in Betracht, für umso längere Zeitdifferenzen $t'-t$ werden die Entwicklungen (II) in Anspruch genommen. In der That ergiebt die Majorantenmethode das folgende Convergenztheorem:

„Die Entwicklung der Mittelpunktskoordinaten und Rotationsgeschwindigkeiten des Elektrons nach Potenzen der Zeit möge konvergieren für ein Zeitintervall $(t'-t) < T$. Entwickelt man dann die für den Moment t im Raumpunkt x^0, y^0, z^0 gültigen Werte der retardierten Potentiale nach den Potenzen der Beschleunigungen und ihrer sämtlichen Derivierten, so konvergieren diese Entwicklungen, wenn der Punkt x^0, y^0, z^0 innerhalb einer Kugel um den

Mittelpunkt des Elektrons (für dessen Lage zur Zeit t) liegt vom Radius:

$$\varrho < V T k,$$

wobei k einen numerischen Faktor bedeutet, der endlich ist, solange die Maximalgeschwindigkeit des Elektrons unter der Lichtgeschwindigkeit bleibt".

Ist insbesondere $T > \frac{1}{k}\frac{R}{V}$, T also größer als ein bestimmtes endliches Vielfaches der Zeit, innerhalb welcher das Elektron vom Lichte überstrichen wird, so konvergieren die Entwicklungen für alle Punkte innerhalb des Elektrons selbst.

Die Entwicklungen (IV) von Φ und Γ_ν und dieses Convergenztheorem sind es, welche für die folgenden Ableitungen gebraucht werden.

§ 3. Das Variationsprincip.

Das erste der beiden früher von mir angegebenen Variationsprinzipe[1]) kann man folgendermaßen aussprechen. Man bilde die Größe:

$$2J = \int d\omega\, \chi\, [-\Phi + \Sigma v_\nu \Gamma_\nu] \qquad \text{Va)}$$

das Integral über den ganzen Raum erstreckt. Φ und Γ_ν seien dabei die Werte der retardierten Potentiale, wie man sie aus der früheren Bewegung der Elektrizität nach (I) berechnet. Die Componenten der äußeren Kraft, welche auf die Materie wirkt, an der die Elektrizität haftet, mögen mit F_x, F_y, F_z bezeichnet werden. Man betrachte die wirkliche Bewegung der Elektrizität zwischen den Zeiten t_0 und t_1 und eine Nachbarbewegung, welche dadurch entsteht, daß der bei der wirklichen Bewegung zur Zeit t an der Stelle x, y, z befindliche Massenpunkt um die Strecken δx, δy, δz verschoben wird. Die hierbei am Raumpunkte x, y, z erfolgende Aenderung von χ und χv_ν bezeichne man mit $\delta\chi$ und $\delta(\chi v_\nu)$. Es gilt dann der Satz:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega\, [-\delta\chi \cdot \Phi + \Sigma \delta(\chi v_\nu)\Gamma_\nu + \Sigma F_\nu \delta x_\nu] = 0$$

unter der Voraussetzung, daß für die Grenzzeiten t_0 und t_1 die Verschiebungen δx_ν verschwinden. Hebt man letztere Beschrän-

1) Diese Nachrichten, 16. Mai 1903.

kung auf, so wird die Variation nicht gleich null, sondern, wie man leicht zeigt, gleich:

$$\left[\int d\omega\, \chi \cdot \Sigma \delta x_\nu \Gamma_\nu\right]_{t_0}^{t_1}. \qquad \text{Vb)}$$

Das Eigentümliche dieses Variationsprinzipes ist, daß das durch Φ und Γ ausgedrückte Feld nicht mitvariiert werden darf, als „gegeben" zu betrachten ist. Dadurch wird es aber für unsern Zweck ungeeignet. Denn bei dem Problem der Bewegung des Elektrons hängt das Feld von dieser Bewegung selbst ab. Wollten wir die Integralausdrücke (I) der retardierten Potentiale in J einsetzen, so erhielten wir eine Funktion der Geschwindigkeiten des Elektrons, bei welcher die Geschwindigkeiten nicht überall variiert werden dürften. Die Variation wäre keine totale.

Diese Schwierigkeit wird auf die unmittelbarste Weise umgangen, indem man wider die Vorschrift des obigen Variationsprinzips J total variiert und die Gesamtvariation zu bestimmen sucht. Was dann entsteht, ist freilich nicht das frühere Variationsprinzip, aber ein neues von einer Beschaffenheit, welche es gerade für unsere Zwecke brauchbar macht.

Man bezeichne die durch eine beliebige Variation der vorausgehenden Bewegung der Elektrizität herbeigeführte Aenderung von Φ und Γ_ν im Punkt x, y, z mit $\delta\Phi$ und $\delta\Gamma_\nu$. Dann hat man bei totaler Variation von J:

$$\delta\int 2J\,dt = \int dt \int d\omega\,[-\delta\chi\,\Phi - \chi\delta\Phi + \Sigma\delta(\chi v_\nu)\Gamma_\nu + \Sigma\chi v_\nu \delta\Gamma_\nu].$$

Diese Variation läßt sich in folgender Weise umformen. Die retardierten Potentiale genügen bekanntlich den Gleichungen:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\delta t^2} = \Delta\Phi + 4\pi\chi \qquad \frac{\partial^2\Gamma_\nu}{\delta t^2} = \Delta\Gamma_\nu + 4\pi\chi v_\nu.$$

Daraus folgt:

$$\frac{\partial^2\delta\Phi}{\partial t^2} = \Delta\delta\Phi + 4\pi\delta\chi \qquad \frac{\partial^2\delta\Gamma_\nu}{\partial t^2} = \Delta\delta\Gamma_\nu + 4\pi\delta(\chi v_\nu).$$

Begrenzt man das Volumen ω, über welches man das Integral J erstreckt, durch eine Fläche s, die zunächst nur an die Bedingung gebunden ist, daß sie alle vorhandene Elektrizität (alle Elektronen) einschließen muß und bezeichnet die äußere Normale von s mit n, so ergiebt sich durch einfache Anwendung der Green'schen Sätze:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2J\,dt =$$

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int d\omega \,[-2\,\delta\chi\,\Phi + 2\,\Sigma\,\delta(\chi v_\nu)\,\Gamma_\nu]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{d\omega}{4\pi}\left[\Phi\frac{\partial^2\delta\Phi}{\partial t^2} - \delta\Phi\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} - \Sigma\left(\Gamma_\nu\frac{\partial^2\delta\Gamma_\nu}{\partial t^2} - \delta\Gamma_\nu\frac{\partial^2\Gamma_\nu}{\partial t^2}\right)\right]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{ds}{4\pi}\left[\delta\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial n} - \Phi\frac{\partial\delta\Phi}{\partial n} - \Sigma\left(\delta\Gamma_\nu\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial n} - \Gamma_\nu\frac{\partial\delta\Gamma_\nu}{\partial n}\right)\right].$$

Was das erste Integral rechts angeht, so wissen wir aus dem früheren Variationsprinzipe (V), daß dasselbe den Wert hat:

$$+2\left[\int d\omega\,\chi\,\Sigma\,\Gamma_\nu\,\delta x_\nu\right]_{t_0}^{t_1} - 2\int_{t_0}^{t_1} dt\,\delta A$$

wobei zur Abkürzung mit: $\delta A = \int d\omega\,\Sigma F_\nu\,\delta x_\nu$ die Arbeit der äußeren Kräfte bezeichnet ist. Setzen wir ferner für einen Augenblick:

$$2\,\delta U = \Phi\frac{\partial\delta\Phi}{\partial t} - \delta\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \Sigma\left(\Gamma_\nu\frac{\partial\delta\Gamma_\nu}{\partial t} - \delta\Gamma_\nu\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial t}\right),$$

so lautet das zweite Integral rechts:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{d\omega}{2\pi}\frac{\partial\delta U}{\partial t}.$$

Wenn wir uns nun entschlössen, die Fläche s in's Unendliche rücken zu lassen, und zugleich voraussetzten, daß alle elektrische Ladungen im Endlichen liegen, so verschwände das Oberflächenintegral und es folgte:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,[\delta J + \delta A] = \left[\int d\omega\left(\frac{\delta U}{4\pi} + \chi\,\Sigma\,\Gamma_\nu\,\delta x_\nu\right)\right]_{t_0}^{t_\nu}$$

Indessen würde das hier zu Tage tretende Variationsprinzip unserem Vorhaben nicht angepaßt sein, für Φ und Γ_ν die Reihenentwicklungen des vorigen Paragraphen einzusetzen, da diese nur

für ein begrenztes Gebiet konvergieren. Ich wähle daher für die Begrenzung s von ω eine im Endlichen liegende Fläche und zwar — indem ich aus den allgemeinen Betrachtungen zu dem Fall des einen im Raume existierenden Elektrons zurückkehre — in jedem Augenblick eine zum Elektron konzentrische Kugel, welche das Elektron umschließt; der Radius der Kugel möge im übrigen vorläufig unbestimmt bleiben.

Es wird nützlich sein, von jetzt an besonders zu kennzeichnen, daß der Punkt, von dem die Potentiale Φ und Γ_ν abhängen, und welcher bei den vorstehenden Integrationen ω und s durchwandert, der frühere Aufpunkt x_ν^0 ist, und das soll dadurch geschehen, daß $d\omega$ und ds den Index ^{0} erhalten. Ferner führe man wieder die Relativkoordinaten des Aufpunktes, bezogen auf die gleichzeitige Lage des Mittelpunkts des Elektrons, ein:

$$\xi_\nu^0 = x_0^0 - a_0(t)$$

und bezeichne die Differentiation nach der Zeit bei festgehaltenen ξ_ν^0 mit $\frac{d}{dt}$. Dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_0^0} = \frac{\partial}{\partial x_0^0} \qquad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{dt} - \Sigma u_0 \frac{\partial}{\partial x_\nu^0}. \tag{4}$$

Beachtet man, daß die Kugel ω^0 in diesen Relativkoordinaten unveränderlich ist, so erhält man leicht:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{d\omega^0}{2\pi} \frac{\partial \delta U}{\partial t} = \left[\int \frac{d\omega^0}{2\pi} \delta U \right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \int \frac{ds^0}{2\pi} u_n \delta U,$$

wobei unter u_n die Projektion der Geschwindigkeit des Elektrons auf die Normale in ds^0 verstanden ist.

Benutzt man schließlich noch die Abkürzung:

$$\frac{\partial}{\partial n} + u_n \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \sigma}, \tag{5}$$

so erhält man die folgende endgültige Form des Variationsprinzipes:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt\,(\delta J + \delta A) = [\delta V]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} dt\, \delta W$$

$$\delta W = \frac{1}{8\pi} \int ds^0 \left[\delta\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} - \Phi \frac{\partial \delta\Phi}{\partial \sigma} - \Sigma \left(\delta\Gamma_0 \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial \sigma} - \Gamma_0 \frac{\partial \delta\Gamma_\nu}{\partial \sigma} \right) \right] \tag{VI}$$

$$\delta V = \int d\omega^0 \chi \Sigma \Gamma_\nu \delta x_\nu - \frac{1}{8\pi} \int d\omega^0 \left[\delta\Phi \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \Phi \frac{\partial \delta\Phi}{\partial t} - \Sigma \left(\delta\Gamma_\nu \frac{\partial \Gamma_\nu}{\partial t} - \Gamma_\nu \frac{\partial \delta\Gamma_\nu}{\partial t} \right) \right].$$

Die elementare Arbeit δA der äußeren Kräfte hat für das einzelne Elektron den Wert:

$$\delta A = \Sigma S_\nu \delta a_\nu + \Sigma D_\nu \delta \varrho_\nu$$

wo S_ν und D_ν die äußeren Schiebe- und Drehkräfte, δa_ν und $\delta \varrho_\nu$ Verrückungen und Drehungen des Elektrons sind.

Wollten wir — worauf jedoch von vornherein verzichtet werden soll — dem Elektron wirkliche Masse zuschreiben, so müßte unter dem Integrale links noch ein Glied $\delta \int dm \frac{v^2}{2}$ hinzugefügt werden.

§ 4. Allgemeine Bemerkung über analytische Variationsprinzipe.

Denkt man sich in das eben aufgestellte Variationsprinzip die in § 2 angedeuteten Reihenentwicklungen für Φ und Γ_ν eingesetzt, so wird dasselbe von folgender Beschaffenheit: J erscheint als Reihenentwicklung nach Potenzen von u'_ν, u''_ν, p'_ν, p''_ν u. s. w., deren Koeffizienten von u_ν und p_ν abhängen. Die Größen δW und δV erhalten die Form:

$$\begin{aligned} \delta W &= \Sigma \delta a_\nu A_\nu + \delta \varrho_\nu B_\nu + \delta u_\nu A_{1,\nu} + \delta p_\nu B_{1,\nu} + \delta u'_\nu A_{2,\nu} + \delta p'_\nu B_{2,\nu} + \cdots, \\ \delta V &= \Sigma \delta a_\nu P_\nu + \delta \varrho_\nu Q_\nu + \delta u_\nu P_{1,\nu} + \delta p_\nu Q_{1,\nu} + \delta u'_\nu P_{2,\nu} + \delta p'_\nu Q_{2,\nu} + \cdots, \end{aligned} \quad \text{VII)}$$

wobei die A_ν, B_ν, P_ν, Q_ν, $A_{1,\nu}$, $P_{1,\nu}$ u. s. w. wiederum Reihenentwicklungen nach u'_ν, p'_ν u. s. w. sind.

Zieht man die Fläche s bis auf die Oberfläche des Elektrons zusammen, so zeigt das Convergenztheorem aus § 2, daß die Entwicklungen der Größen J, A_ν, P_ν u. s. w. konvergieren, wenn für die $m$te Derivierte von u und p gilt:

$$u_\nu^{(m)} < \frac{\gamma}{T^m} \qquad p_\nu^{(m)} < \frac{\gamma}{T^m} \left(T = \frac{1}{k} \frac{R}{V}, \ \gamma \text{ endlich.} \right) \qquad 6)$$

Damit aber auch die ganzen Reihen (VII) für δW und δV konvergieren, muß die variierte Bahn denselben analytischen Charakter haben, es muß gelten:

$$\frac{\partial u_\nu^{(m)}}{\partial \alpha} < \frac{\gamma'}{T^m} \qquad \frac{\partial p_\nu^m}{\partial \alpha} < \frac{\gamma'}{T^m} \quad (\gamma' \text{ endlich}), \qquad 7)$$

wenn wir uns die Bahn etwa abhängig von einem Parameter α denken und die Variation der Bahn durch Variation von α bewirken.

Wie allgemein und unbeschränkt daher auch das Prinzip (VI) in Bezug auf die Art der erlaubten Variationen ursprünglich sein mag — sobald wir die Reihenentwicklungen nach den u'_ν, p'_ν u. s. w. und deren Variationen benutzen wollen, stehen uns nur analytische Bahnen mit der Beschränkung (6) und Variationen mit der Beschränkung (7), die wieder zu analytischen Bahnen führen, zur Verfügung. Mann kann dann nicht die übliche Schlußweise zur Ableitung der Differentialgleichungen des Variationsproblems anwenden, da mit den Werten der Variabeln a_ν, u_ν, u'_ν u. s. w. für die Anfangszeit bereits der ganze Verlauf der Bewegung bestimmt, eine reinliche Trennung zwischen Anfangswerten und Endwerten einerseits, Zwischenlagen andrerseits nicht durchzuführen ist. Trotzdem folgen auch bei Beschränkung auf analytische Bahnen noch diejenigen Differentialgleichungen, die man nach dem üblichen Variationsverfahren erhalten würde.

Man erhält aus (V) durch Verschiebung der oberen Integralgrenze t_1:

$$\delta J + \delta A = \delta W + \frac{d\delta V}{dt} \qquad \text{VIa)}$$

Es ist ferner:

$$\begin{aligned}\delta W + \frac{d\delta V}{dt} = \sum \delta\alpha_\nu \left(\frac{dP_\nu}{dt} + A_\nu\right) + \delta u_\nu \left(\frac{dP_{1,\nu}}{dt} + P_\nu + A_{1,\nu}\right) \\ + \delta u'_\nu \left(\frac{dP_{2,\nu}}{dt} + P_{1,\nu} + A_{2,\nu}\right) \qquad \text{VIIa)} \\ + \sum \delta\varrho_\nu \left(\frac{dQ_\nu}{dt} + B_\nu\right) + \frac{d\delta\varrho_\nu}{dt} Q_\nu + \delta p_\nu \left(\frac{dQ_{1,\nu}}{dt} + B_{1,\nu}\right) \\ + \delta p'_\nu \left(\frac{dQ_{2,\nu}}{dt} + Q_{1,\nu} + B_{2,\nu}\right) \\ + \cdots\end{aligned}$$

Man kann für den Moment t_1 alle Variationen δa_ν, δu_ν, $\delta u'_\nu \ldots \delta\varrho_\nu$, δp_ν, $\delta p'_\nu \ldots$ innerhalb gewisser durch die Convergenz bestimmter Grenzen willkürlich geben. Nur die Größe $\frac{d\delta\varrho_\nu}{dt}$ ist dadurch mit bestimmt. Denkt man sich nämlich für einen Augenblick die Drehungen $\delta\varrho_\nu$ als Funktionen der Zeit vorgeschrieben, so erhält man durch eine einfache Zusammensetzung elementarer Drehungen die daraus hervorgehenden Aenderungen der Rotationsgeschwindigkeit:

$$\delta p_\varkappa = \frac{d\delta\varrho_\varkappa}{dt} + \delta\varrho_\lambda p_\mu - \delta\varrho_\mu p_\lambda$$

(nebst den beiden entsprechenden Gleichungen) und daraus folgt umgekehrt die gewünschte Darstellung von $\frac{d\delta\varrho_\nu}{dt}$ durch $\delta\varrho_\nu$ und δp_ν:

$$\frac{d\delta\varrho_\varkappa}{dt} = \delta p_\varkappa + \delta\varrho_\varkappa p_\nu - \delta\varrho_\nu p_\varkappa$$

$$\frac{d\delta\varrho_\nu}{dt} = \delta p_\nu + \delta\varrho_\varkappa p_\varkappa + \delta\varrho_\varkappa p_\varkappa$$

$$\frac{d\delta\varrho_\varkappa}{dt} = \delta p_\varkappa + \delta\varrho_\nu p_\varkappa - \delta\varrho_\varkappa p_\nu .$$

Setzt man dies in (VIa) und (VIIa) ein, ordnet überall nach den Variationen δa_ν, δu_ν, $\delta\varrho_\nu$, δp_ν u. s. w. und setzt deren Coeffizienten gleich null, so erhält man:

$$S_\varkappa = A_\varkappa + \frac{dP_\varkappa}{dt} \qquad D_\varkappa = B_\varkappa + \frac{dQ_\varkappa}{dt} + p_\varkappa Q_\nu - q_\nu Q_\varkappa$$

$$\frac{\partial J}{\partial u_\varkappa} = A_{1,\varkappa} + \frac{dP_{1,\varkappa}}{dt} + P_\varkappa \qquad \frac{\partial J}{\partial p_\varkappa} = B_{1,\varkappa} + \frac{dQ_{1,\varkappa}}{dt} + Q_\varkappa \qquad \text{VIIIa)}$$

$$\frac{\partial J}{\partial u'_\varkappa} = A_{2,\varkappa} + \frac{dP_{2,\nu}}{dt} + P_{1,\varkappa} \qquad \frac{\partial J}{\partial p'_\varkappa} = B_{2,\varkappa} + \frac{dQ_{2,\varkappa}}{dt} + Q_{1,\varkappa}$$

u. s. w. (nebst den entsprechenden Gleichungen für die andern Koordinaten). Durch wiederholte Differentiationen folgt:

$$P_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu} - A_{1,\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial u'_\nu} - A_{2,\nu}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial J}{\partial u''_\nu} - A_{3,\nu}\right) - \cdots$$

$$Q_\nu = \frac{\partial J}{\partial p_\nu} - B_{1,\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial p'_\nu} - B_{2,\nu}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial J}{\partial p''_\nu} - B_{3,\nu}\right) - \cdots \qquad \text{VIIIb)}$$

Denkt man sich diese Funktionen der Geschwindigkeiten und ihrer Derivierten berechnet, so sind die Bewegungsgleichungen in den ersten Gleichungen des Systems (VIIIa) gegeben, sie lauten also:

$$\frac{dP_\varkappa}{dt} + A_\varkappa = S_\varkappa \qquad \frac{dQ_\varkappa}{dt} + B_\varkappa + p_\varkappa Q_\nu - p_\nu Q_\varkappa = D_\varkappa$$

$$\frac{dP_\nu}{dt} + A_\nu = S_\nu \qquad \frac{dQ_\nu}{dt} + B_\nu + p_\varkappa Q_\varkappa - p_\varkappa Q_\varkappa = D_\nu \qquad \text{VIIIc)}$$

$$\frac{dP_\varkappa}{dt} + A_\varkappa = S_\varkappa \qquad \frac{dQ_\varkappa}{dt} + B_\varkappa + p_\nu Q_\varkappa - p_\varkappa Q_\nu = D_\varkappa .$$

Die Vektoren P und Q sind in Analogie zur gewöhnlichen Mechanik als verallgemeinerter Schiebeimpuls und Drehimpuls zu bezeichnen.

Die Gleichungen (VIIIb) und VIIIc) stimmen, wie leicht nachzurechnen ist, in der That überein mit den Bedingungen, die man nach dem gewöhnlichen Variationsverfahren erhalten würde.

§ 5. Uebergang auf quasistationäre Bewegungen.

Sofern wir die Darstellung der retardierten Potentiale durch Reihenentwicklungen benutzen wollen, müssen wir uns bereits auf die Behandlung solcher Bewegungen beschränken, bei denen die Entwicklungen der Coordinaten des Elektrons nach t konvergieren für eine Zeitspanne von der Größenordnung derjenigen Zeit, in welcher das Licht das Elektron überstreicht. Indessen werden wir im folgenden in der Spezialisierung wesentlich weiter gehen und nur solche Bewegungen in Betracht ziehen, bei welchen bereits einige wenige Glieder der Taylorentwicklung eine gute Annäherung darstellen, Bewegungen, die man mit einer gewissen Erweiterung des Begriffs als quasistationär bezeichnen kann.

Man kann stets aus den Gl. (VIIIc) ausrechnen, mit welchen Kräften S_ν, D_ν man das Elektron führen muß, damit etwa die dritten Derivierten der Coordinaten verschwinden oder sehr klein bleiben. Das ist aber nicht das eigentlich interessante Problem. Vielmehr wünschen wir zu erfahren, ob und welche quasistationäre Bewegungen ein Elektron ausführen kann, welches frei ist oder willkürlichen relativ kleinen äußeren Kräften unterliegt. Will man an dieses Problem herankommen, ohne gar zu viel überflüssige Arbeit zu leisten, so ist ein gewisses Tatonnieren unumgänglich. Ich bin zuerst in der Weise vorgegangen, daß ich die Translations- und die Rotationsgeschwindigkeiten u und p beliebig groß (erstere nur unter der Lichtgeschwindigkeit) annahm, hingegen von den Beschleunigungen u' und p' in den Bewegungsgl. nur die ersten Potenzen berücksichtigte, höhere Derivierte u'', p'' u. s. w. aber ganz vernachlässigte. Es stellte sich heraus, daß eine solche Bewegung, wenn wirklich u' und p' klein, u'' und p'' von höherer Ordnung klein werden soll, im allgemeinen nicht ohne relativ große äußere Kräfte stattfinden kann. Wollte man zu Bewegungen unter kleinen und schließlich verschwindenden äußeren Kräften gelangen, so brauchte man zwar die Translationsgeschwindigkeit keiner neuen

Grenze zu unterwerfen, aber die Rotationsgeschwindigkeit mußte als klein vorausgesetzt werden, es mußte angenommen werden, daß die Oberfläche des Elektrons durch die Rotation mit einer gegen V kleinen Geschwindigkeit herumgeführt wird. Dabei trat der folgende Umstand ein. Entweder man vernachlässigte die dritte Potenz der Rotationsgeschwindigkeit. Dann zeigte es sich auch als zulässig, nur p' mitzunehmen, wie es von Anfang an geschehen war, und p'' zu vernachlässigen, die ursprünglichen Entwicklungen reichten aus. Aber es gingen bei dieser Verstümmelung des Problems grade die interessantesten Eigentümlichkeiten der Elektronenbewegung verloren. Oder aber man entschloß sich, noch die dritten Potenzen von p mitzunehmen. Dann konnte p'' nicht vernachlässigt werden, die ursprünglichen Entwicklungen mußten ergänzt werden. So stellte sich schließlich heraus, daß für eine freie oder geringen äußeren Kräften unterworfene quasistationäre Elektronenbewegung, die Ordnung der verschiedenen auftretenden Größen, gemessen an der Rotationsgeschwindigkeit, deren linearen Betrag für die Oberfläche des Elektrons ich mit ε bezeichnen will, in nachstehender Weise anzusetzen war:

Größe		Ordnung	Größe		Ordnung	
u'	oder schärfer $\frac{u'R}{V^2}$	ε^3	p	oder schärfer $\frac{pR}{V}$	ε	
u''	„ „ $\frac{u''R^2}{V^3}$	ε^4	p'	„ „ $\frac{p'R^2}{V^2}$	ε^2	IX)
u'''	„ „ $\frac{u'''R^3}{V^4}$	ε^5	p''	„ „ $\frac{p''R^3}{V^3}$	ε^3	

u. s. w.

Von diesem Resultat der Voruntersuchung ausgehend schlagen wir nun folgenden Weg ein. Wir stellen die Bewegungsgleichungen (VIIIc) auf und vernachlässigen in denselben alle Größen, welche in der eben fixierten Zählweise von der Ordnung ε^4 werden. Es ergiebt sich, daß die restierenden Gleichungen durch eine Bewegung befriedigt werden, bei welcher die Geschwindigkeiten und ihre Derivierten wirklich die vorausgesetzte Größenordnung haben. Daraus folgt, daß die so gefundene Bewegung für beschränkte Zeit eine Annäherung an die wirkliche Elektronenbewegung darstellen muß, welche um so besser sein wird, je kleiner der Parameter ε, die Rotationsgeschwindigkeit des Elektrons, gewählt wird.

Nachdem die Genauigkeitsgrenze auf ε^3 inkl. in den Bewegungsgleichungen festgelegt ist, lassen sich die Darstellungen (VIIIb) der Impulsvektoren wesentlich vereinfachen. Die erste Differentiation einer Funktion nullter Ordnung von u, p, u', p' u. s. w. nach der Zeit liefert eine Größe mindestens der Ordnung ε^2, da alle Glieder als Faktor u' oder p' oder eine noch höhere Derivierte enthalten müssen, jede weitere Differentiation erhöht die Ordnung mindestens um ε. Daraus ist abzulesen, daß man sich für die Impulskomponenten bei der verlangten Genauigkeit auf die Terme:

$$\begin{aligned} P_\nu &= \frac{\partial J}{\partial u_\nu} - A_{1,\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial u'_\nu} - A_{2,\nu}\right) \\ Q_\nu &= \frac{\partial J}{\partial p_\nu} - B_{1,\nu} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial J}{\partial p'_\nu} - B_{2,\nu}\right) \end{aligned} \qquad 8)$$

beschränken kann. Prüft man weiter, welche Kenntnis von J erforderlich ist, so sieht man leicht, daß man mit den nur von u und p abhängigen und den in den Beschleunigungen u' und p' linearen Termen ausreicht. Weiter unten wird J in dieser Genauigkeit berechnet werden. Wir wollen uns zunächst näher mit den aus der Variation δW entspringenden verschiedenen Größen A, B beschäftigen und zwar führen wir den

§ 6. Nachweis des Verschwindens von δW für quasistationäre Bewegungen.

Der Ausdruck (VI) von δW lautete:

$$\delta W = \frac{1}{8\pi}\int ds\left[\delta\Phi\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma} - \Phi\frac{\partial\delta\Phi}{\partial\sigma} - \Sigma\left(\delta\Gamma_\nu\frac{\partial\Gamma_\nu}{\partial\sigma} - \Gamma_\nu\frac{\partial\delta\Gamma_\nu}{\partial\sigma}\right)\right]$$

und nach (VII) sollte sein:

$$\delta W = \Sigma\delta a_\nu A_\nu + \delta\varrho_\nu B_\nu + \delta u_\nu A_{1,\nu} + \delta p_\nu B_{1,\nu} + \delta u'_\nu A_{2,\nu} + \delta p'_\nu B_{2,\nu} + \cdots$$

Es ist mit einer Betrachtung der Fläche s, über welche das Integral δW sich erstreckt, zu beginnen. Oben war angegeben, daß dieselbe eine das Elektron konzentrisch umschließende Kugel von vorläufig unbestimmtem Radius sein sollte. Es würde sich aber in den bisherigen Ableitungen nichts ändern, wenn wir für s eine beliebige das Elektron umschließende und parallel zu sich selbst mit ihm fortschreitende Fläche nehmen würden. In der That wollen wir eine zweite derartige Fläche $\bar{s}$, welche das Volumen $\bar{\omega}$ umschließen möge, in's Auge fassen, und alle Größen,

welche bei dem Ersatz von s durch $\bar{s}$ und ω durch $\bar{\omega}$ sich ergeben, ebenfalls mit einem Querstrich versehen.

Wir ziehen ferner noch für einen Augenblick das oben eingeführte über das Volumen ω erstreckte Integral δV heran. Man zeigt durch dieselben Umformungen mit Hülfe der Green'schen Sätze, die in § 3 zur Ableitung des Variationsprinzipes erforderlich waren, daß die Gleichung besteht:

$$\delta W + \frac{d\delta V}{dt} = \delta \bar{W} + \frac{d\delta \bar{V}}{dt}, \qquad 9)$$

daß der Ausdruck $\delta W + \frac{d\delta V}{dt}$ von der Wahl der Fläche s unabhängig ist.

Unter (VIIa) war dieser Ausdruck bereits nach Variationen δa_ν, $\delta \varrho_\nu$, δp_ν u. s. w. zerlegt, und es sind die dort auftretenden Faktoren der einzelnen Variationen — wie z. B. $\frac{dP_\nu}{dt} + A_\nu$, $\frac{dQ_{2,\nu}}{dt} + Q_{1,\nu} + B_{2,\nu}$ u. s. w. — die nachher in die Bewegungsgleichungen eingehn. Jeder Faktor selbst ist in eine Reihe nach den u'_ν, p'_ν u. s. w. entwickelbar unter der einen Voraussetzung, daß die Fläche s und das Volumen ω, über die bei der Bildung von δW und δV zu integrieren ist, noch völlig im Convergenzbereich der Entwicklungen der retardierten Potentiale liegt. Ich will eine solche Entwicklung etwa andeuten durch die Gleichung:

$$\frac{dP_\sigma}{dt} + A_\sigma = \alpha_0 + \sum \alpha_{1,\nu} u'_\nu + \sum \alpha_{2,\nu} p'_\nu + \sum\sum \alpha_{3,\mu,\nu} p'_\nu u'_\nu + \cdots \qquad 10)$$

Jeder Entwicklungskoeffizient α stellt sich seinerseits dar durch ein Integral teils über die Fläche s, teils über das Volumen ω.

Nun ist der ganze Ausdruck $\delta W + \frac{d\delta V}{dt}$ unabhängig von der Wahl der Fläche s. Dasselbe folgt daher auch für den Faktor jeder einzelnen Variation und auch für die Coeffizienten α jeder einzelnen Potenz von u'_ν, p'_ν u. s. w. in den Reihenentwicklungen dieser Faktoren. Es folgt zunächst für alle Flächen s, die im Convergenzgebiet der Entwicklungen liegen. Da man aber die u'_ν, p'_ν u. s. w. in der Identität (9) beliebig klein wählen kann, so kann man das Convergenzgebiet beliebig vergrößern und gelangt damit zu dem Satz:

„Hat man die in den Bewegungsgleichungen (und den Gleichungen VIIIa)) auftretenden Combinationen der Größen $A_\nu, B_\nu, P_\nu, Q_\nu$ u. s. w. in Potenzreihen nach

den u'_ν, p'_ν u. s. w. entwickelt, so sind die einzelnen Entwicklungskoeffizienten unabhängig von der Wahl der Fläche s. Speziell darf die Fläche s bei ihrer Berechnung ins Unendliche verschoben werden."

Es ist natürlich nicht zu übersehen, daß die Verschiebung von s in's Unendliche erst nach der Ausführung der Entwicklung vorgenommen werden darf.

Wollen wir auf Grund dieses Satzes zeigen, daß die für uns in Betracht kommenden Terme von δW verschwinden, so haben wir zweierlei Größenabschätzungen vorzunehmen, von denen die eine das Verhalten von Φ und Γ_ν im Unendlichen betrifft, die andere auf die Ordnung der einzelnen Glieder in Bezug auf die Rotation ε Rücksicht nimmt.

Was erstere angeht, so kann ich mich mit folgenden Bemerkungen begnügen. Es sei ϱ der Abstand des Aufpunktes von Mittelpunkt des Elektrons. Rückt der Aufpunkt in's Unendliche, so werden die in § 2 eingeführten Hülfsgrößen l und k beide von der Ordnung ϱ unendlich. Daraus läßt sich die Ordnung aller Terme der Entwicklung (IVa) von Φ im Unendlichen ohne weiteres ablesen. Etwas mehr Vorsicht erfordern die von den Rotationen herrührenden Terme in der Entwicklung (IVb) der Γ_ν. Um ein Beispiel herauszugreifen, das Integral:

$$\int d\xi\, \delta\eta\, \delta\zeta\, \chi\eta\, \frac{l}{k}$$

scheint auf den ersten Blick im Unendlichen endlich, von 0. Ordnung zu werden, da l und k beide von der Ordnung ϱ werden. Betrachtet man aber den Quotienten $\frac{l}{k}$ näher, so sieht man, daß im Unendlichen:

$$\frac{l}{k} = \alpha + \frac{\beta}{\varrho}$$

wird, wobei α nur von den Coordinaten ξ^0_ν des Aufpunktes, nicht mehr von ξ, η, ζ abhängt und β endlich bleibt. Setzt man diesen Ausdruck unter dem Integral ein, so verschwindet das Integral über α aus Symmetriegründen und es zeigt sich, daß das ganze Integral im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ wird. Aehnlich werden alle von der Rotation herrührenden Terme in den Γ_ν um eine Ordnung kleiner, als die erste Abschätzung aus dem Unendlichwerden von k und l zur Ordnung ϱ ergiebt.

Wenn wir zweitens die Größenordnung in Bezug auf den Parameter ε bestimmen wollen, so ist zuvörderst zu prüfen, in welcher Genauigkeit wir die Größen $A_\nu, B_\nu, A_{1,\nu}, B_{1,\nu}$ u. s. w. kennen müssen, um die Bewegungsgleichungen in ε^3 inklusive richtig zu erhalten. Man fasse z. B. $A_{1,x}$ in's Auge. Man kann $A_{1,x}$ zerlegen in einen Teil $T(A_{1,x})$, der von den Rotationsgrößen garnicht abhängt und den wir als „translatorischen" Teil von $A_{1,x}$ bezeichnen können, und in einen Teil $R(A_{1,x})$, der von der Rotation mit abhängt. Der erste Teil wird (vgl. IX) bei einmaliger Differentiation nach der Zeit von der Ordnung ε^3, der zweite nur von der Ordnung ε^2. Jede weitere Differentiation nach der Zeit vermehrt die Ordnung überall mindestens um ε.

Man zählt analog hierzu aus den Bewegungsgleichungen und Impulsentwicklungen (VIIIb), (VIIIc) ab, daß man kennen muß:

A_ν	und	B_ν	bis	zur	Ordnung	ε^3 inkl.
$R(A_{1,\nu})$	„	$R(B_{1,\nu})$	„	„	„	ε^2
$T(A_{1,\nu})$	„	$T(B_{1,\nu})$	„	„	„	ε^0
$R(A_{2,\nu})$	„	$R(B_{2,\nu})$	„	„	„	ε
$T(A_{2,\nu})$	„	$T(B_{2,\nu})$				garnicht.

Es empfiehlt sich, die beiden Größen A_ν, B_ν zunächst auszuschließen, was dadurch geschieht, daß man in δW die Variationen $\delta\alpha_\nu = \delta\varrho_\nu = 0$ setzt. Nach dieser Ausscheidung lassen sich die vorstehenden Forderungen so zusammenfassen. Man beschließe, rein formal

δu_ν, δp_ν	als	Größen	der	Ordnung	ε
$\delta u'_\nu$, $\delta p'_\nu$	„	„	„	„	ε^2

zu zählen und allen „translatorischen" Termen bei der Zählung der Ordnung den Faktor ε^2 hinzuzufügen. Dann wird alles in allem die Kenntnis von δW bis zur Ordnung ε^3 inkl. verlangt.

Nunmehr sind die Entwicklungen (IV) der retardierten Potentiale im einzelnen auf ihr Verhalten im Unendlichen und zugleich auf ihre Größenordnung in ε zu prüfen. Ich schreibe im folgenden in einer symbolischen Form, die wohl keiner weiteren Erläuterung bedarf, die Ordnung der auftretenden Terme an. Dabei lasse ich alle Glieder mit dem Faktor ε^4 weg, ferner alle Glieder, die aus einem bereits aufgetretenen Gliede durch Multiplikation mit einem Faktor $\frac{1}{\varrho}$ oder ε hervorgehen. Die rein translatorischen Terme behandle ich getrennt von den andern und kennzeiche sie durch

einem Faktor ε^3. Es ist ersichtlich, daß die Entwicklungen (IV) in diesen Termen bis zur Ordnung ε^3 vollständig sind. Es findet sich:

$$\Phi = \varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} - \varepsilon^2\right) \qquad \Gamma = \varepsilon\left(\frac{1}{\varrho} + \varepsilon^2\right) + \frac{\varepsilon}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varrho} + \varepsilon^3.$$

Die von δx_0, δy_0, δz_0 und εp_0 abhängigen Teile der Variation von Φ und Γ sind durch Differentiation der Entwicklungen (IV) ohne weiteres zu bilden. In Rücksicht auf die festgesetzte Größenordnung von δx_0, δp_0 u. s. w. erhält man:

$$\delta\Phi = \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\varrho} - \varepsilon^2\right) \qquad \delta\Gamma = \varepsilon\left(\frac{\varepsilon}{\varrho} - \varepsilon^2\right) + \frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varrho}.$$

Es ist dabei zu bemerken, daß es für den rein translatorischen Charakter eines Terms nur wesentlich ist, daß er von p_0, p_0', p_0'' frei ist, während das Auftreten der Variationen δp_0, $\delta p_0'$ nicht in Betracht kommt.

Weiter folgt:

$$\Phi\delta\Phi = \varepsilon^2\frac{\varepsilon}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho} - \varepsilon\right)$$

$$\Gamma\delta\Gamma = \varepsilon^2\varepsilon\left(\frac{1}{\varrho^2} - \frac{\varepsilon}{\varrho} + \varepsilon^2\right) - \varepsilon\frac{\varepsilon^2}{\varrho^2}\left(\frac{1}{\varrho} - \varepsilon\right) + \frac{\varepsilon^3}{\varrho^2}. \qquad 11)$$

Der in δW auftretende Integrand entsteht nun dadurch, daß immer an einem der beiden Faktoren dieser Produkte, an Φ oder $\delta\Phi$, an Γ oder $\delta\Gamma$, die Differentiation $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ vollzogen wird. Es ist nach (4) und (5):

$$\frac{\partial}{\partial\sigma} = \frac{\partial}{\partial\sigma_0} - u_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha} = \sum\cos(ax_\alpha')\frac{\partial}{\partial x_\alpha'} - u_\alpha\left(\frac{d}{dt} - \sum u_\alpha'\frac{\partial}{\partial x_\alpha'}\right).$$

Es handelt sich also entweder um eine Differentiation nach den Koordinaten des Aufpunktes oder um eine Differentiation nach der Zeit bei festgehaltenen Relativkoordinaten desselben. Die Betrachtung der Entwicklungen IV von Φ und Γ läßt erkennen, daß bei der ersteren Differentiation die Ordnung um $\frac{1}{\varrho}$, bei letzterer mindestens um ε steigt.

11) Die Vorschrift, translatorische Terme mit dem Faktor ε^3 zu versehen, kommt auch noch bei Φ und Γ, sondern erst bei der Bildung von δW selbst zur Geltung und wird durch Einführung des Faktors ε nur vorbereitet.

Man beachte noch, daß bei der Differentiation $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ eines Faktors der Produkte $\Phi\delta\Phi$ translatorische Terme translatorisch bleiben. Translatorisch sind aber gewiß die Terme, welche den Faktor τ^2 haben, da sie nur durch Multiplikation zweier translatorischer Terme entstanden sein können. Man darf daher gemäß der obigen Vorschrift in (11) $\tau^2 = \varepsilon^2$ setzen (deswegen nicht aber $\tau = \varepsilon$) und erhält zunächst:

$$\Phi\delta\Phi = \frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} \qquad \Gamma_\nu\delta\Gamma_\nu = \frac{\varepsilon^2}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon^3}{\varrho^3}.$$

Multipliziert man hier in Rücksicht auf die Differentiation $\frac{\partial}{\partial\sigma}$ entweder mit dem Faktor $\frac{1}{\varrho}$ oder mit dem Faktor ε, so erhalten alle Terme, welche nicht wegen des Faktors ε^4 weggelassen werden können, die Potenz ϱ^3 im Nenner und verschwinden daher, wenn man über eine im Unendlichen gelegene Fläche s integriert.

Es erübrigt noch die Bestimmung der oben ausgeschlossenen Größen A_ν und B_ν bis zur Ordnung ε^2. Hier ist zunächst klar, daß die B_ν in aller Strenge verschwinden, da eine Drehung $\delta\varrho_\nu$ des um seinen Mittelpunkt symmetrischen Elektrons das Feld nicht ändert und $\Sigma B_\nu \delta\varrho_\nu$ eben die aus der Drehung hervorgehende Variation von δW darstellen sollte. Auf der andern Seite hat man für die Variationen von Φ und Γ_ν die aus den Verrückungen δa_ν hervorgehn und in δW den Teil $\Sigma A_\nu \delta a_\nu$ liefern:

$$\delta\Phi = -\sum \delta a_\nu \frac{\partial\Phi}{\partial x_\nu} \qquad \delta\Gamma_\nu = -\sum \delta a_\nu \frac{\partial\Gamma}{\partial x_\nu}.$$

Bestimmt man die Größenordnung dieser Variationen in der früheren Weise, indem man noch die δa_ν als von der Ordnung 0 zählt und die hier überflüssige Trennung[1]) in translatorische und rotatorische Terme unterläßt, so findet man:

$$\delta\Phi = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varrho} \qquad \delta\Gamma_\nu = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{\varepsilon^2}{\varrho}$$

$$\Phi\delta\Phi = \frac{1}{\varrho^3} + \frac{\varepsilon^3}{\varrho^2} \qquad \Gamma_\nu\delta\Gamma_\nu = \frac{1}{\varrho^3} + \frac{\varepsilon^3}{\varrho^2}$$

Fügt man schließlich in Rücksicht auf die Differentiation bei der

1) Die Trennung ist überflüssig, weil die A_ν in den Bewegungsgleichungen nicht nach der Zeit differenziert werden und erst diese Differentiation eine Bevorzugung der translatorischen Terme herbeiführt.

Bildung des Integranden von δW entweder den Faktor $\frac{1}{\varrho}$ oder den Faktor ε hinzu, so verschwinden auch hier alle Glieder von der Ordnung ε^3, wenn die Fläche s in's Unendliche rückt. Damit ist das Resultat gewonnen: Alle in Betracht kommenden aus δW stammenden Glieder in den Bewegungsgleichungen verschwinden, wenn man die Fläche s in's Unendliche rücken läßt.

Es könnte scheinen, als ob wir nun auch noch die Entwicklung von δV darauf prüfen müßten, wie sie sich beim Hinausrücken der Fläche s in's Unendliche verhält. Indessen ist dies überflüssig auf Grund folgender Überlegung. Die Entwicklungskoeffizienten α irgend einer in den Bewegungsgleichungen auftretenden Combination von A_ν B_ν P_ν Q_ν u. s. w. nach dem Muster der Gleichung (10) setzen sich aus einem Oberflächenintegral und einem Volumenintegral zusammen. Wählt man s und ω endlich, so sind beide Integrale endlich. Läßt man s in's Unendliche rücken, so haben wir eben nachgewiesen, daß in allen in Betracht kommenden Coeffizienten das Oberflächenintegral endlich bleibt und sogar verschwindet. Daraus folgt, daß auch das Volumenintegral endlich bleiben muß, wenn sich ω in's Unendliche ausdehnt. Welchen speziellen Wert diese Volumenintegrale dann annehmen, ist für die Aufstellung der Bewegungsgleichungen gleichgültig.

Wir dürfen daher in allen in Betracht kommenden Entwicklungskoeffizienten die Fläche s wirklich in's Unendliche hinausrücken lassen und erhalten damit das definitive Ergebnis:

$$A_\nu = B_\nu = A_{1,\nu} = B_{1,\nu} = A^1_{2,\nu} = B_{2,\nu} = 0. \qquad \text{X)}$$

§ 7. Berechnung des kinetischen Potentiales J.

Die Größe J, die wir in Analogie zur gewöhnlichen Mechanik als „kinetisches Potential des Elektrons“ bezeichnen dürfen, hat den Wert:

$$2J = \int d\omega^0 \chi(-\Phi + \Sigma v_\nu \Gamma_\nu)$$

und ist bis auf die in den Beschleunigungen u'_ν und p'_ν linearen Glieder zu berechnen, also durch Einsetzen der Entwicklungen (IV) von Φ und Γ_ν unter Weglassung der von p'' abhängigen Glieder. Wie nochmals hervorgehoben sei, ist es natürlich der früher mit ξ^0_ν bezeichnete Aufpunkt von Φ und Γ_ν, welcher über das Volumen des Elektrons zu führen ist, und v_ν bedeutet die

Geschwindigkeit dieses Aufpunktes, also: $v_x = u_x + p_y\xi^0 - p_z\eta^0$ u. s. w.

Man vereinfacht sich die Rechnung wesentlich, wenn man für den Augenblick, für welchen J berechnet werden soll, die x-Axe in die Translationsgeschwindigkeit und die x-y-Ebene in die Richtung der Beschleunigung fallen läßt, sodaß:

$$u_z = u, \quad u_y = u_z = u_z' = 0$$

wird. Die Entwicklungen (IV) nehmen dann folgende Form an:

$$k = \sqrt{(\xi^0-\xi)^2+(1-u^2)[(\eta^0-\eta)^2+(\zeta^0-\xi)^2]} \qquad l = u(\xi^0-\xi)$$

$$\Phi = \Phi^0+\Phi^1 \qquad g_\nu = g_\nu^0+g_\nu^1$$

$$\Phi^0 = \int\frac{d\omega\chi}{k}$$

$$\Phi^1 = \int\frac{d\omega\chi}{k^3}\left\{[u_x'(\xi^0-\xi)+u_y'(\eta^0-\eta)]\cdot\frac{l^2-k^2}{2(1-u^2)}+uu_x'\frac{l^3-3k^2l-2k^2}{2(1-u^2)^2}\right\}$$

$$g_\nu^0 = \int\frac{d\omega\chi\xi_\nu}{k}$$

$$g_\nu^1 = \int\frac{d\omega\chi\xi_\nu}{k^3}\left\{[u_x'(\xi^0-\xi)+u_y'(\eta^0-\eta)]\cdot\frac{l^2-k^2}{2(1-u^2)}+uu_x'\frac{l^3-3k^2l-2k^2}{2(1-u^2)^2}\right\}$$

$$h_\nu = \int d\omega\chi\,\frac{l}{k}\,\xi_\nu$$

$$\Gamma_x = u\Phi+p_yg_z-p_zg_y-\frac{u_x'}{1-u^2}\int d\omega\chi\left[1+\frac{l}{k}\right]-\frac{p_y'h_z-p_z'h_y}{1-u^2}$$

$$\Gamma_y = \quad p_zg_x-p_xg_z-\frac{u_y'}{1-u^2}\int d\omega\chi\left[1+\frac{l}{k}\right]-\frac{p_z'h_x-p_x'h_z}{1-u^2}$$

$$\Gamma_z = \quad p_xg_y-p_yg_x \qquad\qquad -\frac{p_x'h_y-p_y'h_x}{1-u^2}$$

Hier sind zur Abkürzung die neuen Integrale h_ν eingeführt und in Φ und g_ν die von den Beschleunigungen freien Teile Φ_ν^0 und g_ν^0 abgetrennt.

Alle vorstehenden Integrale haben einfache Symmetrieeigenschaften. Es ist beispielsweise:

$$h_y = \int d\omega\chi\,\frac{l}{k}\cdot\eta = u\int\frac{d\xi\,d\eta\,\partial\zeta\,\eta(\xi^0-\xi)}{\sqrt{(\xi^0-\xi)^2+(1-u^2)[(\eta^0-\eta)^2+(\zeta^0-\xi)^2]}}$$

ungrade Funktion von ξ^0 und η^0, grade von ζ^0. Die Symmetrieeigenschaften kommen zur Geltung, wenn man dazu übergeht,

J selbst zu bilden, und dabei den Aufpunkt ξ^0, η^0, ζ^0 das ganze Volumen des Elektrons durchlaufen läßt. Denn bei dieser zweiten Integration verschwinden alle Integrale über Funktionen, welche in irgend einer der Coordinaten ξ^0, η^0, ζ^0 ungerade sind. In der That erhält man beim Einsetzen der Entwicklungen von Φ und Γ_ν in J durch bloße Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften sofort den folgenden verhältnismäßig einfachen Ausdruck:

$$2J = (u^2-1)\int d\omega^0 \chi \Phi^0 - \frac{u'_y p_z}{1-u^2}\int d\omega^0 \chi \int d\omega \chi \left[\xi^0 \frac{l}{k} + u(\eta^{0 2}-\eta^2)\frac{l^2-k^2}{2k^3}\right]$$
$$+ p_x^2 \int d\omega^0 \chi (\eta^0 g_y^0 + \zeta^0 g_z^0) + p_y^2 \int d\omega^0 \chi (\zeta^0 g_z^0 + \xi^0 g_x^0) + p_z^2 \int d\omega^0 \chi (\xi^0 g_x^0 + \eta^0 g_y^0).$$

Das mit u'_y multiplizierte Integral gestattet eine weitere erhebliche Vereinfachung. Es folgt nämlich durch Vertauschung von ξ^0, η^0, ζ^0 und ξ, η, ζ:

$$\int d\omega^0 d\omega \chi^2 \eta^2 \frac{l^2-k^2}{2k^3} = \int d\omega\, d\omega^0 \chi^2 \eta^{0 2} \frac{l^2-k^2}{2k^3}.$$

Es verschwindet also der ganze zweite Teil des Integrals und es bleibt nur der erste übrig, der sich auch so schreiben läßt:

$$\int d\omega^0 \chi \int d\omega \chi \frac{\xi^0 u(\xi^0-\xi)}{k} = u\int d\omega^0 \chi \Phi^0 \xi^{0 2} - u\int d\omega^0 \chi \xi^0 g_x^0.$$

Führt man daher die Bezeichnungen ein:

$$M = \int d\omega^0 \chi \Phi^0 \qquad K_\nu = \int d\omega^0 \chi \xi_\nu^0 g_\nu^0 \qquad M' = -K_x + \int d\omega^0 \chi \Phi^0 \xi^{0 2}$$

so lautet der vollständige Ausdruck von J:

$$J = \frac{u^2-1}{2} M + \frac{p_x^2}{2}(K_y+K_z) + \frac{p_y^2}{2}(K_z+K_x) + \frac{p_z^2}{2}(K_x+K_y) - \frac{u'_y p_z u}{2(1-u^2)} M'.$$

Es bleibt die Aufgabe, die Integrale M, M' und K und daher zunächst die Potentiale Φ^0 und g_ν^0 auszuwerten. Man hat:

$$\Phi^0 = \int \frac{d\xi\, \partial\eta\, \partial\zeta\, \chi}{\sqrt{(\xi^0-\xi)^2 + (1-u^2)[(\eta^0-\eta)^2 + (\zeta^0-\zeta)^2]}}.$$

das Integral über eine Kugel um den Nullpunkt der ξ, η, ζ erstreckt. Die übliche Methode, dieses Integral zu berechnen, besteht darin, daß man den Raum in der x-Richtung im Verhältnis $\frac{1}{1-u^2}$ dehnt, wodurch Φ^0 in das gewöhnliche bekannte Attraktions-

potential eines homogenen Rotationsellipsoides übergeführt wird. Man findet auf diese Weise:

$$\Phi^0 = \pi\chi[R^2E - \xi^{0\,2}D - (\eta^{0\,2}+\zeta^{0\,2})D_1]$$

$$E = \frac{1}{u}\log\frac{1+u}{1-u} = u^2D+2 = D+2D_1.$$

Die Bestimmung der Funktionen g_ν^0 erfordert ähnlich die Berechnung des Potentiales von Rotationsellipsoiden, die nicht homogen sind, sondern deren Dichte vom Mittelpunkt aus den Coordinaten proportional wächst. Die Methoden, welche man zur Berechnung des Potentials homogener Ellipsoide anzuwenden pflegt, führen auch hier ohne weiteres zum Ziel, und zwar ergiebt sich:

$$g_\nu^0 = \pi\chi\,\xi_\nu^0[R^2A_\nu + \xi^{0\,2}B_\nu + (\eta^{0\,2}+\zeta^{0\,2})C_\nu]$$

wobei gilt:

$$A_x = E - \frac{1-u^2}{u}\frac{\partial E}{\partial u},\quad 3B_x = -3D + \frac{1-u^2}{u}\frac{\partial D}{\partial u},\quad C_x = -D_1 + \frac{1-u^2}{u}\frac{\partial D_1}{\partial u}$$

$$\begin{aligned} A_x + 2A_y &= E & A_y &= A_z \\ 3B_x + 2B_y &= -3D & B_y &= B_z \\ C_x + 4C_y &= -3D_1 & B_y &= C_z. \end{aligned}$$

Um nun die Größen M, M' und K selbst zu finden, hat man nur noch die elementare Integration nach ξ^0, η^0, ζ^0 über die Kugel ω^0 auszuführen. Ich begnüge mich, das Resultat dieser Rechnungen anzugeben:

$$M = \frac{16}{15}\pi^2R^5\chi^2E$$

$$K_x = \frac{1}{7}\cdot\frac{16}{15}\pi^2R^7\chi^2\,\frac{E-2}{u^2}$$

$$K_y = K_z = \frac{1}{7}\cdot\frac{16}{15}\pi^2R^7\chi^2\,\frac{1-\left(\frac{1-u^2}{2}\right)E}{u^2}$$

$$M' = \frac{3}{7}\cdot\frac{16}{15}\pi^2R^7\chi^2\,\frac{1-\left(\frac{1-u^2}{2}\right)E}{u^2}.$$

Setzt man diese Funktionen in J ein, so empfiehlt es sich schließlich noch, von J eine im übrigen gleichgültige Constante,

nämlich $\frac{16}{15}\pi R\chi^2$, abzuziehn. Der definitive Ausdruck von J läßt sich dann so schreiben:

$$J = \frac{u^2}{2}M + \frac{p_x^2}{2}C_x + \frac{p_y^2}{2}C_y + \frac{p_z^2}{2}C_z - p_z u_y' u M' \qquad \text{XI)}$$

wobei:

$$\begin{aligned} M &= \frac{16}{15}\pi^2 R^5 \chi^2 \left[1 - \left(\frac{1-u^2}{2}\right)E\right]\frac{1}{u^3} \\ C_x &= \frac{2}{7}\cdot\frac{16}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \left[1 - \left(\frac{1-u^2}{2}\right)E\right]\frac{1}{u^3} \\ C_y = C_z &= \frac{1}{7}\cdot\frac{16}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \left[-1 + \frac{1+u^2}{2}E\right]\frac{1}{u^3} \\ M' &= \frac{3}{7}\,\frac{16}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \,\frac{1-\left(\frac{1-u^2}{2}\right)E}{2u^2(1-u^2)} \quad \left(E = \frac{1}{u}\log\frac{1+u}{1-u}\right) \end{aligned} \qquad \text{XI}^a)$$

ist, oder auch in Reihen entwickelt:

$$\begin{aligned} M &= \frac{64}{15}\pi^2 R^5 \chi^2 \left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{u^2}{3\cdot 5} + \frac{u^4}{5\cdot 7} + \cdots\right] \\ C_x &= \frac{1}{7}\cdot\frac{64}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{u^2}{3\cdot 5} + \frac{u^4}{5\cdot 7} + \cdots\right] \\ C_y = C_z &= \frac{1}{7}\cdot\frac{64}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{2u^2}{3\cdot 5} + \frac{3u^4}{5\cdot 7} + \cdots\right] \\ M' &= \frac{3}{14}\cdot\frac{64}{15}\pi^2 R^7 \chi^2 \left[\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{u^2}{3\cdot 5} + \frac{u^5}{5\cdot 7} + \cdots\right]\frac{1}{1-u^2}. \end{aligned} \qquad \text{XI}^b)$$

Schließlich wollen wir die spezielle Orientierung des Coordinatensystems nach der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Translation wieder aufgeben und zu einer beliebigen Lage des Coordinatensystems zurückkehren. Dann verwandelt sich, wie aus einer einfachen Drehung des Coordinatensystems hervorgeht, der Ausdruck von J in den folgenden:

$$\begin{aligned} J = {} & \frac{u_x^2+u_y^2+u_z^2}{2}\cdot M + \frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2}\cdot C_y - \frac{(p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z)^2}{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\,\frac{C_y - C_x}{2} \\ & - M'\{p_x(u_y' u_y - u_y' u_z) + p_y(u_z' u_x - u_x' u_z) + p_z(u_x' u_y - u_y' u_x)\}. \end{aligned} \qquad \text{XII)}$$

§ 8. Die Bewegungsgleichungen des Elektrons.

Die Ergebnisse der beiden vorigen Paragraphen setzen uns in den Stand, die Bewegungsgleichungen des Elektrons explizit anzugeben. Die Formeln VIII) nehmen infolge des Fortfalls der sämtlichen Größen A und B, der Verkürzung der Impulsentwicklung auf die in (8) angegebenen Glieder und des Fehlens von p_ν' im Ausdruck von J die einfache Gestalt an:

$$P_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial u_\nu'} \qquad Q_\nu = \frac{\partial J}{\partial p_\nu}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dP_x}{dt} &= S_x & \frac{dQ_x}{dt} &= p_y Q_z - p_z Q_y + D_x \\
\frac{dP_y}{dt} &= S_y & \frac{dQ_y}{dt} &= p_z Q_x - p_x Q_z + D_y \\
\frac{dP_z}{dt} &= S_z & \frac{dQ_z}{dt} &= p_x Q_y - p_y Q_x + D_z
\end{aligned} \qquad \text{XIII)}$$

Aus diesen Gleichungen ist in verschiedenen Hinsichten eine nahe Analogie zu den Bewegungsgesetzen eines starren Körpers in der gewöhnlichen Mechanik abzulesen.

α) Beim Fehlen einer äußeren Schiebekraft S hat der Schiebeimpuls P die Eigenschaft, im Raume fest zu stehn.

β) Die Gleichungen für den Drehimpuls Q haben genau die Gestalt der allgemeinen Euler'schen Gleichungen, nur daß die Vorzeichen der beiden ersten Glieder rechts die umgekehrten sind. Daraus folgt, daß bei fehlenden äußeren Drehkräften der Vektor des Drehimpulses nicht, wie in der gewöhnlichen Mechanik, im Raume fest steht, sondern im Körper des Elektrons. Diese Inversion des Kreiselproblems beim Elektron entspringt dem Umstande, daß das kinetische Potential des Elektrons von den Rotationsgeschwindigkeiten p_ν um im Raume feste Axen abhängt, statt um mit dem Elektron bewegliche, daß das Trägheitsellipsoid des Elektrons, wenn man so sagen will, an der Richtung seiner Translationsgeschwindigkeit hängt und sich nicht zugleich mit dem Körper des Elektrons dreht.

γ) Haben die äußeren Kräfte ein Potential U, so folgen die Bewegungsgleichungen des Elektrons aus dem Minimalprinzip:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} dt\,(J - U) = 0.$$

Dabei hängt J im Gegensatz zu der gewöhnlichen Mechanik nicht nur von den Geschwindigkeiten, sondern auch von den Beschleunigungen ab, und es sind bei der Variation für die Grenzzeiten die Coordinaten und Geschwindigkeiten des Elektrons festzuhalten.

Findet insbesondere die Rotation um die Richtung der Translation statt ($p_\varkappa = 0$ in dem Ausdruck (XI) von J) oder ist die Translationsgeschwindigkeit null (und damit $uM' = 0$), so kommt man auf Herrn Abraham's „ausgezeichnete" Bewegungen, die Beschleunigungen verschwinden aus dem kinetischen Potential J und der ganze Unterschied gegen die gewöhnliche Mechanik wird der, daß J nicht mehr eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist.

δ) Da der Wert des kinetischen Potentials ersichtlich nur von der relativen Lage der drei Vectoren u, u' und p abhängt, so ändert er sich nicht, wenn man alle drei Vektoren zugleich derselben Drehung unterwirft. Daraus folgt das Bestehen der Gleichung (nebst den beiden entsprechenden):

$$0 = u_y \frac{\partial J}{\partial u_z} - u_z \frac{\partial J}{\partial u_y} + u'_y \frac{\partial J}{\partial u'_z} - u'_z \frac{\partial J}{\partial u'_y} + p_y \frac{\partial J}{\partial p_z} - p_z \frac{\partial J}{\partial p_y}.$$

Mit deren Hülfe erhält man aus den Bewegungsgleichungen die Relationen (nebst den entsprechenden):

$$\frac{\partial J}{\partial p_\varkappa} + u_y \frac{\partial J}{\partial u'_z} - u_z \frac{\partial J}{\partial u'_y} + a_y P_z - a_z P_y = \int dt\,(D_\varkappa + a_y S_z - a_z S_y). \quad \text{XIVa)}$$

Diese Gleichungen entsprechen den Flächensätzen der gewöhnlichen Mechanik, während die Schwerpunktssätze einfach in den Gleichungen:

$$P_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial u'_\nu} = \int dt\, S_\nu \qquad \text{XIVb)}$$

ihr Analogon finden.

Die in (XIVa) und XIVb) linker Hand stehenden Ausdrücke stimmen bis auf die weggelassenen Terme höherer Ordnung mit den Componenten von Herrn Abraham's „Bewegungsgröße" des Elektrons überein.

§ 9. Die kräftefreie Bewegung des Electrons.

Falls die äußeren Kräfte S_ν und D_ν verschwinden und man es mit der freien Bewegung des Elektrons zu thun hat, liefern

die Schwerpunkts- und Flächensätze gleich die intermediären Integrale der Bewegungsgleichungen, nämlich:

$$P_\nu = \frac{\partial J}{\partial u_\nu} - \frac{d}{dt}\frac{\partial J}{\partial u_\nu'} = \text{const.} = \beta_\nu,$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_\varkappa} + u_\lambda \frac{\partial J}{\partial u_\lambda'} - u_\varkappa \frac{\partial J}{\partial u_\varkappa'} + a_\lambda \beta_\varkappa - a_\varkappa \beta_\lambda = \text{const.} = \gamma_\varkappa$$

(nebst entsprechenden).

Ich stelle zunächst die Frage, ob und unter welchen Umständen eine gleichförmige Translation des Elektrons verbunden mit konstanter Rotation um eine im Raume feste Axe möglich ist.

Legt man die x-Axe in die Translationsrichtung, so folgt:

$$a_\varkappa = ut, \quad a_\lambda = a_\mu = u_\lambda = u_\mu = u_\varkappa' = u_\lambda' = u_\mu' = 0.$$

In den Flächensätzen erscheinen die Größen $a_\varkappa \beta_\varkappa$ und $a_\varkappa \beta_\lambda$, welche der Zeit proportional wachsen, während alle übrigen Glieder derselben Gleichungen bei unsern Voraussetzungen von der Zeit unabhängig sind. Bei gleichförmiger Translation muß daher gelten:

$$\beta_\lambda = \beta_\varkappa = 0, \quad P_\lambda = P_\varkappa = 0.$$

Die Richtung des Schiebeimpulses des Elektrons muß mit der Richtung der Translationsgeschwindigkeit zusammenfallen.

Damit sind die Flächensätze vollständig ausgenutzt, indem ihre linken Seiten Constanten werden. Wir betrachten die Schwerpunktssätze:

Durch Differentiation von J erhält man in Rücksicht auf die eben getroffene Fixierung der x-Richtung:

$$P_\lambda = \frac{\partial J}{\partial u_\lambda} = -p_\varkappa p_\lambda \frac{C_\lambda - C_\varkappa}{2u}$$

$$P_\varkappa = \frac{\partial J}{\partial u_\varkappa} = -p_\varkappa p_\varkappa \frac{C_\lambda - C_\varkappa}{2u}.$$

Sollen beide Größen verschwinden, so muß entweder $p_\varkappa = 0$ sein oder es muß $p_\lambda = p_\varkappa = 0$ sein. Damit ist das Resultat gewonnen:

Gleichförmige Translation des Elektrons verbunden mit Rotation um eine im Raume feste Axe ist nur möglich, wenn die Rotationsaxe mit der Translationsrichtung zusammenfällt oder senkrecht zu ihr steht.

Wenn wir zu Fällen variabler Translation und Rotation übergehn, so wird es umso weniger angemessen sein, nach strengen Integralen der obigen Bewegungsgleichungen zu suchen, als die-

selben wegen der von vornherein erfolgten Vernachlässigung höherer Derivierten keine exakte physikalische Bedeutung hätten. Ich will vielmehr nur versuchen, Lösungen in der Nachbarschaft einer gleichförmigen Translation zu finden, und zwar Lösungen, bei denen die Ordnung der auftretenden Größen den in (IX.) zu Grunde gelegten Annahmen entspricht. Ich werde also den dortigen Angaben entsprechend voraussetzen:

$$\begin{array}{ll} p_\nu \text{ als von der Ordnung } & \varepsilon \\ p'_\nu & \varepsilon^2 \\ p''_\nu & \varepsilon^3 \\ u'_\nu & \varepsilon^2. \end{array}$$

Die Nachbarschaft zur gleichförmigen Translation bezeichne ich dadurch, daß ich u_y und u_z als von der Ordnung ε^2 betrachte und nur u_x beliebig nehme.

Unsre ganze Untersuchung war von vornherein darauf eingerichtet, die Bewegungsgleichungen in Gliedern der Ordnung ε^3 richtig zu liefern. Es ist voraus zu bemerken, daß dieser Genauigkeit in den Bewegungsgleichungen eine Genauigkeit der Ordnung ε^2 in den Schwerpunkts- und Flächensätzen entspricht, da bei der Differentiation nach der Zeit die Ordnung um ε steigt.

Man bilde nun zunächst die partiellen Derivierten von J bis auf Glieder, die in der festgesetzten Zählweise von der Ordnung ε^2 inkl. werden:

$$\begin{array}{lll} \dfrac{\partial J}{\partial u_x} = u_x\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)+\dfrac{p_x^2}{2}\dfrac{\partial C_x}{\partial u}+\dfrac{p_y^2+p_z^2}{2}\dfrac{\partial C_y}{\partial u} & & \dfrac{\partial J}{\partial u'_x} = 0 \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_y} = u_y\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)-\dfrac{C_y-C_x}{u}p_x p_y & & \dfrac{\partial J}{\partial u'_y} = -M'p_x u \\ \dfrac{\partial J}{\partial u_z} = u_z\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)-\dfrac{C_y-C_x}{u}p_x p_z & & \dfrac{\partial J}{\partial u'_z} = +M'p_y u \end{array}$$

$$\frac{\partial J}{\partial p_x} = p_x C_x \qquad \frac{\partial J}{\partial p_y} = p_y C_y \qquad \frac{\partial J}{\partial p_z} = p_z C_y.$$

Man erhält daraus die Componenten des Schiebeimpulses und damit die Schwerpunktssätze bis zur Ordnung ε^2 richtig:

$$\begin{array}{l} P_x = u_x\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)+\dfrac{p_x^2}{2}\dfrac{\partial C_x}{\partial u}+\dfrac{p_y^2+p_z^2}{2}\dfrac{\partial C_y}{\partial u} = \text{const.} = \beta_x \\ P_y = u_y\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)-\dfrac{C_y-C_x}{u}p_x p_y+uM'p'_z = \text{const.} = \beta_y \qquad 12) \\ P_z = u_z\left(M+\dfrac{u}{2}\dfrac{\partial M}{\partial u}\right)-\dfrac{C_y-C_x}{u}p_x p_z-uM'p'_y = \text{const.} = \beta_z. \end{array}$$

Dem ersten dieser Sätze entnehme man vorläufig nur, daß u_x und damit auch u bei der Bewegung bis auf Größen zweiter Ordnung konstant bleibt.

Für die Rotationen empfiehlt es sich, statt der Flächensätze die Bewegungsgleichungen selbst zu benutzen. Man findet für dieselben in ε^2 genau:

$$\begin{aligned} p_x' C_x &= 0 \\ p_y' C_y &= -p_x p_z (C_y - C_x) \\ p_z' C_y &= p_x p_y (C_y - C_x). \end{aligned}$$

Da u höchstens um Größen zweiter Ordnung variiert, so darf man hier die C_ν als (mit einem Mittelwert von u zu berechnende) Constante betrachten. Damit werden die Integrale dieser Gleichungen:

$$\begin{aligned} &p_x = \lambda, \quad p_y = \mu \cos(nt + \varkappa), \quad p_z = \mu \sin(nt + \varkappa) \\ &n = \lambda \cdot \frac{C_y - C_x}{C_y} \qquad (\varkappa,\ \lambda,\ \mu \text{ Integrationskonstante}). \end{aligned} \tag{13}$$

Setzt man die gefundenen Werte der Rotationsgeschwindigkeiten in die Schwerpunktssätze ein, so folgt:

$$u_x \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) = \beta_x - \frac{\lambda^2}{2} \frac{\partial C_x}{\partial u} - \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial C_y}{\partial u}$$

und daraus: $u_x = \text{const.}$ bis auf Größen dritter Ordnung. Ferner folgt:

$$\begin{aligned} u_y \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) &= \beta_y + \cos(nt + \varkappa) \cdot n\mu \frac{C_y - M' u^2}{u} \\ u_z \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) &= \beta_z + \sin(nt + \varkappa) \cdot n\mu \frac{C_y - M' u^2}{u}. \end{aligned} \tag{14}$$

Man kann das Coordinatensystem immer so wählen, daß $\beta_y = \beta_z = 0$ wird. Dann liefert die Integration für die Coordinaten a_ν des Mittelpunkts des Elektrons:

$$\begin{aligned} a_x &= u_x t \\ a_y \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) &= \mu \sin(nt + \varkappa) \frac{C_y - M' u^2}{u} \\ a_z \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) &= -\mu \cos(nt + \varkappa) \frac{C_y - M' u^2}{u}. \end{aligned} \tag{15}$$

Faßt man den Inhalt der Gleichungen (13), (14) und (15) in Worte, so hat man folgendes **Resultat: Ein freies, keinen**

äußeren Kräften unterworfenes, rotierendes Elektron bewegt sich im Allgemeinen nicht etwa gemäß dem Trägheitsgesetz gradlinig, vielmehr beschreibt sein Mittelpunkt eine Cylinderschraube und dabei führt der Körper des Elektrons eine reguläre Präzessionsbewegung um die Richtung der Schraubenaxe aus in der Art, daß Schraubenaxe, Rotationsaxe und Richtung der Mittelpunktsgeschwindigkeit (bei geeigneter Parallelverschiebung) stets in eine Ebene fallen.

Es ist im Grunde noch nachzuprüfen, ob die Größenordnung aller vorkommenden Größen, wenn man die Rotationsgeschwindigkeit als von der ersten Ordnung zum Maßstab nimmt, dem vorausgesetzten Ansatz entspricht. Das ist aber, wie man aus den Gleichungen (13) und (14) leicht ableitet, in der That der Fall, und es folgt, daß wir wirklich eine Annäherung an die Bewegung des Elektron's erhalten, wenn wir die Rotationsgeschwindigkeit, und zwar den linearen Betrag derselben für die Oberfläche des Elektrons verglichen mit der Lichtgeschwindigkeit, als klein annehmen. Wie groß die Annäherung in jedem Falle ist, läßt sich ohne umständliche Restabschätzung nicht angeben, doch dürfte selbst für Rotationen, die die Oberfläche des Elektron's mit $^1/_{10}$ oder $^1/_5$ der Lichtgeschwindigkeit herumschleudern, das eben ausgesprochene Resultat noch qualitativ in Geltung bleiben.

Man betrachte noch die Dimensionen der vom Elektron beschriebenen Schraube. Man hat zunächst für die Winkelgeschwindigkeit der Präzessionsbewegung, welches zugleich die Winkelgeschwindigkeit des Elektrons um die Schraubenaxe ist:

$$n = \lambda \frac{C_e - C_v}{C_v} = \lambda u^2 \cdot \vartheta$$

$$\vartheta = \frac{1}{u^2} \cdot \frac{\frac{3-u^2}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} - 3}{\frac{1+u^2}{2u} \log \frac{1+u}{1-u} - 1} = \frac{\frac{1}{3.5} + \frac{2u^2}{5.7} + \frac{3u^4}{7.9} + \cdots}{\frac{1}{1.3} + \frac{2u^2}{3.5} + \frac{3u^4}{5.7} + \cdots}$$

Der Faktor ϑ steigt von $\frac{1}{3}$ bis 1, wenn u von 0 bis 1 wächst. Die Ganghöhe der Schraube bestimmt sich aus:

$$l = \frac{2\pi u}{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{u} \cdot \vartheta.$$

Der Radius des Cylinders, auf welchem die Schraube liegt, ist:

$$\varrho = \frac{\mu . R^2}{u} \cdot \vartheta',$$

wenn:

$$\vartheta' = \frac{1}{R^2} \frac{C_y - M' u^2}{M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u}} = \frac{1}{7} \frac{\frac{5u^2+2}{2u^3} \log \frac{1+u}{1-u} - \frac{2}{u^2} - \frac{3}{1-u^2}}{\frac{1+u^2}{2u^3} \log \frac{1+u}{1-u} - \frac{1}{u^2}}$$

gesetzt wird.

Der Faktor ϑ' wird für $u = 0$ gleich $\frac{1}{7}$, er verschwindet für $u = 0{,}77$ der Lichtgeschwindigkeit und steigt in's Unendliche, wenn sich u der 1 nähert. Für $u = 0{,}97$ wird er freilich erst gleich 1,5.

Die Steigung der Schraube wird:

$$\frac{2\pi\varrho}{l} = R^2 \lambda\mu \frac{\vartheta'}{\vartheta}.$$

Hieraus folgt, daß man es mit einer sehr gestreckten Schraube zu thun hat, solange die Komponenten der Rotationsgeschwindigkeit an der Oberfläche des Elektrons $R\lambda$ und $R\mu$ klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sind, also in allen Fällen, für die unsere Untersuchung Gültigkeit beanspruchen kann.

Wenden wir insbesondere das Ergebnis für den Schraubenradius auf die beobachteten Kathoden- und Becquerelstrahlen an, für welche u zwischen etwa 0,10 und 0,97 liegt, und nehmen dabei die Rotationsgeschwindigkeit μR an der Oberfläche selbst von der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit, so wird der Schraubenradius doch immer nur von der Größenordnung des Radius des Elektrons. Nur bei Elektronen, welche eine im Verhältnis zur Rotationsgeschwindigkeit μR außerordentlich kleine Translationsgeschwindigkeit u besitzen, kann die Schraube sichtbare Dimensionen annehmen.

§ 10. Bewegung des Elektrons im elektromagnetischen Felde. Schlussresultat.

Man betrachte zunächt ein nicht rotierendes und nur äußeren Schiebekräften S_y unterworfenes Elektron. Man hat dann für den Schiebeimpuls nach (12):

$$P_y = u_y \left(M + \frac{u}{2} \frac{\partial M}{\partial u} \right) = \frac{u_y}{u} \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{u^2 M}{2} \right)$$

und daraus folgt:

$$S_\nu = \frac{dP_\nu}{dt} = \frac{u'_\nu}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2 M}{2}\right) + \frac{u_\nu}{u}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2 M}{2}\right)\right)\cdot(u_x u'_x + u_y u'_y + u_z u'_z)$$

und wenn man die x-Axe in die augenblickliche Translationsrichtung legt ($u_y = u_z = 0$):

$$\begin{aligned} u'_x\cdot\frac{\partial^2}{\partial u^2}\left(\frac{u^2 M}{2}\right) &= S_x, \\ u'_y\frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u^2 M}{2}\right) &= S_y. \end{aligned} \qquad 16)$$

Die hier auftretenden Faktoren von u'_x und u'_y sind Herrn Abraham's „longitudinale" und „transversale" Masse. Es ist die zweite dieser Formeln, welche durch Herrn Kaufmann's Versuche bestätigt worden ist.

Bewegt sich andrerseits ein rotierendes Elektron mit der Translationsgeschwindigkeit der Kathoden- oder Becquerelstrahlen in einem elektromagnetischen Felde etwa von der Beschaffenheit des bei Herrn Kaufmann's Versuchen verwandten, so erleidet dasselbe nicht nur Schiebekräfte, sondern auch Drehmomente. Eine einfache Abschätzung auf Grund der Bewegungsgleichungen lehrt aber, daß unter den bei diesen Versuchen vorliegenden und ähnlichen Verhältnissen die Bewegung des Elektrons in einer ultramikroskopischen Schraubenbewegung der obigen Art besteht, um eine Mittellinie, welche mit der ohne Rotation resultierenden und aus den Formeln (16) zu berechnenden praktisch übereinstimmt.

Die Rotationsgeschwindigkeit darf dabei so weit steigen, als es der Gültigkeitsbereich unsrer Formeln zuläßt, also vielleicht an der Oberfläche des Elektrons ein Fünftel der Lichtgeschwindigkeit erreichen. Damit ergiebt sich das Schlußresultat:

Die aus der Lorentz-Wiechert'schen Elektrodynamik sich ergebenden Konsequenzen für die Bewegung eines masselosen rotierenden Elektrons stehen, so paradox sie im ersten Augenblick erscheinen mögen, mit den Erfahrungsthatsachen nicht in Widerspruch.

Bericht über Plückers wissenschaftlichen Nachlaß.

Von

A. Schoenflies und **F. Pockels.**

Vorgelegt in der Sitzung am 25. Juli 1903 von F. Klein.

Das Ableben von Julius Plückers einzigem Sohne, das in einer Nervenheilanstalt gegen Ende des Jahres 1901 erfolgt ist, hat zu der Entdeckung geführt, daß ein Plückerscher Nachlaß mathematisch-physikalischen Inhalts existirt. Anfragen, die bei Gelegenheit der Herausgabe der Plückerschen Abhandlungen an die zuständige Stelle gerichtet wurden, hatten ein negatives Ergebniß gehabt. Um so erfreulicher ist es, daß ein Nachlaß noch vorhanden ist, und daß die Plückerschen Erben den Herausgebern der gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen alsbald davon Mitteilung machten. Wir setzen die Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften hiervon geziemend in Kenntniß. Dank dem außerordentlich freundlichen Entgegenkommen der Erben wird der Nachlaß der Göttinger Universitätsbibliothek einverleibt werden, wofür wir ihnen auch an dieser Stelle nochmals den verbindlichsten Dank aussprechen.

Als wichtigstes Stück des Nachlasses ist das Manuscript jener Abhandlung zu bezeichnen, die Plücker an Gergonne sandte, und die den bekannten Streit zwischen Poncelet und Gergonne resp. Plücker zur Folge hatte[1]). Gergonne hatte die Abhandlung beim Abdruck in seinen Annales wesentlich umgestaltet und überdies in zwei Teile zerlegt. Plücker selbst sagte später,

1) Eine ausführliche Darstellung des Sachverhalts findet sich in den Anmerkungen zu Bd. I der Ges. Abhandlungen, S. 592.

daß er den ersten Teil nur wiedererkannte, weil sein Name an der Spitze stand[1]). Insbesondere stammt von Gergonne die dualistische Form und der Hinweis, daß die von Plücker behandelten Aufgaben bereits in Poncelet's Traité des propriétés projectives eine Lösung gefunden hatten; bei Poncelet entstand daher die Meinung, Plücker habe am Traité ein Plagiat begangen. Die Frage war ein heftiger Prioritätsstreit; es ist deshalb von besonderem Interesse, daß das Manuscript den Sachverhalt, wie er von Gergonne und Plücker im Lauf der Polemik angegeben wurde, bestätigt. Das Manuscript hat aber auch an sich historisches Interesse. Ist es doch die erste Arbeit, in der die algebraischen Eigenschaften der Gleichungen, mit denen die analytische Geometrie operirt, und die geometrische Bedeutung vielfacher Wurzeln für die gegenseitige Lage der ebenen Gebilde in methodischer Weise zur Geltung kommen. In dieser Hinsicht kann Plücker als der ächte Weiterführer von Descartes betrachtet werden; denn was Descartes in erster Linie leistete, war, daß er lehrte, wie die einfachen Operationen mit algebraischen Größen durch geometrische Constructionen auf der Geraden ihre ausnahmslose Deutung finden[2]). Das Manuscript wird in den mathematischen Annalen zum Abdruck kommen.

Von Wichtigkeit sind auch diejenigen Stellen des Nachlasses, die auf Plückers mechanische Ideen etwas Licht zu werfen geeignet sind; auch über sie wird a. a. O. berichtet werden.

Ein großer Teil des mathematischen Nachlasses besteht aus Manuscripten zu älteren gedruckten Werken Plückers und zur Liniengeometrie. Soweit er ungedruckte Arbeiten oder Entwürfe enthält, scheint eine ausführlichere Berichterstattung oder Veröffentlichung entbehrlich zu sein — mögen doch mehr als 50 Jahre seit der Niederschrift der einzelnen Blätter verflossen sein. Wir begnügen uns mit der Bemerkung, daß Plücker außer einigen abzählenden Fragen über Ordnung und Classe gewisser specieller Raumgebilde hauptsächlich Probleme der differentiellen Curven- und Flächentheorie behandelt; am ausführlichsten hat er die Krümmungs-Mittelpunktsflächen der Flächen 2. Grades erörtert. Daneben findet man auch die Lösung eines complicirten Problems der Rentenrechnung. Eingehender beschäftigte er sich auch mit Strahlencongruenzen und den durch sie bestimmten Brennflächen;

---

1) Analytisch-geometrische Entwickelungen, Bd. II, Vorrede, S. VI.

2) Vgl. die Géométrie, neu herausgegeben 1886, übersetzt von Schlesinger, 1894.

hier scheint auch die Quelle seiner liniengeometrischen Ideen zu liegen. Schon auf einem frühen Zettel findet sich eine Bemerkung, in der eine Mannigfaltigkeit von ∞^3 Graden auftritt. Er behandelt Congruenzen, die entstehen, wenn man zu den Gleichungen

$$y = ax + b, \quad z = \alpha x + \beta$$

zwei Gleichungen zwischen a, b, α, β annimmt, und fährt dann fort: „Wenn nur eine Gleichung zwischen den 4 Coefficienten a, b, α, β existirt, so berühren sämtliche Geraden des Systems eine Oberfläche im Allgemeinen nicht und gehen durch eine und dieselbe Curve auch im Allgemeinen nicht." Allerdings war hiermit der entscheidende Schritt, der zur Liniengeometrie führte, noch nicht getan. Ihre endliche Gestalt erhielt sie bekanntlich erst durch die Conception, eine überzählige fünfte Coordinate einzuführen, die sie zu einer quadratischen Geometrie in einem linearen R_5 machte [1]).

Dem mathematischen Nachlaß gehört endlich ein Büchlein an, das ein Vorlesungsheft über die allgemeine Lehre der Projectivität und Collineation sein dürfte und mit der Centralperspective beginnt.

Das wichtigste Stück des physikalischen Nachlasses bildet das Manuscript einer in § 19 von Nr. 17 der Ges. phys. Abh. angekündigten, für Crelles Journal bestimmten Arbeit, deren erster Teil eine Ergänzung zu Plückers Abhandlung über die Wellenfläche zweiaxiger Krystalle darstellt. Es wird darin die Gleichung des Fresnelschen und Index-Ellipsoids, sowie der Strahlen- und Normalenfläche in Bipolarcoordinaten aufgestellt (bezogen auf die Strahlenaxen resp. die optischen Axen) und daran eine neue Construction der Strahlenfläche geknüpft. Der zweite, unvollendete Teil des Manuscripts enthält den Versuch, das magnetische Verhalten der Krystalle und dessen von Plücker damals noch vorausgesetzten Zusammenhang mit den optischen Eigenschaften [2]) gemäß einem schon in § 18 der Abh. Nr. 17 angedeuteten Gedanken theoretisch zu begründen.

Im übrigen enthält der physikalische Nachlaß außer einigen geringfügigen Notizen nur noch Manuscripte zu älteren bereits veröffentlichten Abhandlungen, oder aber Entwürfe, die sich inhaltlich mit andern bereits veröffentlichten Arbeiten im wesentlichen decken.

1) Vgl. die Anmerkungen zu Bd. I der Ges. Abhandlungen, S. 620.

2) Vgl. die Anmerkungen zu Nr. 2, 13 und 17 der Ges. phys. Abhandlungen.

Ueber die Konstruktion des Klassenkörpers für beliebige algebraische Zahlkörper, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten.

Von

Ph. Furtwängler.

Eingereicht von Herrn D. Hilbert am 5. August 1903.

§ 1.

Zweck der vorliegenden Mitteilung ist der Beweis des folgenden Satzes.

Satz 1: *Ist k ein beliebiger algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl ql^h, der eine l^{te} Einheitswurzel enthält, wo l eine ungrade Primzahl und q eine nicht durch l teilbare ganze rationale Zahl bedeutet, so existieren in bezug auf k genau e unverzweigte von einander unabhängige Körper vom Relativgrad l, wenn die Abel'sche Gruppe, welche die $q$ten Potenzen der Idealklassen aus k enthält, e Basisklassen besitzt. Die Gesamtheit dieser e Körper bildet einen relativ Abel'schen unverzweigten Körper in bezug auf k vom Relativgrad l^e.*

Der Beweis dieses Satzes nimmt die ersten 6 Paragraphen dieses Aufsatzes in Anspruch. In den letzten beiden Paragraphen gebe ich dann noch die Konstruktion des Klassenkörpers in einem einfachen, aber typischen Falle, nämlich unter der Annahme, daß das Klassensystem des Grundkörpers k in der Gestalt

$$c_1^{x_1}\, c_2^{x_2} \quad \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \ldots l-1 \\ x_2 = 0, 1, \ldots l-1 \end{pmatrix}$$

darstellbar ist.

Ueber die Litteratur und die Abkürzungen der Citate vergleiche man meinen im vorigen Hefte dieser Nachrichten erschienenen

Aufsatz[1]). Die in dem genannten Aufsatz angewandten Bezeichnungen werden hier, soweit als möglich, beibehalten.

§ 2.

Ich gebe zunächst den Satz 2 meines ersten Aufsatzes in etwas abgeänderter Fassung, die für die spätere Anwendung bequemer ist.

Satz 2: *Es sei k ein algebraischer Zahlkörper mit der Klassenzahl ql^h, wo $q \not\equiv 0\ (l)$ ist, und G_{l^h} bezeichne die Gruppe, die die $q$ten Potenzen der Idealklassen aus k enthält. Ist dann $G_{l^{h-1}}$ eine Untergruppe von G_{l^h} vom Grade l^{h-1} und läßt man $\mathfrak{w}^{(+)}$ alle Primideale durchlaufen, deren $q$te Potenzen einer Klasse aus $G_{l^{h-1}}$ angehören, so gilt:*

$$1) \qquad \sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \qquad (s>1)$$

wo $f(s)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, die stets endlich bleibt, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Beweis: Versteht man unter $\mathfrak{w}^{(+)}$ die angegebenen Primideale und unter $\mathfrak{w}^{(-)}$ die Primideale aus den übrigen Klassen von k, so folgt leicht aus Satz 2 meines ersten Aufsatzes:

$$2) \qquad (l-1)\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} - \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} \leqq f_1(s), \qquad s>1.$$

Ferner ist[2]):

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} + \sum_{(\mathfrak{w}^{(-)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(-)})^s} = \log \frac{1}{s-1} + f_2(s).$$

Durch Addition von (2) und (3) folgt:

$$\sum_{(\mathfrak{w}^{(+)})} \frac{1}{n(\mathfrak{w}^{(+)})^s} \leqq \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s)$$

$f_1(s)$, $f_2(s)$ und $f(s)$ sind Funktionen der reellen Veränderlichen s, die endlich bleiben, wenn sich s der Grenze 1 nähert.

Ich werde im Folgenden wieder um der einfachen Ausdrucksweise willen die nicht beschränkende Annahme machen, daß $q = 1$ sei.

---

1) *Ph. Furtwängler*, Die Konstruktion des Klassenkörpers für solche algebraische Zahlkörper, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten und deren Idealklassen eine cyclische Gruppe vom Grade l^h bilden.

2) *Hilbert*, Algebr. Zahlk. Satz 56, pg. 230.

Der Körper k soll also l^h Klassen enthalten und die Gruppe dieser Klassen möge durch folgendes Schema dargestellt werden:

$$C_1^{a_1} C_2^{a_2} \dots C_e^{a_e} \begin{pmatrix} a_1 = 0, 1, \dots l^{h_1}-1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_e = 0, 1, \dots l^{h_e}-1 \end{pmatrix}.$$

§ 3.

Es seien $\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_e$ Ideale aus den Klassen $C_1, \dots C_e$ und

$$1) \qquad \mathfrak{r}_1^{l^{h_1}} = (\varrho_1), \quad \dots \quad \mathfrak{r}_e^{l^{h_e}} = (\varrho_e)$$

wo $\varrho_1, \dots \varrho_e$ ganze Zahlen aus k bedeuten. Wir setzen dann

$$2) \qquad \varepsilon_{m'+1} = \varrho_1, \quad \dots \quad \varepsilon_{m'+e} = \varrho_e$$

und bestimmen in analoger Weise wie in § 3 meines ersten Aufsatzes ein System von $m'+e$ Primidealen $\mathfrak{q}$, das die Bedingungen:

$$3) \qquad \left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}_i}\right) \neq 1, \quad \left(\frac{\varepsilon_j}{\mathfrak{q}_i}\right) = 1 \quad (i \neq j) \quad (i, j = 1, 2 \dots m'+e)$$

befriedigt. Wählt man dann die Exponenten w so, daß

$$4) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{q}_1 \mathfrak{r}_1^{w_1^{(1)}} \dots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(1)}} &= (\varkappa_1) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \mathfrak{q}_{m'+e} \mathfrak{r}_1^{w_1^{(m'+e)}} \dots \mathfrak{r}_e^{w_e^{(m'+e)}} &= (\varkappa_{m'+e}) \end{aligned}$$

wird, wo $\varkappa_1, \dots \varkappa_{m'+e}$ ganze Zahlen aus k bedeuten, so enthält das System

$$6) \qquad \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}, \quad (u, v = 0, 1, \dots l-1)$$

wenn man die Exponenten v den Bedingungen:

$$7) \qquad \begin{aligned} v_1 w_1^{(1)} + v_2 w_1^{(2)} + \cdots v_{m'+e} w_1^{(m'+e)} &\equiv 0 \ (l) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_1 w_e^{(1)} + v_2 w_e^{(2)} + \cdots v_{m'+e} w_e^{(m'+e)} &\equiv 0 \ (l) \end{aligned}$$

unterwirft, sicher $l^{2m'+e}$ verschiedene Zahlen, die die Eigenschaft haben, daß sie die Ideale $\mathfrak{r}_1, \dots \mathfrak{r}_e$ nur in $l$ten Potenzen als Faktoren enthalten.

Da im § 3 meines ersten Aufsatzes gezeigt ist, daß es nur $l^{2m'}$ verschiedene Arten von Zahlen giebt, so ist damit die Existenz einer primären Zahl ω von der Gestalt:

$$8) \qquad \omega = \varepsilon_1^{u_1} \dots \varepsilon_{m'+e}^{u_{m'+e}} \varkappa_1^{v_1} \dots \varkappa_{m'+e}^{v_{m'+e}}$$

bewiesen[1]). Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, in dessen Relativdiscriminante nur die Primideale $\mathfrak{q}_1, \ldots \mathfrak{q}_{m'+e}$ aufgehen können[2]). Ist daher $v_1 = \ldots v_{m'+e} = 0$, so ist K in bezug auf k unverzweigt.

§ 4.

Wir nehmen an, daß

$$v_{i_1}, \ldots v_{i_t}$$

von Null verschieden sei, daß also die Primideale $\mathfrak{q}_{i_1}, \ldots \mathfrak{q}_{i_t}$ in der Relativdiscriminante von $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ aufgehen, und wollen zunächst für die Anzahl der ambigen Ideale von K eine obere Grenze ableiten.

Alle Klassen, deren $l$te Potenzen in k die Hauptklasse ergeben, bilden eine Gruppe G vom Grade l^e mit e Basisklassen; diejenigen unter ihnen, die in K in die Hauptklasse übergehen, mögen eine Gruppe G_1 vom Grade l^{e_1} mit e_1 Basisklassen bilden. Es sei

$$1) \qquad G_1 = D_1^{a_1} \ldots D_{e_1}^{a_{e_1}} \begin{pmatrix} a_1 = 0, 1, \ldots l-1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{e_1} = 0, 1, \ldots l-1 \end{pmatrix}$$

---

1) Der Inhalt der von Herrn *F. Bernstein* publicierten Mitteilung, die in meinem ersten Aufsatze erwähnt wurde, besteht im Wesentlichen in dem Nachweise, daß es e von einander unabhängige primäre Zahlen von der Gestalt (8) giebt. Das läßt sich in wenigen Zeilen beweisen. Es hat sich oben ergeben, daß es sicher l^e verschiedene Zahlen der Gestalt (8) giebt, die derselben Art angehören. Dividiert man dieselben durch eine unter ihnen, so erhält man l^e verschiedene primäre Zahlen $1, \omega_1, \ldots$. Diese bilden eine Abel'sche Gruppe, wenn man, kurz gesagt, die $l$te Potenz einer Zahl als 1 ansieht und unter der Zusammensetzung der Gruppenelemente die Multiplikation der Zahlen versteht. Da die $l$te Potenz eines jeden Gruppenelements 1 ergiebt, so läßt sich nach dem bekannten Satz über die Darstellbarkeit einer Abel'schen Gruppe durch eine Basis das genannte Zahlsystem in der Form darstellen:

$$\omega_1^{a_1} \ldots \omega_e^{a_e} \quad (a = 0, 1, \ldots l-1)$$

$\omega_1, \ldots \omega_e$ sind die gewünschten e unabhängigen primären Zahlen.

Herr *Bernstein* zieht bei seinen Betrachtungen die Exponenten v hinzu, was mir überflüssig erscheint, da sich alle Schlüsse ohne diese ausführen lassen. Ihre Hinzuziehung könnte sogar leicht die Meinung erwecken, als ob sich die verschiedenen ω durch die Werte der Exponenten v charakterisieren ließen. Das ist natürlich unmöglich, denn alle v sind ja in Wirklichkeit Null; zur Unterscheidung der verschiedenen Zahlen ω muß man an die Exponenten u anknüpfen. (Vergl. § 6).

2) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz Satz 6 und 13.

und

$$2) \qquad G = G_1 D_{e_1+1}^{a_{e_1+1}} \dots D_e^{a_e} \begin{pmatrix} a_{e_1+1} = 0, 1, \dots l-1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_e = 0, 1, \dots\dots l-1 \end{pmatrix}$$

wo $D_1, D_2, \dots D_e$ geeignet gewählte Klassen aus k bedeuten.

Es gilt dann folgender Satz:

Satz 3: *Ist die Anzahl aller ambigen Ideale des Körpers K gleich l^t und machen die sämtlichen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in K sind, l^{v^*} Einheitenverbände aus, so gilt, wenn wir die Anzahl aller ambigen Komplexe, die aus ambigen Idealen entspringen, mit l^{a^*} bezeichnen, für a^* die Ungleichung:*

$$3) \qquad a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + e_1.$$

Die Zahl e_1 ist dadurch bestimmt, daß l^{e_1} Idealklassen aus k in K in die Hauptklasse übergehen.

Beweis: Der Beweis ist nach dem Vorbilde des Beweises zu Satz 3 meines ersten Aufsatzes leicht zu führen. Es existieren $m' - v^* + 1$ Relationen von der Art (8) in § 4 meines ersten Aufsatzes und höchstens e_1 unabhängige Gleichungen von der Art (9) an derselben Stelle. Demnach ergiebt sich:

$$a^* \leqq t + v^* - m' - 1 + e_1.$$

Die Ungleichung (3) gilt auch, wenn ω das Produkt einer Einheit mit der $l$ten Potenz einer Zahl aus k ist.

Wir haben jetzt noch für die Anzahl aller ambigen Komplexe in K eine obere Grenze abzuleiten, die durch folgenden Satz gegeben wird:

Satz 4: *Ist a die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe und e die Anzahl der Basisklassen der Klassengruppe von k, so gilt die Ungleichung:*

$$a \leqq e - 1.$$

Beweis: Durch die $v - v^*$ unabhängigen Einheiten in k, die Relativnormen von gebrochenen Zahlen in K sind, erhält man $v - v^*$ ambige Idealklassen in K, die wir mit $A_1, \dots A_{v-v^*}$ bebezeichnen. Der Weg, auf dem man dieselben erhält, ist genau derselbe wie in dem Beweise zu Satz 20 meiner Abhandlung über die Reciprocitätsgesetze[1]). Bedeuten $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_{v-v^*}$ diejenigen Ideale, welche die ambigen Klassen $A_1, \dots A_{v-v^*}$ definiren und ist $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Ideal eines ambigen Komplexes A aus K, so ist zu untersuchen, ob $\mathfrak{A}$ einem Produkt aus Potenzen von $\mathfrak{A}_1, \dots \mathfrak{A}_{v-v^*}$ mit

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz pg. 23.

Potenzen der a^* unabhängigen ambigen Ideale aus K und einem Ideal aus k äquivalent ist.

Es gilt:

5) $$\mathfrak{A}^{(1-S)} = \Theta \mathfrak{j},$$

wo Θ eine Zahl aus k und $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k bedeutet.

S bezeichnet eine erzeugende Substitution der Relativgruppe von K in bezug auf k.

Wir wollen nun zunächst sehen, welchen Bedingungen die Ideale $\mathfrak{j}$, die eine Beziehung (5) erfüllen, unterworfen sind. Wir stellen zu diesem Zweck die Klassen in k, deren $l$te Potenz in k die Hauptklasse ergiebt, in der Gestalt dar:

6) $$(C_1^*)^{x_1} \dots (C_e^*)^{x_e} \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \dots l-1 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_e = 0, 1, \dots l-1 \end{pmatrix}$$

indem wir:

7) $$C_1^* = C_1^{l^{h_1-1}}, \quad \dots \quad C_e^* = C_e^{l^{h_e-1}}$$

setzen. Gehört nun $\mathfrak{j}$ der Klasse C' an und ist:

8) $$C' = (C_1^*)^{x_1'} \dots (C_e^*)^{x_e'},$$

so kann man setzen:

9) $$\mathfrak{j} = \alpha \mathfrak{r}_1^{x_1' l^{h_1-1}} \dots \mathfrak{r}_e^{x_e' l^{h_e-1}},$$

wo α eine Zahl aus k bedeutet. Andererseits ist nach (5)

$$\mathfrak{j}^l = N_k(\Theta^{-1}),$$

folglich

10) $$N_k(\Theta\alpha)^{-1} = \varepsilon' \mathfrak{p}_1^{x_1'} \dots \mathfrak{p}_e^{x_e'},$$

wenn ε' eine geeignete Einheit aus k bezeichnet.

Aus (10) folgt[1]):

11) $$\left(\frac{\varepsilon' \mathfrak{p}_1^{x_1'} \dots \mathfrak{p}_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \dots \left(\frac{\varepsilon' \mathfrak{p}_1^{x_1'} \dots \mathfrak{p}_e^{x_e'}}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1.$$

Unter den Indices $i_1, \dots i_t$ mögen nun aus der Reihe der Indices $m'+1, \dots m'+e$ genau f vorkommen und zwar mögen dies die Indices

12) $$m'+e^{(1)}, \dots m'+e^{(f)}$$

sein. Es folgt dann, wenn man die Bedingungen 3 in § 3 beachtet, denen die $\mathfrak{q}$ genügen müssen, daß:

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz Satz 15, pg. 16.

13) $$x'_{e^{(1)}} \equiv 0\,(l),\ \ldots\ x'_{e^{(f)}} \equiv 0\,(l)$$

sein muß; d. h. es giebt höchstens $e-f$ unabhängige Klassen in k, die in K der $(1-S)$ten Potenz einer Klasse gleich werden. Unter diesen sind e_1 Klassen, die in K in die Hauptklasse übergehen; geht aber j in K in ein Hauptideal über, so folgt genau wie an der citierten Stelle [1]), daß sich $\mathfrak{A}$ in der oben angegebenen Weise ausdrücken läßt. Es kann demnach in K höchstens $e-f-e_1$ unabhängige Klassen aus ambigen Komplexen geben, die sich nicht aus den Klassen $A_1, \ldots A_{\nu-1}$ und den aus den ambigen Idealen in K entspringenden Klassen zusammensetzen lassen.

Es ist also

14) $$a \leqq a^* + v - v^* + e - f - e_1.$$

Alle Einheiten ε in k nun, die Relativnormen von Zahlen aus K sind, müssen die Bedingungen:

15) $$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_1}}\right) = 1, \ldots \left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{q}_{i_t}}\right) = 1$$

befriedigen. Da unter den Indices $i_1, \ldots i_t$ f Indices aus der Reihe $m'+1, \ldots m'+e$ vorkommen, folgt aus (15)

16) $$v \leqq m' - t + f.$$

Addiert man jetzt endlich (3), (14) und (16), so ergiebt sich die gewünschte Beziehung:

$$a \leqq e - 1.$$

§ 5.

Wir werden in diesem Paragraphen einen dem Satz 7 meines ersten Aufsatzes entsprechenden Satz beweisen, der uns dann in den Stand setzen wird, in Verbindung mit Satz 2 die Existenz eines unverzweigten Körpers vom Relativgrad l in bezug auf k nachzuweisen.

Wir müssen zunächst noch einige Festsetzungen treffen. Es sei P ein beliebiger ambiger Komplex in K, der nicht der Hauptkomplex ist und es möge in K die Aequivalenz gelten:

$$P \sim Q^{(1-S)^p},$$

wo Q einen Komplex aus K bedeutet. Dagegen möge es keinen Komplex R aus K geben, der die Aequivalenz:

---

1) *Furtwängler*, Reciprocitätsgesetz pg. 24.

$$P \sim R^{(1-S)^{p+1}}$$

befriedigt. Ich nenne dann kurz p den Exponenten des ambigen Komplexes P. Die Möglichkeit einer solchen Definition ist ersichtlich, wenn man bedenkt, daß nicht für beliebig hohe Werte von p eine Aequivalenz der angegebenen Art erfüllt sein kann, weil die $(1-S)^l$te symbolische Potenz eines Komplexes immer auch die $l$te wirkliche Potenz eines Komplexes ist. Ich bestimme jetzt in K a unabhängige Komplexe in folgender Weise:

Ich wähle zunächst einen ambigen Komplex P_1 in K, dessen Exponent p_1 von keinem Exponenten eines anderen ambigen Komplexes übertroffen wird, darauf einen von P_1 unabhängigen ambigen Komplex P_2, dessen Exponent von keinem Exponenten eines von P_1 unabhängigen Komplexes übertroffen wird u. s. f. Der letzte so auszuwählende Komplex ist mit P_a zu bezeichnen; er hat einen Exponenten p_a, der von keinem Exponenten eines ambigen Komplexes unterschritten wird.

Es gelten dann in K Aequivalenzen folgender Art:

1) $$P_i \sim Q_i^{(1-S)^{p_i}}, \quad (i = 1, 2, \ldots a)$$

wo Q_i gewisse Komplexe aus K bedeuten, und die Exponenten p_i erfüllen die Bedingungen:

$$p_1 \geqq p_2 \ldots \geqq p_a.$$

Mit Hülfe der vorstehenden Festsetzungen können wir folgenden Satz aussprechen:

Satz 5: *Ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus K und $\mathfrak{J}^{(1-S)}$ einem Idealquotienten von der Gestalt:*

2) $$\mathfrak{j}\mathfrak{Q}_1^{F_1(S)} \ldots \mathfrak{Q}_a^{F_a(S)}$$

äquivalent, wo $F_1(S), \ldots F_a(S)$ ganze ganzzahlige Funktionen von S sind, so ist auch $\mathfrak{J}$ einem Idealquotienten dieser Gestalt äquivalent. Dabei bedeutet $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_a$ Ideale aus Klassen in K, die resp. den Komplexen $Q_1, \ldots Q_a$ angehören; diese sind, wie im Vorstehenden erläutert ist, durch (1) bestimmt.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall, daß für sämtliche Funktionen F gilt:

$$F_i(1) \equiv 0 \,(l) \quad (i = 1, \ldots a).$$

Wir können dann auch annehmen, daß die sämtlichen Funktionen $F(S)$ durch $(1-S)$ teilbar seien; denn es gilt

3) $$\mathfrak{Q}_i^l \sim \mathfrak{q}_i \mathfrak{Q}_i^{(1-S)\,G_i(S)},$$

wo $\mathfrak{q}_i$ die Relativnorm von $\mathfrak{Q}_i$ und $G_i(S)$ eine ganze, ganzzahlige

Funktion von S bedeutet. Die Richtigkeit von (3) erkennt man leicht, wenn man die Funktion

$$l-(1+S+\cdots S^{l-1})$$

nach Potenzen von $(1-S)$ entwickelt. Wir setzen daher jetzt:

$$F_i(S) = -(1-S)F_i'(S),$$

wo die Funktionen $F_i'(S)$ wieder ganze, ganzzahlige Funktionen von S sind.

Bezeichnet man dann den Ausdruck:

$$\mathfrak{Q}_1^{F_1'(S)} \ldots \mathfrak{Q}_a^{F_a'(S)}$$

mit $\mathfrak{F}'$, so gilt offenbar:

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{F}')^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}$$

d. h. $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$ gehört einem ambigen Komplex an, woraus sich ohne weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung in dem betrachteten Falle ergiebt.

Wir nehmen zweitens an, daß nicht sämtliche Funktionen $F_i(1)$ durch l teilbar sind und zwar sei F_b die erste unter diesen; ich setze dann wieder voraus, daß sämtliche Funktionen $F_1(S), \ldots F_{b-1}(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sind, was nach (3) gestattet ist. Ich potenziere jetzt die vorausgesetzte Aequivalenz:

$$\mathfrak{F}^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}\,\mathfrak{Q}_1^{F_1(S)} \ldots \mathfrak{Q}_{b-1}^{F_{b-1}(S)}\,\mathfrak{Q}_b^{F_b(S)} \ldots \mathfrak{Q}_a^{F_a(S)}$$

symbolisch mit $(1-S)^{p_b}$. Ich erhalte dadurch eine Aequivalenz von folgender Gestalt:

$$4) \qquad (\mathfrak{F}\mathfrak{F}')^{(1-S)^{p_b+1}} \sim \mathfrak{j}_1\,\mathfrak{A}_b^{c_b}\,\mathfrak{A}_{b+1}^{c_{b+1}} \ldots \mathfrak{A}_a^{c_a},$$

wo $\mathfrak{j}_1$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{F}'$ einen leicht angebbaren Idealquotienten aus K und $\mathfrak{A}_b$, $\mathfrak{A}_{b+1}$, $\ldots$ $\mathfrak{A}_a$ Ideale aus Klassen der ambigen Komplexe $P_b, \ldots P_a$ bedeuten. Da der Exponent c_b wegen $F_b(1) \not\equiv 0\,(l)$ nicht durch l teilbar ist, so steht die Aequivalenz (4) in Widerspruch mit unserer Festsetzung über die Auswahl der Komplexe P_i. Denn sie lehrt, daß es einen von den Komplexen $P_1, \ldots P_{b-1}$ unabhängigen ambigen Komplex giebt, dessen Exponent größer als p_b ist. Der angenommene zweite Fall ist deshalb unmöglich; hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 6: *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal aus* k *mit der Eigenschaft* $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, *so gehört* $\mathfrak{p}$ *einer durch* ω *völlig bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von* k *an, deren Grad den Betrag* l^{h-1} *nicht übersteigt.*

Beweis: Ich bezeichne die Klassen in k, in die die Relativnormen von $\mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_a$ hineinfallen, mit $c_1, \ldots c_a$. Bezeichne ich dann die kleinste Gruppe, der diese Klassen und außerdem sämtliche $l$te Potenzen von Klassen in k angehören, mit G, so hat G höchstens den Grad l^{h-1}. Denn da $a \leqq e-1$ ist, so können höchstens $e-1$ Basisklassen von k durch Produkte aus Potenzen von $c_1 \ldots c_a$ dargestellt werden; es muß daher sicher eine Basisklasse in G fehlen und der Grad von G ist daher höchstens l^{h-1}. Das Primideal $\mathfrak{p}$ gehört aber, wie leicht einzusehen ist, zu einer Klasse aus G. Denn wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ zerlegbar. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$, so giebt es sicher einen Exponenten b, so daß die Aequivalenz

$$5) \qquad \mathfrak{P}^{q_1 (1-S)^b} \sim 1$$

in K gilt, wo $q_1 \not\equiv 0 \,(l)$ ist. Daraus folgt nach Satz 14, daß $\mathfrak{P}^{q_1}$ einem Ausdruck von der Gestalt (2) äquivalent ist, woraus man sofort erkennt, daß $\mathfrak{p}$ zu einer Klasse der Gruppe G gehört. Von der Gruppe G, die durch ω vollständig bestimmt ist, wollen wir sagen, daß sie zu ω gehört.

Der Grad der Gruppe G ist genau gleich l^{h-1}. Die Richtigkeit dieser Thatsache wird sich aber erst später ergeben. Ich trage diesem Umstande dadurch Rechnung, daß ich jede Gruppe, die G enthält und deren Grad nicht größer als l^{h-1} ist, als zu ω gehörig bezeichne.

§ 6.

Wir können nunmehr zu dem Nachweis übergehen, daß inbezug auf den gegebenen Grundkörper k genau e von einander unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrade l existieren. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst, daß sicher *ein* solcher Körper existiert.

Ist der in den vorigen Paragraphen betrachtete Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ nicht unverzweigt inbezug auf k, so wähle man ein zweites System von Primidealen $\mathfrak{q}_1', \ldots \mathfrak{q}_{m'+r}'$, das ebenfalls die Bedingungen (3) in § 3 befriedigt. Man gelangt dadurch zu einer primären Zahl ω', die von ω verschieden ist. Ist jetzt der Körper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ unverzweigt in bezug auf k, so ist unsere Behauptung bewiesen; ist er verzweigt, so schließen wir aus Satz 6, daß zu ω' eine Untergruppe G', gehört, die von G verschieden sein mnß. Wäre nämlich $G = G'$, so würde man dadurch zu einem Widerspruche mit Satz 2 kommen. Denn bezeichnet man alle Primideale, für die

Funktion von S bedeutet. Die Richtigkeit von (3) erkennt man leicht, wenn man die Funktion

$$l-(1+S+\cdots S^{l-1})$$

nach Potenzen von $(1-S)$ entwickelt. Wir setzen daher jetzt:

$$F_i(S) = -(1-S)F_i'(S),$$

wo die Funktionen $F_i'(S)$ wieder ganze, ganzzahlige Funktionen von S sind.

Bezeichnet man dann den Ausdruck:

$$\mathfrak{Q}_1^{F_1'(S)} \cdots \mathfrak{Q}_a^{F_a'(S)}$$

mit $\mathfrak{F}'$, so gilt offenbar:

$$(\mathfrak{F}\mathfrak{F}')^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}$$

d. h. $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'$ gehört einem ambigen Komplex an, woraus sich ohne weiteres die Richtigkeit unserer Behauptung in dem betrachteten Falle ergiebt.

Wir nehmen zweitens an, daß nicht sämtliche Funktionen $F_i(1)$ durch l teilbar sind und zwar sei F_b die erste unter diesen; ich setze dann wieder voraus, daß sämtliche Funktionen $F_1(S), \ldots F_{b-1}(S)$ durch $(1-S)$ teilbar sind, was nach (3) gestattet ist. Ich potenziere jetzt die vorausgesetzte Aequivalenz:

$$\mathfrak{F}^{(1-S)} \sim \mathfrak{j}\,\mathfrak{Q}_1^{F_1(S)} \cdots \mathfrak{Q}_{b-1}^{F_{b-1}(S)}\mathfrak{Q}_b^{F_b(S)} \cdots \mathfrak{Q}_a^{F_a(S)}$$

symbolisch mit $(1-S)^{p_b}$. Ich erhalte dadurch eine Aequivalenz von folgender Gestalt:

$$4) \qquad (\mathfrak{F}\mathfrak{F}')^{(1-S)^{p_b+1}} \sim \mathfrak{j}_1\mathfrak{A}_b^{c_b}\mathfrak{A}_{b+1}^{c_{b+1}} \cdots \mathfrak{A}_a^{c_a},$$

wo $\mathfrak{j}_1$ ein Ideal aus k, $\mathfrak{F}'$ einen leicht angebbaren Idealquotienten aus K und $\mathfrak{A}_b, \mathfrak{A}_{b+1}, \ldots \mathfrak{A}_a$ Ideale aus Klassen der ambigen Komplexe $P_b, \ldots P_a$ bedeuten. Da der Exponent c_b wegen $F_b(1) \not\equiv 0\,(l)$ nicht durch l teilbar ist, so steht die Aequivalenz (4) in Widerspruch mit unserer Festsetzung über die Auswahl der Komplexe P_i. Denn sie lehrt, daß es einen von den Komplexen $P_1, \ldots P_{b-1}$ unabhängigen ambigen Komplex giebt, dessen Exponent größer als p_b ist. Der angenommene zweite Fall ist deshalb unmöglich; hiermit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Satz 6: *Ist* $\mathfrak{p}$ *ein Primideal aus* k *mit der Eigenschaft* $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$, *so gehört* $\mathfrak{p}$ *einer durch* ω *völlig bestimmten Untergruppe der Klassengruppe von* k *an, deren Grad den Betrag* l^{h-1} *nicht übersteigt.*

Beweis: Ich bezeichne die Klassen in k, in die die Relativnormen von $\mathfrak{Q}_1, \ldots \mathfrak{Q}_a$ hineinfallen, mit $c_1, \ldots c_a$. Bezeichne ich dann die kleinste Gruppe, der diese Klassen und außerdem sämtliche $l$te Potenzen von Klassen in k angehören, mit G, so hat G höchstens den Grad l^{h-1}. Denn da $a \leqq e-1$ ist, so können höchstens $e-1$ Basisklassen von k durch Produkte aus Potenzen von $c_1 \ldots c_a$ dargestellt werden; es muß daher sicher eine Basisklasse in G fehlen und der Grad von G ist daher höchstens l^{h-1}. Das Primideal $\mathfrak{p}$ gehört aber, wie leicht einzusehen ist, zu einer Klasse aus G. Denn wegen $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ ist $\mathfrak{p}$ in $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ zerlegbar. Ist $\mathfrak{P}$ ein Primfaktor von $\mathfrak{p}$, so giebt es sicher einen Exponenten b, so daß die Aequivalenz

$$5) \qquad \mathfrak{P}^{q_1(1-S)^b} \sim 1$$

in K gilt, wo $q_1 \not\equiv 0 \,(l)$ ist. Daraus folgt nach Satz 14, daß $\mathfrak{P}^{q_1}$ einem Ausdruck von der Gestalt (2) äquivalent ist, woraus man sofort erkennt, daß $\mathfrak{p}$ zu einer Klasse der Gruppe G gehört. Von der Gruppe G, die durch ω vollständig bestimmt ist, wollen wir sagen, daß sie zu ω gehört.

Der Grad der Gruppe G ist genau gleich l^{h-1}. Die Richtigkeit dieser Thatsache wird sich aber erst später ergeben. Ich trage diesem Umstande dadurch Rechnung, daß ich jede Gruppe, die G enthält und deren Grad nicht größer als l^{h-1} ist, als zu ω gehörig bezeichne.

§ 6.

Wir können nunmehr zu dem Nachweis übergehen, daß inbezug auf den gegebenen Grundkörper k genau e von einander unabhängige unverzweigte Körper vom Relativgrade l existieren. Wir beweisen zu diesem Zweck zunächst, daß sicher *ein* solcher Körper existiert.

Ist der in den vorigen Paragraphen betrachtete Körper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ nicht unverzweigt inbezug auf k, so wähle man ein zweites System von Primidealen $\mathfrak{q}_1', \ldots \mathfrak{q}_{m'+s}'$, das ebenfalls die Bedingungen (3) in § 3 befriedigt. Man gelangt dadurch zu einer primären Zahl ω', die von ω verschieden ist. Ist jetzt der Körper $K(\sqrt[l]{\omega'}, k)$ unverzweigt in bezug auf k, so ist unsere Behauptung bewiesen; ist er verzweigt, so schließen wir aus Satz 6, daß zu ω' eine Untergruppe G', gehört, die von G verschieden sein mnß. Wäre nämlich $G = G'$, so würde man dadurch zu einem Widerspruche mit Satz 2 kommen. Denn bezeichnet man alle Primideale, für die

der Congruenz (4) genügen. Man erkennt dies leicht, wenn man bedenkt, daß die Untergruppe als Abel'sche Gruppe selbst eine Basis besitzt, und dann die Klassen dieser Basis durch $C_1, \ldots C_e$ darstellt.

Eine leichte Abzählung vermittelst (4) lehrt dann, daß es $\frac{l^e-1}{l-1}$ verschiedene Untergruppen vom Grade l^{h-1} in der Klassengruppe giebt; andererseits folgt aus der Existenz der Zahlen $\omega_1, \ldots \omega_e$, daß es mindestens $\frac{l^e-1}{l-1}$ verschiedene unverzweigte Körper vom Relativgrade l in bezug auf k giebt. Da nun aber zu zwei verschiedenen Körpern nicht zwei gleiche Untergruppen gehören können, weil man sonst in der zu Anfang dieses Paragraphen ausgeführten Weise zu einem Widerspruch mit Satz 2 kommen würde, so lassen sich die verschiedenen unverzweigten Körper und die Untergruppen eindeutig zuordnen. Daraus folgt zugleich, daß weiter keine unverzweigten Körper vom Relativgrad l in bezug auf k existieren können und daß zu jedem solchen Körper eine Untergruppe der Klassengruppe von k gehört, die genau den Grad l^{h-1} hat.

Daß der Körper $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, \ldots \sqrt[l]{\omega_e}, k)$ in bezug anf k relativ Abel'sch vom Relativgrad l^e ist, ist evident.

Somit ist der zu Anfang dieser Mitteilung aufgestellte Satz vollständig bewiesen und auf dieser Grundlage muß nun die Konstruktion des zu k gehörigen Klassenkörpers erfolgen.

§ 7.

Um den zu k gehörigen Klassenkörper zu konstruieren, hat man noch folgenden Satz nötig:

Satz 7: *Die Anzahl der unabhängigen ambigen Komplexe in*

$$K_j(\sqrt[l]{\omega_j}, k) \quad (j = 1, 2, \ldots e)$$

ist gleich $e-1$.

Beweis: Wir werden im Folgenden den Index j immer fortlassen, da die Ausführungen gleichmäßig für die e Körper $K_1, \ldots K_e$ gelten, und die in den vorigen Paragraphen gebrauchten Bezeichnungen anwenden. Es mögen $Q_1, \ldots Q_a$ die durch (1) in § 5 definierten Komplexe aus K sein und $A_1, \ldots A_a$ mögen Idealklassen aus den Komplexen $Q_1, \ldots Q_a$ sein. Es sind dann sämtliche Idealklassen aus K in der Gestalt darstellbar:

1) $$c A_1^{F_1(S)} \ldots A_a^{F_a(S)},$$

wo c eine Klasse aus k und $F_1(S), \ldots F_a(S)$ ganze, ganzzahlige Funktionen von S bedeuten. S ist die Substitution, durch die $\sqrt[l]{\omega}$ in $\zeta\sqrt[l]{\omega}$ übergeführt wird. Bezeichnet man nun die Klassen in k, in welche die Relativnormen der Ideale aus $A_1, \ldots A_a$ hineinfallen, mit $c_1, \ldots c_a$, so muß die Gruppe der Klassen in k, die $c_1, \ldots c_a$ und außerdem sämtliche $l$ten Potenzen von Klassen enthält, vom Grade l^{h-1} sein.

Wäre aber $a < e-1$, so wäre dies offenbar unmöglich; es ist also notwendig

$$a \geqq e-1$$

und folglich wegen Satz 4:

2) $$a = e-1.$$

Auch die Anzahlen v und v^* lassen sich jetzt leicht bestimmen, wie folgender Satz lehrt:

Satz 8: *Haben v, v^*, e, e_1 und m' dieselbe Bedeutung wie in den Sätzen 3 und 4, so gilt*

3) $$v^* = m'-e_1+1$$

4) $$v = m'$$

oder in Worten:

Jede Einheit in k ist Relativnorm einer Zahl aus $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$, dagegen sind nur $l^{m'-e_1+1}$ Einheiten Relativnormen von Einheiten aus K.

Beweis: Aus den Ungleichungen (3) und (14) in § 4 folgt, wenn man beachtet, daß a^*, t und f den Wert Null haben und $a = e-1$ ist:

5) $$v^* \geqq m'+1-e_1$$

6) $$v \geqq v^*+e_1-1,$$

also auch

$$v \geqq m'.$$

Da v nicht größer als m' sein kann, muß $v = m'$ sein. Aus (6) folgt dann:

$$v^* \leqq m'+1-e_1,$$

also wegen (5)

$$v^* = m'-e_1+1.$$

Aus der letzten Gleichung schließt man noch, daß e_1 mindestens den Wert 1 haben muß, d. h. daß es sicher eine Klasse in k geben muß, die in k nicht Hauptklasse ist, aber in K in die Hauptklasse übergeht.

§ 8.

Wir wollen jetzt um des besseren Ueberblicks willen den Klassenkörper nicht im allgemeinsten Falle construieren, sondern zunächst einen einfacheren Fall wählen, bei dem aber bereits die wesentlichen Ueberlegungen zur Geltung kommen. Wir nehmen an, daß die Klassenzahl des Grundkörpers k gleich l^2 sei und daß seine Klassengruppe die Gestalt habe:

$$1) \qquad c_1^{x_1} c_2^{x_2} \begin{pmatrix} x_1 = 0, 1, \dots l-1 \\ x_2 = 0, 1, \dots l-1 \end{pmatrix}.$$

Es giebt dann, wie wir nachgewiesen haben, genau 2 unabhängige, unverzweigte Körper vom Relativgrad l in bezug auf k, die wir mit $K_1(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ und $K_2(\sqrt[l]{\omega_2}, k)$ bezeichnen. Wir denken uns die Zahlen ω_1 und ω_2 so gewählt, daß zu ω_1 die Klassengruppe $c_2^{x_2}(x_2 = 0, 1, \dots l-1)$ und zu ω_2 die Klassengruppe $c_1^{x_1}(x_1 = 0, 1, \dots l-1)$ gehört.

Wir betrachten jetzt den Körper $K_1(\sqrt[l]{\omega_1}, k)$ und bezeichnen die zugehörige Substitution $\sqrt[l]{\omega_1} \mid \zeta \sqrt[l]{\omega_1}$ mit S_1. Ist dann C_2 eine geeignete Klasse aus K_1, so lassen sich nach Satz 5 alle Klassen aus K_1 in der Gestalt darstellen:

$$c\, C_2^{F(S_1)}$$

wo c eine Klasse aus k bedeutet.

Ich führe jetzt der bequemen Ausdrucksweise wegen den Begriff des Klassenverbandes ein. Bedeutet c_1 eine feste Klasse und durchläuft c alle Klassen des Körpers k, so nenne ich die Gesamtheit der Klassen $c_1 c^l$ einen Klassenverband in k, der von der Klasse c_1 erzeugt wird. Ist c_1 die $l$te Potenz einer Klasse, so entsteht der Klassenhauptverband. Ein System von Klassenverbänden heißt unabhängig, wenn keiner der Hauptverband ist und wenn unter den erzeugenden Klassen $c_1, c_2, \dots c_s$ keine Relation:

$$c_1^{a_1} \dots c_s^{a_s} \sim c^l$$

besteht, wo c eine Klasse aus k bedeutet, außer wenn die Exponenten $a_1, \dots a_s$ sämtlich durch l teilbar sind.

In unserem Falle bestehen im Grundkörper k zwei unabhängige Klassenverbände; es wird zunächst unsere Aufgabe sein nachzuweisen, daß im Körper K_1 nur 1 unabhängiger Klassenverband existiert.

Man beachte zunächst, daß zu jeder Klasse A aus K_1 sich stets eine Klasse B aus K_1 derart bestimmen läßt, daß:

$$3) \qquad A^{(1-S_1)^{l-1}} \sim B^l a, \qquad a = A^{1+S_1+\cdots S_1^{q-1}}$$

wird, weil $1+S_1 \ldots S_1^{l-1}-(1-S_1)^{l-1} \equiv 0\,(l)$ ist. Es sei nun $i+1$ der kleinste Exponent, für den eine Aequivalenz:

$$4) \qquad C_2^{(1-S_1)^{i+1}} \sim c' B'^l$$

gilt, wo c' eine Klasse aus k und B' eine solche aus K_1 bedeutet. Es folgt dann aus (3), daß $i \leqq l-2$ ist. Ferner ergiebt sich leicht, daß keine Relation

$$5) \qquad C_2^{y_0+y_1(1-S_1)+\cdots y_i(1-S_1)^i} \sim c'' B''^l$$

gilt, wo c'' wieder eine Klasse aus k und B'' eine solche aus K_1 bedeutet, außer wenn $y_0, y_1, \ldots y_i$ sämtlich durch l teilbar sind. Denn bestände eine Relation (5) und wäre $y_{i'}$ der erste unter den Coefficienten y, der nicht durch l teilbar ist, so würde sich aus (5) eine Relation folgender Art ergeben:

$$6) \qquad C_2^{(1-S_1)^{i'}} \sim c'' C_2^{(1-S_1)^{i'+1} F(S_1)}$$

wo $F(S_1)$ eine ganze, ganzzahlige Funktion von S_1 bedeutet.

Aus (6) würde dann weiter folgen:

$$7) \qquad C_2^{(1-S_1)^{i'+1}} \sim C_2^{(1-S_1)^{i'+2} F(S_1)}$$

und daher, wenn man den aus (7) folgenden Wert von $C_2^{(1-S_1)^{i'+1}}$ in (6) einsetzt

$$8) \qquad C_2^{(1-S_1)^{i'}} \sim c'' C_2^{(1-S_1)^{i'+2} F_1(S_1)}$$

wo $F_1(S_1)$ wieder eine ganze, ganzzahlige Funktion von S_1 bedeutet.

Durch Fortsetzung des Verfahrens erkennt man, daß bereits für den Index $i' \leqq i$ eine Aequivalenz von der Art (4) bestehen müßte, was gegen unsere Annahme ist. Es kann deshalb keine Relation (5) bestehen und daher sind die durch die Klassen

$$9) \qquad C_2,\ C_2^{(1-S_1)},\ \ldots\ C_2^{(1-S_1)^i}$$

erzeugten Klassenverbände von einander unabhängig. Die Klassen aus k können in K_1 höchstens einen unabhängigen Klassenverband liefern. Denn aus der Gleichung (3) in Satz 8 folgt, daß e_1 min-

destens den Wert 1 hat, daß also sicher ein Klassenverband aus k, der in k nicht der Hauptverband ist, in K_1 in den Hauptverband übergeht. Es sei nun c^* eine Klasse aus k_1, die einen von den durch (9) definierten Klassenverbänden unabhängigen Verband in K_1 erzeugt, falls ein solcher existiert, andernfalls sei $c^* = 1$. Das System der Klassenverbände von K_1 ist dann in der Gestalt darstellbar:

$$10)\quad c^{*x} C_2^{y_0} C_2^{y_1(1-S_1)} \dots C_2^{y_i(1-S_1)^i} B^l \quad (x,\ y = 0, 1, \dots l-1).$$

Wir nehmen nun an, daß in K_1 mehr als ein unabhängiger Klassenverband existiert und wollen zeigen, daß wir dadurch zu einem Widerspruch kommen. Es muß bei unserer Annahme einen in bezug auf K_1 relativ cyclischen unverzweigten Körper $K(\sqrt[l]{\Omega}, K_1)$ geben, der von dem Körper $K_2(\sqrt[l]{\omega_2}, K_1)$ verschieden ist. Da mit Ω auch gleichzeitig $S_1\Omega, \dots S_1^{l-1}\Omega$ primär sind, so werden durch

$$\sqrt[l]{\omega_2},\ \sqrt[l]{\Omega},\ \sqrt[l]{S_1\Omega},\ \dots\ \sqrt[l]{S_1^{l-1}\Omega}$$

$l+1$ unverzweigte relativ cyclische Körper vom Relativgrad l in bezug auf K_1 erzeugt. Da höchstens $i+2 = l$ derartige Körper existieren können, muß eine Beziehung

$$11)\quad \Omega^{F(S_1)} = \omega_2^a$$

gelten, wo $F(S_1)$ eine ganze ganzzahlige Funktion von S_1 vom Grade $l-1$ bedeutet, deren Coefficienten nicht sämtlich durch l teilbar sind. Es sei

$$12)\quad F(S_1) = z_0 + z_1(1-S_1) + \cdots z_{l-1}(1-S_1)^{l-1}$$

und es sei z_h der erste Coefficient, der nicht durch l teilbar ist. Es ergiebt sich dann genau wie oben, daß die Relation:

$$13)\quad \Omega^{(1-S_1)^h} = \omega_2^a A^l$$

gilt, wo A eine Zahl aus K_1 bedeutet; dagegen besteht für keinen kleineren Exponenten als h eine Relation von der Art (13). Ich bezeichne jetzt die Zahl:

$$14)\quad \Omega^{(1-S_1)^{h-1}} \text{ mit } \Omega';$$

dann ist

$$14)\quad \Omega'^{(1-S_1)} = \omega_2^a A^l.$$

Ich behaupte nun, daß

$$a \equiv 0\ (l) \text{ ist.}$$

Wäre nämlich $a \not\equiv 0$, so wäre der Körper $K'(\sqrt[l]{\mathfrak{Q}'}, K_1)$ kein relativ Galois'scher Körper in bezug auf K_1. Die Adjunktion der mit K' relativ-conjugierten Körper zu K' müßte dann einen relativ-Galois'schen Körper in bezug auf K_1 ergeben, dessen Relativgrad ein Teiler von $l!$ sein müßte. Andererseits ist dieser Körper, wie aus (14) hervorgeht, in dem Körper $K(\sqrt[l]{\mathfrak{Q}'}, \sqrt[l]{\omega_s}, K_1)$ enthalten, sein Relativgrad also ein Teiler von l^2, d. h. der Relativgrad muß gleich l sein und K' selbst somit ein relativ Galois'scher Körper in bezug auf K_1. Es ist daher nur der Fall $a \equiv 0\ (l)$ möglich.

Wir untersuchen nun, welche Untergruppe G der Klassengruppe von K_1 zu $\mathfrak{Q}'$ gehört; sie muß die Eigenschaft haben, daß

$$G = S_1 G. \tag{15}$$

Ist sie durch die Congruenz

$$bx + b_0 y_0 + \cdots b_i y_i \equiv 0\ (l) \tag{16}$$

definiert, wo x, y die Exponenten aus (10) bedeuten und $b, b_0, \ldots b_i$ gewöhnliche ganze Zahlen sind, so folgt, daß die Gruppe $S_1 G$ durch die Congruenz:

$$b(x - y_i d) + b_0 y_0 + b_1(-y_0 + y_1) + \cdots b_i(-y_{i-1} + y_i) \equiv 0\ (l) \tag{17}$$

definiert ist, wenn wir annehmen, daß

$$C_2^{(1-S_1)^{i+1}} \sim c^{*d} B'^l$$

ist. Ordnet man (17), so ergiebt sich

$$bx + y_0(b_0 - b_1) + \cdots y_{i-1}(b_{i-1} - b_i) + y_i(-bd + b_i) \equiv 0\ (l). \tag{18}$$

Da (18) und (16) identisch sein müssen, folgt

$$b_0 = b_1 = \ldots b_i = 0 \qquad d = 0$$

d. h. die Gruppe G ist durch die Congruenz

$$x \equiv 0\ (l) \tag{19}$$

bestimmt, wo x den Exponenten von c^* in (10) bedeutet. Es existiert nun in K_1 eine Klasse A, die einen ambigen Komplex bestimmt und für die daher die Aequivalenz

$$A^{(1-S_1)} \sim c^{*f} \tag{20}$$

gilt. Ist $f \equiv 0\ (l)$, so ist A eine ambige Klasse in k. In diesem

Falle ist $v-v^* \geqq 1$ und daher $e_1 \geqq 2$, d. h. alle Klassen aus k gehen in k_1 in die Hauptklasse über. Es wäre dann

$$c^* \sim 1 \text{ in } K_1$$

und die Gruppe G müßte dann sämtliche Klassen aus K_1 umfassen. Da dies unmöglich ist, muß $f \not\equiv 0 \,(l)$ sein. Da die Klasse A mit einer beliebigen Klasse aus k multipliciert werden kann, ohne daß dadurch (20) sich ändert, können wir annehmen, daß A zur Gruppe G gehört; dann gehört auch wegen (15) $S_1 A$ zu G und daher müßte auch nach (20) $c^{*'}$, also auch c^* zur Gruppe G gehören. Das widerspricht der Congruenz (19). Wir kommen daher, wenn wir annehmen, daß im Körper K_1 mehr als ein Klassenverband existiert, zu einem Widerspruch. Es existiert deshalb nur ein unabhängiger Klassenverband in K_1 und sämtliche Klassen von K_1 sind deshalb in der Gestalt:

$$C_2^{y_0} B^l$$

darstellbar, oder auch, wenn man y_0 ein geeignetes Wertsystem durchlaufen läßt, in der Gestalt:

$$C_2^{y_0}.$$

Wir behaupten nun, daß die Relativnormen der Ideale aus C_2' in eine Klasse

$$c_2^{x_2} \quad (x_2 = 1, 2, \ldots l-1)$$

fallen. Denn ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus C_2 und fiele die Relativnorm $\mathfrak{j}$ von $\mathfrak{J}$ in eine Klasse

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2}$$

wo $x_1 \not\equiv 0 \,(l)$ wäre, so müßte in $\mathfrak{j}$ ein nicht in $\mathfrak{J}$ aufgehender Primfaktor $\mathfrak{p}$ aufgehen, der ebenfalls einer derartigen Klasse angehörte. Da dieses Primideal $\mathfrak{p}$ in K_1 in l Faktoren zerfallen müßte, ergiebt sich ein Widerspruch; denn es können nur die Primideale aus den Klassen

$$c_2^{x_2} \quad (x_2 = 0, 1, \ldots l-1)$$

in K_1 zerfallen.

Da die Relativnormen der Ideale aus C_2 auch nicht in die Hauptklasse von k fallen können, so ist damit nachgewiesen, daß sie in eine der Klassen:

$$c_2^{x_2} \quad (x_2 = 1, 2, \ldots l-1)$$

fallen.

Da die Klasse C_2 einem ambigen Komplex angehört, ist C_2^l einer Klasse aus k äquivalent und daher entweder:

$$C_2^l \sim 1 \text{ oder erst } C_2^p \sim 1.$$

Tritt der erste Fall ein, so werden offenbar alle Ideale aus k in K_1 Hauptideale und die Klassenzahl des Körpers $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ wird zu l prim. Wir wollen zeigen, daß dieser Fall stets eintreten muß.

Angenommen nämlich, es wäre

$$C_2^l \sim 1,$$

so wäre die Klassenzahl von $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ offenbar durch l teilbar.

Es giebt nun eine von c_2 verschiedene Klasse $\bar{c}$ in k, die in k nicht Hauptklasse ist, wohl aber in K_1 in die Hauptklasse übergeht. Ich wähle jetzt ein Primideal aus einer der Klassen $\bar{c}^f$ $(f = 1, 2, \ldots (l-1))$. Daß es in einer dieser Klassen ein Primideal giebt, erkennt man leicht in folgender Weise. Die Klassen

$$\bar{c}^{f'} \quad (f' = 0, 1, \ldots l-1)$$

bilden eine Untergruppe der Klassengruppe von k, zu der eine bestimmte primäre Zahl $\bar{\omega}$ gehört, derart, daß alle Primideale $\mathfrak{p}$ mit der Eigenschaft

$$\left(\frac{\bar{\omega}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$$

in einer Klasse der genannten Untergruppe liegen. Da nicht alle diese Primideale in der Hauptklasse liegen können, weil sich sonst ein Widerspruch gegen Satz 2 ergeben würde, muß in einer der Klassen $\bar{c}^f$ ein Primideal vorhanden sein. Ist dies das Primideal $\mathfrak{p}$, so geht $\mathfrak{p}$ in K_1 in die Hauptklasse über, bleibt aber Primideal, weil ω_2 Nichtrest von $\mathfrak{p}$ ist. Im Körper $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ zerfällt dann $\mathfrak{p}$ in l Faktoren, deren jeder, wie aus meinem ersten Aufsatze folgt, der Hauptklasse angehört.

Ich betrachte jetzt den Körper $\overline{K}(\sqrt[l]{\bar{\omega}}, k)$, der unverzweigt und relativ cyclisch vom Relativgrad l in bezug auf k ist. Das Klassensystem von $\overline{K}$ läßt sich dann in der Gestalt schreiben:

$$\overline{C}^{\overline{y_0}},$$

wo $\overline{C}$ eine geeignete Klasse aus $\overline{K}$ bezeichnet. Ist jetzt

$$\overline{C}^l \sim 1,$$

so wäre die Klassenzahl von $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ zu l prim gegen unsere Annahme. Es müßte daher $\overline{C}^l \frown\!\!\!\smile 1$ sein und deshalb auch, wie leicht zu erkennen ist, $\overline{c} \frown\!\!\!\smile 1$ in $\overline{K}$.

Ein Primideal $\mathfrak{p}$ aus einer der Klassen $\overline{c}^f$ $(f = 1, 2, \ldots l-1)$ mit der Eigenschaft $\left(\frac{\overline{\omega}}{\mathfrak{p}}\right) = 1$ würde dann in $\overline{K}$ in l Primfaktoren zerfallen, von denen einer $\overline{\mathfrak{P}}$ sei. $\overline{\mathfrak{P}}$ würde dann in $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ Primideal bleiben, aber nicht in die Hauptklasse übergehen. Das widerspricht dem eben Bewiesenen. Unsere Annahme, daß $C_2^l \frown\!\!\!\smile 1$ sei und die Klassenzahl von $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ durch l teilbar sei, ist daher falsch. Es ist vielmehr

$$C_2^l \sim 1$$

und die Klassenzahl von $K(\sqrt[l]{\omega_1}, \sqrt[l]{\omega_2}, k)$ ist zu l prim. Wir fassen das bisher Bewiesene noch einmal kurz zusammen:

Satz 9: *Der Körper k, der eine l^{te} Einheitswurzel enthält und dessen Klassensystem in der Gestalt:*

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

darstellbar ist, besitzt $\frac{l^2-1}{l-1} = l+1$ verschiedene unverzweigte relativ cyclische Oberkörper vom Relativgrad l, unter denen sich 2 unabhängige befinden. Die Klassenzahl der sämtlichen $l+1$ Oberkörper ist genau durch die erste Potenz von l teilbar, und alle Ideale aus k werden in jedem von ihnen Hauptideale. Die sämtlichen $l+1$ Oberkörper sind enthalten in einem Körper K, der relativ Abel'sch vom Relativgrad l^2 und unverzweigt in bezug auf k ist. Die Klassenzahl des Körpers K ist zu l prim, er ist der zu k gehörige Klassenkörper.

Die Ausdehnung des vorstehenden Satzes auf den Fall, daß das Klassensystem des Grundkörpers k in der Gestalt:

$$c_1^{x_1} c_2^{x_2} \ldots c_s^{x_s} \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

darstellbar ist, ist ohne weiteres ausführbar. Für solche Grundkörper k, die eine $l$te Einheitswurzel enthalten und deren Klassensystem ganz beliebig ist, werde ich noch einige Bemerkungen bezüglich der Konstruktion des zugehörigen Klassenkörpers im nächsten Aufsatz machen, dessen Hauptinhalt die Untersuchung der Zerlegung der Primideale des Grundkörpers k im Klassenkörper bilden wird. Dabei wird sich ein wesentlicher Unterschied

gegen den Fall $l = 2$ bemerkbar machen, für den die vorstehenden Entwickelungen völlig gültig sind, wenn der Grundkörper k und seine conjugierten Körper imaginär sind. Es sei dies noch an dem einfachsten Falle, daß das Klassensystem des Grundkörpers k:

$$c^x \quad (x = 0, 1, \ldots l-1)$$

ist, auseinandergesetzt. Der Klassenkörper $K(\sqrt[l]{\omega}, k)$ ist dann relativ cyclisch vom Relativgrad l in bezug auf k und es wird sich zeigen, daß alle Primideale $\mathfrak{p}^{(-)}$ aus den Klassen c, c^2, $\ldots$ c^{l-1} in K Primideale bleiben, während alle Primideale $\mathfrak{p}^{(+)}$ aus der Hauptklasse von k in K in l verschiedene Primfaktoren zerfallen, was sich durch die Formeln ausdrücken läßt:

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}^{(-)}}\right) \neq 1, \qquad \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}^{(+)}}\right) = 1.$$

Diese Angaben erschöpfen im Falle $l = 2$ den Gegenstand völlig, was für $l > 2$ keineswegs zutrifft; es gelten für $l > 2$ vielmehr noch wesentlich schärfere Sätze. Es zeigt sich nämlich, daß, wenn $\mathfrak{p}_{c^i}$ irgend ein Primideal aus der Klasse c^i bedeutet, das Potenzrestsymbol $\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_{c^i}}\right)$ stets den gleichen Wert hat; es gilt sogar noch weiter:

$$\left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_{c^i}}\right)^{c^r} = \left(\frac{\omega}{\mathfrak{p}_{c^{i'}}}\right)^{i}$$

und es läßt sich überhaupt nachweisen, daß nicht nur für alle Primideale, sondern auch für alle Ideale aus einer bestimmten Klasse der Restcharakter von ω der gleiche ist.

Es läßt sich also die Zugehörigkeit eines Ideals $\mathfrak{j}$ zu einer bestimmten Klasse völlig durch Angabe des Restcharakters von ω nach $\mathfrak{j}$ charakterisieren. Alle diese schärferen Angaben sind im Falle $l = 2$ selbstverständlich, weil nur 1 Nichtrestcharakter existiert.

Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers.

Zweite Mitteilung.

Von

F. Bernstein.

Vorgelegt durch Herrn Hilbert in der Sitzung vom 31. October 1903.

In einer ersten Mitteilung[1]) gleichlautenden Titels war der Existenzbeweis des Klassenkörpers für den Fall begonnen, daß die Klassenanzahl h des Grundkörpers gleich l^p war und daß das Geschlecht der Klassen gleich p und größer als 1 war. Diesen Beweis setzen wir unter Beibehaltung aller eingeführten Bezeichnungen fort und zeigen, daß die Relativdiskriminanten der durch die Gleichung (33) definierten Körper gleich 1 sind.

§ 1.

Wir betrachten einen der Körper

$$k(x_1), \quad \ldots, \quad k(x_p)$$

z. B. $k(x_\pi)$ und führen die folgenden Bezeichnungen ein.

Es sei

v^* = der Anzahl der von einander unabhängigen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten in $k(x_\pi)$ sind,

v = der Anzahl der von einander unabhängigen Einheiten in k, die Relativnormen von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in $k(x_\pi)$ sind,

---

1) Ueber den Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. Erste Mitteilung. (Gött. Nachr. 1903, Heft 2).

a^* = der Anzahl der von einander unabhängigen ambigen Komplexe in $k(x_\pi)$, welche aus ambigen Idealen entspringen,

$\bar{a}$ = der Anzahl der von einander unabhängigen ambigen Komplexe in $k(x_\pi)$, welche aus ambigen Klassen entspringen,

a = der Anzahl der von einander unabhängigen ambigen Komplexe in $k(x_\pi)$,

t = der Anzahl der Primfaktoren in der Relativdiskriminante von $k(x_\pi)$,

n = der Anzahl der von einander unabhängigen Klassen c in k, welche in $k(x_\pi)$ Hauptklassen werden (übrigens ist für diese $c' = 1$).

Es besteht für einen beliebigen relativ cyklischen Zahlkörper vom Relativgrade l gegenüber k und insbesondere also für den Körper $k(x_\pi)$ der

Hilfssatz 1. Es ist

$$\bar{a} \leqq t - \frac{m}{2} + v + n - 1. \tag{34}$$

Den Beweis dieses Hilfssatzes verschieben wir auf eine ausführlichere Darstellung und fahren in der Betrachtung fort.

Es sei t verschieden von Null und es seien also von den Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+\pi}$, genau t größer als Null.

Es mögen f unter ihnen einen Index größer als $\frac{m}{2}$ haben.

Die Primideale, welche in der Relativdiscriminante von $k(x_\pi)$ aufgehen, seien entsprechenderweise mit

$$\mathfrak{q}'_1, \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}'_{t-f},$$

und

$$\mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+1}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{q}'_{\frac{m}{2}+f}$$

bezeichnet. Es besteht der

Hilfssatz 2. Es ist

$$v \leqq \frac{m}{2} - t + f. \tag{35}$$

Beweis. Es mögen $y_1, \ldots, y_{\frac{m}{2}}$ irgend welche Exponenten aus der Reihe $0 \ldots l-1$ bedeuten, ferner sei $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{\frac{m}{2}}$ ein System von Grundeinheiten in k; soll dann die Einheit

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{y_1} \dots \varepsilon_{\frac{m}{2}}^{y_{\frac{m}{2}}}$$

die Relativnorm einer Einheit oder gebrochenen Zahl in $k(x_\pi)$ sein, so müssen die $t-f$ Bedingungen

$$\left(\frac{\varepsilon}{q_1'}\right) = +1, \quad \dots, \quad \left(\frac{\varepsilon}{q_{t-f}'}\right) = +1 \tag{37}$$

erfüllt sein. Diese Bedingungen haben zur Folge, daß $t-f$ der Exponenten $y_1, \dots, y_{\frac{m}{2}}$ gleich Null sein müssen. Hieraus entnehmen wir, daß die Anzahl v der von einander unabhängigen Einheiten in k, welche Relativnormen von Einheiten oder gebrochenen Zahlen in $k(x_\pi)$ sind, höchstens gleich $\frac{m}{2}-t+f$ ist.

Es gilt ferner der

Hilfssatz 3. Es ist

$$a-\bar{a} \leq p-n-f. \tag{38}$$

Beweis. Die definierende Gleichung für einen ambigen Komplex, welcher keine ambigen Klassen enthält, ist gegeben durch

$$SC = Cd, \tag{39}$$

wo C und SC relativ konjugierte Klassen der Körper $k(x_\pi)$ bedeuten und wo d eine Klasse des Körpers k vorstellt, welche in $k(x_\pi)$ nicht Hauptklasse wird. Man überzeugt sich leicht, daß die Anzahl der von einander unabhängigen Lösungen der Gleichung (39) höchstens so groß ist, als die Anzahl der von einander unabhängigen Klassen d in k, die in $k(x_\pi)$ nicht Hauptklassen werden. D. h. es ist

$$a-\bar{a} \leq p-n. \tag{40}$$

Die Ideale

$$q_{\frac{m}{2}+1}', \quad \dots, \quad q_{\frac{m}{2}+f}'$$

mögen den Zahlen

$$\varrho_1', \quad \dots, \quad \varrho_f'$$

aus der Reihe $\varrho_1, \dots, \varrho_p$ mittels der Gleichungen (19) entsprechen. Es sei

$$(\varrho_1') = \mathfrak{d}_1', \quad \dots, \quad (\varrho_f') = \mathfrak{d}_f' \tag{41}$$

gesetzt, wo $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_f$ Ideale in k bedeuten, deren zugehörige Klassen $d_1, \ldots, d_f$ heißen mögen.

Es werden $d_1, \ldots, d_f$ in $k(x_\pi)$ nicht Hauptklassen. Denn sei andernfalls

$$\mathfrak{b}_1 = (P_1), \quad \ldots, \quad \mathfrak{b}_f = (P_f), \tag{42}$$

so wäre

$$\varepsilon_1 n_k(P_1) = \varrho_1', \quad \ldots, \quad \varepsilon_f n_k(P_f) = \varrho_f', \tag{43}$$

und also gemäß den Relationen (19)

$$\left(\frac{\varepsilon_1 n_k(P_1)}{q_m'^{\frac{l}{2}+1}}\right) \neq 1, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_f n_k(P_f)}{q_m'^{\frac{l}{2}+f}}\right) \neq 1, \tag{43}$$

da aber nach denselben Relationen

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{q_m'^{\frac{l}{2}+1}}\right) = +1, \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_f}{q_m'^{\frac{l}{2}+f}}\right) = +1$$

ist, so bietet die Gleichung (44) einen Widerspruch dar. Es sei jetzt

$$d_1, \quad \ldots, \quad d_{f-1}$$

ein vollständiges System der von einander unabhängigen Klasse $d^l = 1$, welche in $k(x_\pi)$ nicht Hauptklassen werden, sodaß also

$$d = d_1^{e_1} \ldots d_{f-1}^{e_{f-1}}$$

ist, wo $e_1, \ldots, e_{f-1}$ irgend welche Werte $0 \ldots l-1$ bedeuten. In der ausführlicher geschriebenen Gleichung (39)

$$SC = Cd_1^{e_1} \ldots d_{f-1}^{e_{f-1}} \tag{45}$$

müssen $e_1 = e_2 = \cdots = e_f = 0$ sein.

Denn sind $\mathfrak{b}_f, \ldots, \mathfrak{b}_{f-1}$ noch näher zu bestimmende Ideale aus den Klassen $d_f, \ldots, d_{f-1}$, ist $\mathfrak{J}$ ein Ideal aus C und A eine gebrochene Zahl in $k(x_\pi)$, so besteht die Gleichung

$$(A)\mathfrak{J}^{l-1} = \mathfrak{b}_1^{e_1} \ldots \mathfrak{b}_{f-1}^{e_{f-1}}. \tag{46}$$

Wir bilden die Relativnorm und erhalten

$$\varepsilon n_k(A) = \varrho_1'^{e_1} \ldots \varrho_{f-1}'^{e_{f-1}}; \tag{47}$$

die Zahlen $\varrho_f', \ldots, \varrho_{f-1}'$ mögen infolge der Wahl von $d_f, \ldots, d_{f-1}$

und der Wahl von $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_{r-1}$ mit Zahlen aus der Reihe $\varrho_1, \ldots, \varrho_r$ übereinstimmen.

Die Gleichungen

$$(48) \qquad \left(\frac{\varepsilon n_1(A)}{q'^{\frac{m}{2}+1}}\right) = \left(\frac{\varrho_1'^{e_1}}{q'^{\frac{m}{2}+1}}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon n_1(A)}{q'^{\frac{m}{2}+f}}\right) = \left(\frac{\varrho_f'^{e_f}}{q'^{\frac{m}{2}+f}}\right),$$

welche aus (47) und (19) folgen, lehren in Rücksicht auf (19), daß

$$e_1 = 0, \quad \ldots, \quad e_f = 0.$$

sein muß. Durch gleiche Schlüsse, wie bei der Ableitung der Gleichung (40) gelangt man jetzt zu dem Resultat, daß

$$a - \bar{a} = p - n - f$$

ist. Durch Addition der Ungleichungen (34), (35), und (38) folgt

Satz 1. Es ist

$$(49) \qquad a \leqq p - n.$$

§ 2.

Wir stellen jetzt das folgende Theorem auf:

Satz 2. Es sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal in k, welches der Congruenzbedingung

$$(50) \qquad \left(\frac{\omega_\pi}{\mathfrak{p}}\right) = +1$$

genügt. Dann gehört die Klasse in welcher $\mathfrak{p}$ liegt, zu einer bestimmten Untergruppe H der Gruppe G der Klassen von k, welche gegenüber der Gruppe G den Index l hat.

Um den Beweis zu führen ist ein Hilfssatz erforderlich, der folgendermaßen lautet:

Hilfssatz 4. Jede Klasse C in $k(x_\pi)$ ist in der Form

$$(51) \qquad C^u = C_1^{F_1(S)} \ldots C_u^{F_u(S)} c$$

darstellbar, wo u eine in l prime Zahl und $F_1(S), \ldots, F_u(S)$ ganzzahlige Funktion von S vom Grad $l-2$ darstellen, und wo c eine Klasse in k bedeutet.

Der Beweis dieses Hilfssatzes kann mit der gleichen Methode geführt werden, mit der die Existenz der relativen Grundeinheiten bewiesen wird [1]).

1) siehe D. Hilbert: Algebraische Zahlkörper § 55. Jahresber. d. d. Math.-Vereinigung. Bd. 4. 1894—95.

Infolge der Gleichung (50) zerfällt das Primideal $\mathfrak{p}$ im Körper $k(x_\pi)$ in l Primideale, deren eines $\mathfrak{P}$ heiße. Gemäß der Gleichung (51) besteht eine Aequivalenz

$$\mathfrak{P}^u \sim \mathfrak{J}_1^{F_1(S)} \dots \mathfrak{J}_a^{F_a(S)} \mathfrak{j}, \tag{52}$$

wo $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_a$ geeignete Ideale aus $C_1, \dots, C_a$ und wo $\mathfrak{j}$ ein Ideal aus c bedeutet.

Wir bilden die Relativnorm. Es wird

$$\mathfrak{p}^u \sim \mathfrak{j}_1^{g_1} \dots \mathfrak{j}_a^{g_a} \cdot \mathfrak{j}^l, \tag{53}$$

wo $g_1, \dots, g_a$ Exponenten aus der Reihe $0 \dots l-1$ bedeuten, und wo $\mathfrak{j}_1, \dots, \mathfrak{j}_a$ die Relativnormen der $\mathfrak{J}_1, \dots, \mathfrak{J}_a$ sind. Da nun nach Satz $a \leq p-1$ ist, so bilden die Klassen der Ideale $\mathfrak{p}$, welche einer Gleichung (53) genügen, eine Gruppe, welche in Bezug auf G mindestens den Index l besitzt. Für unsere weiteren Schlüsse bedürfen wir nun den folgenden

Hilfssatz 5. Sei R eine Untergruppe der Gruppe der Klassen vom Index l^ϱ. Es seien mit q alle Primideale bezeichnet, für welche q^u in einer Klasse der Gruppe R liegt (wobei u einen zu l primen Exponenten bedeute), dann ist die Summe

$$\sum_{(q)} \frac{1}{n(q)^s} = \frac{1}{l^\varrho} \log \frac{1}{s-1} + F(s), \tag{54}$$

wo $F(s)$ eine solche Funktion der reellen Veränderlichen s bedeutet, daß $e^{F(s)}$ für $s = 1$ endlich bleibt.

Der Beweis wird mit bekannten Methoden geführt [1]).

Wenden wir jetzt den Satz 1 der ersten Mitteilung auf die Primideale $\mathfrak{p}$ an, die der Relation (50) genügen, so folgt

$$\sum_{(\mathfrak{p})} \frac{1}{n(\mathfrak{p})^s} = \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + f(s), \tag{55}$$

wobei $f(s)$ selbst für $s = 1$ endlich bleibt.

Der Vergleich der beiden Formeln (54) und (55) lehrt zunächst, daß in unserm Fall d. h. für die Gruppe H der Index gleich l sein muß. Daraus folgt übrigens, daß $a = p-1$ sein muß.

Wir beweisen nun leicht den

Satz 3. Ist ω' eine Zahl, sodaß jedes Primideal $\mathfrak{p}$, welches der Relation

$$\left(\frac{\omega'}{\varrho}\right) = +1 \tag{56}$$

1) siehe z. B. H. Weber, Algebra, Bd. II.

genügt, einer Klasse der Gruppe H angehört, so besteht eine Relation

$$\omega'^{e'}\omega^{e} = \alpha^{l}. \tag{57}$$

Beweis. Es mögen $\mathfrak{p}_\omega$ resp. $\mathfrak{p}_{\omega'}$ diejenigen Primideale bezeichnen, welche den Relationen (50) resp. (56) genügen. Mit $\mathfrak{p}_{\omega\omega}$ seien diejenigen unter ihnen bezeichnet, welche beiden Relationen zugleich genügen. Die Menge aller Primideale q, welche den Klassen der Gruppe H angehören, ist also größer oder gleich der Menge der $\mathfrak{p}_\omega$ vermehrt um die Menge der $\mathfrak{p}_{\omega'}$, vermindert um die Menge der $\mathfrak{p}_{\omega\omega'}$. Es ist also

$$\sum_{(q)} \frac{1}{n(q)^s} \geqq \Big(\sum_{(\mathfrak{p}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{p}_{\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega'})^s} - \sum \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})^s} \Big), \tag{58}$$

und da in Hinblick auf Satz 1 der ersten Mitteilung, wenn keine Relation (57) besteht

$$\sum_{(\mathfrak{p}_\omega)} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_\omega)^s} + \sum_{(\mathfrak{p}_{\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega'})^s} - \sum_{(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})} \frac{1}{n(\mathfrak{p}_{\omega\omega'})^s} = \Big(\frac{2}{l} - \frac{1}{l^2}\Big) \log \frac{1}{s-1} + f^*(s) \tag{59}$$

ist, wo $f^*(s)$ für $s = 1$ endlich bleibt, so folgt

$$\sum_{(q)} \frac{1}{n(q)^s} \geqq \Big(\frac{2}{l} - \frac{1}{l^2}\Big) \log \frac{1}{s-1} + f^*(s). \tag{60}$$

Da nun der Index vom H gleich l ist, so folgt andrerseits

$$\sum_{(q)} \frac{1}{n(q)^s} = \frac{1}{l} \log \frac{1}{s-1} + F(s), \tag{61}$$

wo $F(s)$ selbst für $s = 1$ unterhalb einer endlichen positiven Grenze liegen muß. Die Gleichungen (60) und (61) stehen im Widerspruch, der sich nur löst, wenn angenommen wird, daß die Relation (57) statt hat.

Nach diesen Vorbereitungen ist es leicht zu zeigen, daß die Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+\pi}$ in dem Ausdruck für ω_π sämmtlich gleich Null sind. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man, da die Congruenzen (19) unendlich viele Lösungen haben, unendliche viele und zwar von einander unabhängige Zahlen ω konstruieren, für welche ein dem Satz 1 entsprechender Satz gilt. Da es aber nur endlich viele Untergruppen vom Index l giebt, so müßte es eine Untergruppe H geben an welcher wenigstens zwei von einander unabhängige Zahlen ω und ω' in dem

durch Satz 1 bestimmten Sinne gehören. Dies ist jedoch ein Widerspruch zu Satz 3, der sich nur löst, wenn angenommen wird, daß sämmtliche Exponenten $v_1, \ldots, v_{\frac{m}{2}+\pi}$ verschwinden. Hiermit ist also bewiesen:

Theorem I. Sämmtliche Körper $k(x_\pi)$ $(\pi = 1, \ldots, p)$ **sind unverzweigt.**

Ist

$$\omega = \omega_1^{e_1} \ldots \omega_p^{e_p}, \tag{62}$$

wo $e_1, \ldots, e_p$ irgend welche Exponenten $0 \ldots l-1$ bedeuten, so entspringt aus $x^l = \omega$ ein unverzweigter Relativkörper $k(x)$. Die Gruppe H, welche im Sinne von Satz 1 zu ω gehört, gehört ebenso zu $\omega^2, \omega^3, \ldots \omega^{l-1}$. Es giebt im ganzen l^p Zahlen der Form ω und l^{p-1} Untergruppen der Klassengruppe vom Index l. In Hinblick auf Satz 3 folgt daraus:

Satz 4. Zu jedem Cyklus $\omega, \omega^2, \ldots \omega^{l-1}$ gehört im Sinne von Satz 1 eine bestimmte Untergruppe H vom Index l.

Zum Beweis des Cauchy-Goursat'schen Integralsatzes.

Von

Lothar Heffter.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. October 1903.

In meiner Arbeit „Zur Theorie der reellen Curvenintegrale“ (Gött. Nachr. 8. Febr. 1902) habe ich den Beweis des fundamentalen Cauchy-Goursat'schen Satzes[1]) über Integrale, die auf geschlossenem complexen Wege erstreckt sind, dadurch erbracht, daß ich den entsprechenden Satz für reelle Curvenintegrale, aus dem jener andere folgt, bewiesen habe. Dieser Beweis wiederum kann entweder unmittelbar durch meine Definition des längs beliebiger rektifizierbarer Curve erstreckten Integrals (a. a. O. I § 1 und II § 1) oder durch einen ähnlichen Grenzübergang auf den für ein Rechteck, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind, zurückgeführt werden. In der angeführten Arbeit (II § 5) bin ich dann noch weiter von dem Rechteck auf ein Quadrat zurückgegangen, um für dieses endlich den eigentlichen Beweis zu erbringen. Daß sich dieser, was nicht unwesentlich ist, fast wörtlich ebenso einfach schon für ein Rechteck führen läßt, möchte ich im Folgenden zeigen, vorher aber kurz darlegen, daß aus dem Satz für reelle Curvenintegrale in der That der für complexe unmittelbar folgt.

Die Gelegenheit, auf jenen Gegenstand noch einmal zurückzukommen, benutze ich umso lieber, als mir der gedachte Beweis weitaus der einfachste von den bisher erbrachten zu sein scheint,

---

1) Vgl. Goursat, Transact. of the Amer. Math. Soc. 1. (1900) S. 14—16. — Moore, ebenda, S. 499 ff. — Pringsheim, ebenda Bd. 2. (1901) S. 413—421 und Bibl. Math. 3. Folge 1. (1900) S. 477—479.

was durch seinen Platz am Ende einer längeren Arbeit vielleicht wenig zu Tage tritt. Seine Einfachheit und zugleich seine wesentliche Verschiedenheit von den andern Beweisen beruht eben auf der Benutzung reeller Curvenintegrale und eines in folge dessen zu Gebote stehenden Mittelwertsatzes, wodurch sich der Kernpunkt der ganzen Beweisführung, wie mir scheint, in einfachster Form darstellt.

I.

Zurückführung des complexen Integralsatzes auf den reellen.

Ist $F(z) \equiv \varphi(xy) + i\psi(xy)$ eine Function von $z \equiv x+yi$, die im Innern und auf der Begrenzung eines Bereiches G eindeutig und stetig ist und überall in G einen bestimmten Differentialquotienten $F'(z)$ besitzt (das sind die Voraussetzungen des Cauchy-Goursat'schen Satzes, die wir im Folgenden kurz mit (V_c) bezeichnen wollen), so folgt daraus die Eindeutigkeit und Stetigkeit von φ und ψ in G als Functionen der beiden reellen Variablen x, y, ferner die Existenz der partiellen Ableitungen

$$1) \qquad \begin{cases} \varphi_1(xy) \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x}, & \varphi_2(xy) \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \psi_1(xy) \equiv \dfrac{\partial\psi}{\partial x}, & \psi_2(xy) \equiv \dfrac{\partial\psi}{\partial y}, \end{cases}$$

die Gleichheiten

$$2) \qquad \varphi_1 = \psi_2, \quad \psi_1 = -\varphi_2,$$

endlich die Ungleichungen

$$3) \qquad \begin{cases} |\varphi(xy)-\varphi(x_0y_0)-(x-x_0)\varphi_1(x_0y_0)-(y-y_0)\varphi_2(x_0y_0)| < \varepsilon(|x-x_0|+|y-y_0|) \\ |\psi(xy)-\psi(x_0y_0)-(x-x_0)\psi_1(x_0y_0)-(y-y_0)\psi_2(x_0y_0)| < \varepsilon(|x-x_0|+|y-y_0|) \end{cases}$$

$$\text{für } |x-x_0| < \delta, \quad |y-y_0| < \delta,$$

wo x_0y_0 ein beliebiges Wertenpaar aus G, ε beliebig, δ hinlänglich klein ist.

Denn die Stetigkeit von $F(z)$ bei $z_0 \equiv x_0 + y_0 i$ besagt

$$4) \qquad |F(z)-F(z_0)| < \varepsilon \text{ für } |z-z_0| < \delta,$$

wo ε beliebig, δ hinlänglich klein ist, oder

$$5) \quad |\varphi(xy)+i\psi(xy)-\varphi(x_0y_0)-i\psi(x_0y_0)| < \varepsilon \text{ für } |x+yi-x_0-y_0i| < \delta,$$

und hieraus folgt

$$6)\quad \left\{\begin{array}{l} |\varphi(xy)-\varphi(x_0y_0)|<\varepsilon \\ |\psi(xy)-\psi(x_0y_0)|<\varepsilon \end{array}\right\} \text{ für } |x-x_0|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},\ |y-y_0|<\frac{\delta}{\sqrt{2}},$$

d. h. die Stetigkeit von φ und ψ als Functionen der beiden Variabeln x, y.

Aus der Existenz eines bestimmten Differentialquotienten $F'(z)$ folgt ferner die Existenz der Größen (1) und die Gleichungen

$$7)\quad \left\{\begin{array}{l} F'(z)=\dfrac{\partial F}{\partial x}=\varphi_1(xy)+i\psi_1(xy) \\ F'(z)=\dfrac{1}{i}\dfrac{\partial F}{\partial y}=\psi_2(xy)-i\varphi_2(xy), \end{array}\right.$$

also die Gleichheiten (2).

Ebenfalls aus der Ungleichung, die ausdrückt, daß $F'(z)$ der Grenzwert des Differenzenquotienten ist,

$$8)\quad |F(z)-F(z_0)-(z-z_0)F'(z_0)|<\varepsilon|z-z_0| \text{ für } |z-z_0|<\sqrt{2}\,\delta,$$

wo ε beliebig, δ hinlänglich klein ist, folgen endlich durch genau dieselbe Rechnung, die von (4) zu (6) führte, unter Berücksichtigung von (7), (2) und der Ungleichung

$$|x-x_0+i(y-y_0)|\leqq|x-x_0|+|y-y_0|,$$

die Ungleichungen (3).

Ist nun C die Begrenzungscurve von G, so ist

$$9)\quad \int_C F(z)\,dz=\int_C(\varphi\,dx-\psi\,dy)+i\int_C(\psi\,dx+\varphi\,dy),$$

wo jedes der beiden reellen Curvenintegrale rechts die Form hat

$$10)\quad \int_C(f(xy)\,dx+g(xy)\,dy)$$

und den Voraussetzungen genügt: f und g sind im Bereich G überall eindeutig und stetig als Functionen der beiden Variabeln x, y, besitzen überall ein vollständiges erstes Differential (nach (3)) und genügen (nach (2)) der Bedingung $f_2(xy)=g_1(xy)$.

Das sind aber die Voraussetzungen des reellen, (a. a. O. II. § 5) von mir zuerst ausgesprochenen Satzes (die wir fortan kurz mit (V_r) bezeichnen wollen), aus denen folgt, daß das Integral (10) den Wert Null hat, wie wir in II beweisen wollen.

Also folgt aus den Voraussetzungen (V_c) für das Integral links in (9) das Bestehen der Voraussetzungen (V_r) für die bei-

den Integrale rechts in (9). Mithin folgt aus der Gültigkeit des reellen die des complexen Satzes.

II.

Beweis des reellen Integralsatzes für ein Rechteck.

Seien jetzt die Voraussetzungen (V_r) für das Rechteck mit den Ecken a, α; b, α; b, β; a, β, dessen Seiten den Coordinatenaxen parallel sind und das wir auch kurz durch $[(a\alpha)(b\beta)]$ bezeichnen, erfüllt. Ohne Beschränkung der Allgemeingültigkeit kann man annehmen, daß

$$b > a, \quad \beta > \alpha, \quad \beta - \alpha \geqq b - a,$$

also

1) $$b - a = \lambda(\beta - \alpha), \text{ wo } 0 < \lambda \leqq 1.$$

Nach dem Satz vom Mittelwert der Integrandenfunction ist das über das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ erstreckte Integral

2) $$\int(f\,dx + g\,dy) = [f(\xi\alpha) - f(\xi\beta)](b-a) + [g(b\eta) - g(a\eta)](\beta - \alpha)$$
$$= \{\lambda[f(\xi\alpha) - f(\xi\beta)] + [g(b\eta) - g(a\eta)]\}(\beta - \alpha),$$

wo ξ ein gewisser Wert im Intervall (ab), η ein solcher im Intervall $(\alpha\beta)$ ist. Wir müssen also zeigen, daß

3) $$|\lambda[f(\xi\beta) - f(\xi\alpha)] - [g(b\eta) - g(a\eta)]| \equiv d$$

den Wert Null hat. —

Zerlegt man das Rechteck $[(a\alpha)(b\beta)]$ in vier kleinere durch Parallele zu den Axen, die die Seiten halbieren, so muß, da das Integral über das große Rechteck gleich der Summe der Integrale über die vier kleinen ist (bei gleichem Integrationssinn), bei mindestens einem von ihnen, das wir $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$ nennen wollen, das Integral absolut genommen $\geqq \frac{d}{4}(\beta - \alpha)$ sein, also, da $\beta_1 - \alpha_1 = \frac{\beta - \alpha}{2}$ und wenn wieder der Mittelwertsatz angewendet wird,

3′) $$|\lambda[f(\xi_1\beta_1) - f(\xi_1\alpha_1)] - [g(b_1\eta_1) - g(a_1\eta_1)]| \geqq \frac{d}{2},$$

wo $\xi_1 \eta_1$ gewisse Werte im Intervall $(a_1 b_1)$ bezw. $(\alpha_1 \beta_1)$ sind.

Wiederholt man diesen Schluß n Mal, so ist also

3(n)) $$|\lambda[f(\xi_n\beta_n) - f(\xi_n\alpha_n)] - [g(b_n\eta_n) - g(a_n\eta_n)]| \geqq \frac{d}{2^n}.$$

Da nun von den Rechtecken $[(a\alpha)(b\beta)]$, $[(a_1\alpha_1)(b_1\beta_1)]$, . . . jedes

ganz im vorhergehenden liegt und die Seiten der Rechtecke gegen Null convergieren, so schränkt diese Serie von Rechtecken mindestens einen bestimmten Punkt $(x_0\, y_0)$ ein. Diesem kommt in Bezug auf eine beliebig kleine positive Zahl ε nach den Voraussetzungen (V_r) eine bestimmte Umgebung $|x-x_0|<\delta$, $|y-y_0|<\delta$ zu, sodaß

$$4)\quad \begin{cases} |f(xy)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(x-x_0)-f_2(x_0y_0)(y-y_0)|<\varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \\ |g(xy)-g(x_0y_0)-g_1(x_0y_0)(x-x_0)-g_2(x_0y_0)(y-y_0)|<\varepsilon\{|x-x_0|+|y-y_0|\} \end{cases}$$

$$\text{für } |x-x_0|<\delta,\quad |y-y_0|<\delta,$$

wo δ eine bestimmte hinlänglich kleine positive Zahl ist.

Bei hinlänglich großem n liegt das Rechteck $[(a_n\alpha_n)(b_n\beta_n)]$ ganz innerhalb dieser Umgebung des Punktes x_0y_0, d. h. ganz innerhalb des Quadrates $[(x_0-\delta,\ y_0-\delta)(x_0+\delta,\ y_0+\delta)]$. Also ist dann nach (4)

$$5)\quad \begin{cases} |f(\xi_n\beta_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-y_0)|<\varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\beta_n-y_0|\} \\ |f(\xi_n\alpha_n)-f(x_0y_0)-f_1(x_0y_0)(\xi_n-x_0)-f_2(x_0y_0)(\alpha_n-y_0)|<\varepsilon\{|\xi_n-x_0|+|\alpha_n-y_0|\}, \end{cases}$$

also weiter, da $|\xi_n-x_0|$, $|\beta_n-y_0|$, $[\alpha_n-y_0|<(\beta_n-\alpha_n)$ sind,

$$6)\qquad |f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)-f_2(x_0y_0)(\beta_n-\alpha_n)|<4\varepsilon(\beta_n-\alpha_n).$$

Ebenso ergiebt sich mit Rücksicht auf (1)

$$7)\qquad |g(b_n\eta_n)-g(a_n\eta_n)-g_1(x_0y_0)(b_n-a_n)|<4\varepsilon(\beta_n-\alpha_n).$$

Nach Multiplication von (6) mit λ folgt endlich aus (6) und (7) unter Berücksichtigung von (V_r) $(f_2=g_1)$ und (1)

$$8)\quad |\lambda[f(\xi_n\beta_n)-f(\xi_n\alpha_n)]-[g(b_n\eta_n)-g(a_n\eta_n)]|<4\varepsilon(\lambda+1)(\beta_n-\alpha_n).$$

Da aber

$$9)\qquad 4\varepsilon(\lambda+1)(\beta_n-\alpha_n)\leqq\frac{8\varepsilon(\beta-\alpha)}{2^n},$$

so liefern (8), (9) und (3*) das Ergebnis

$$10)\qquad d<8\varepsilon(\beta-\alpha)$$

d. h.

$$d=0.$$

Bonn, 23. Oktober 1903.

Ueber die axiomatische Begründung der Vektoraddition.

Von

Rudolf Schimmack.

Vorgelegt von D. Hilbert in der Sitzung vom 31. October 1903.

Die letzten Untersuchungen über das Beweisproblem des Satzes vom Kräfteparallelogramm, welche Darboux und F. Siacci[1]) veröffentlicht haben, können nicht als abschließend angesehen werden, insofern dort die axiomatische Methode zum mindesten nicht völlig durchgeführt ist und die gegebenen Beweise auch nicht immer auf absolute Strenge Anspruch machen können. Es erschien daher wünschenswert, die Untersuchungen in der angedeuteten Richtung zu vervollkommnen. Indem wir das Physikalische der Frage ganz ins Formal-Mathematische übertragen, lautet das Problem:

Die Aussage der Vektoraddition soll zerlegt werden in eine Anzahl einfacherer Aussagen (Axiome), aus denen man allein durch logische Operationen den Additionssatz wieder herleiten kann.

An dieses Axiomsystem stellen wir eine Reihe methodischer Forderungen. Die Axiome müssen widerspruchslos und unabhängig sein; sie sollen nicht offenkundig mehr postulieren als nötig. Sie sollen zum Beweise des Additionssatzes successiv herangezogen werden und dementsprechend zweckmäßig geordnet sein. Bei den Teilbeweisen, in welche die Deduktion zerfällt, soll jedes benutzte Axiom auch notwendig sein. Ein Axiom soll in mehrere zerlegt werden, wenn sich aus ihm allein schon ein wesentlicher Schluß ziehen läßt.

* * *

1) Note von Darboux in Despeyrous' Cours de Mécanique 1884; 3 Noten von Siacci im Rend. Acc. sc. fis. mat. Napoli 1899.

Den Axiomen voran stellen wir die Definition des einzelnen Vektors: Ein Vektor ist eine reelle gerichtete Strecke (im Euklidischen Raum); Vektoren heißen gleich, wenn sie übereinstimmen in Länge (Größe) und Richtung (Richtungslinie und Richtungssinn). Wir bezeichnen Vektoren mit $\mathfrak{V}$, ihre Größe mit $|\mathfrak{V}|$ oder r; $a\mathfrak{V}$ bedeute den Vektor von der Größe ar, der mit $\mathfrak{V}$ gleiche oder entgegengesetzte Richtung hat, jenachdem $a >$ oder < 0 ist.

Wir betrachten nur die Gesamtheit der Vektoren, deren Richtungslinien einem Strahlenbündel angehören. Die Axiome sagen über die Verknüpfung zweier Vektoren aus:

Ax. I. Aus zwei beliebigen Vektoren geht durch eine eindeutige Verknüpfung ein dritter Vektor hervor: $[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2] = \mathfrak{V}$. (Komponenten, Resultante, Addition).

Ax. II. Die Verknüpfung ist invariant gegenüber Drehungen des Raumes.

Ax. III. $[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2] = [\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_1]$. (Commutativität).

Ax. IV. $[[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2], \mathfrak{V}_3] = [\mathfrak{V}_1, [\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3]]$. (Associativität).

Ax. V. $[\mathfrak{V}, 0] = \mathfrak{V}$.

Ax. VI. $|[\mathfrak{V}, a\mathfrak{V}]| = (1+a)r$, wenn $a > 0$.

Ax. VII. Betrachtet man zwei von 0 verschiedene Komponenten und ändert ihre Größen hinreichend wenig, so ändert sich die Richtungslinie der Resultante beliebig wenig.

* * *

Auf Grund der angegebenen 7 Axiome läßt sich die Vektoraddition (mit Benutzung des Darbouxschen Ideenganges) in folgender Weise streng ableiten. Aus I, II folgt der Satz: Haben die Komponenten gleiche Richtungslinie, so hat ihre Resultante dieselbe Richtungslinie. Durch Heranziehung von III beweist man: Haben die Komponenten gleiche Größe und verschiedene Richtungslinie, so ist die Richtungslinie der Resultante die Halbierungslinie des Komponentenwinkels. Entgegengesetzt gleiche Komponenten haben die Resultante 0 (Existenz des Nullvektors). Nun werden IV, V hinzugenommen, um folgende Sätze abzuleiten: Ist die Resultante $= 0$, so sind die Komponenten entgegengesetzt gleich. Bei gegebenen $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}_1$ existiert eindeutig ein $\mathfrak{V}_2$, für welches $[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2] = \mathfrak{V}$ ist (Inverse Eindeutigkeit). Haben die Komponenten verschiedene Richtungslinien, so ist die Richtungslinie der Resultante von beiden verschieden. Sie liegt dann in der Ebene der Komponenten. Nun wird mittels der

Einführung eines Hülfsvektors eine Funktion $\varphi(r)$ definiert, von welcher zunächst bewiesen wird: für alle endlichen $r > 0$ ist sie eindeutig, endlich und $\neq 0$, insbesondere ist $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Durch Benutzung eines elementargeometrischen Satzes folgt dann: Trägt man auf 2 gegebenen Vektoren $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ von verschiedenen Richtungslinien bzgl. $\varphi(r_1)$, $\varphi(r_2)$ dem Vorzeichen nach ab und konstruiert aus diesen Strecken als Seiten das Parallelogramm, so giebt die Diagonale desselben die Richtungslinie der Resultante $\mathfrak{V}$ an und ist zugleich die auf $\mathfrak{V}$ dem Vorzeichen nach abgetragene Strecke $\varphi(r)$. Eine besondere Betrachtung beweist, daß dieser Satz sich auf Komponenten derselben Richtungslinie überträgt. Endlich folgt: Setzt man $|\varphi(r)|$ gleich einer beliebigen positiven Zahl, so ist r eindeutig bestimmt. Nimmt man jetzt Ax. VI hinzu, so erhält man die Funktionalgleichung

$$|\varphi(r_1)+\varphi(r_2)| = |\varphi(r_1+r_2)|,$$

die sich vermöge des vorhergehenden Satzes auf

$$\varphi(r_1)+\varphi(r_2) = \varphi(r_1+r_2)$$

reduziert. Diese Gleichung bestimmt φ für rationale Argumente und die schließliche Hinzunahme von VII hat zur Folge $\varphi(r) = r$, womit der Parallelogrammsatz bewiesen ist.

* * *

Im Folgenden geben wir Pseudoadditionen an, die immer nur einige der obigen Axiome erfüllen.

A. Jeder Vektor $\mathfrak{V}_\nu$ werde durch 3 Polarkoordinaten dargestellt: Radiusvektor r_ν, geogr. Länge ψ_ν, geogr. Breite ϑ_ν, wobei

$$r_\nu \geqq 0; \qquad 0 \leqq \psi_\nu < 2\pi; \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \vartheta_\nu \leqq +\frac{\pi}{2};$$

und für $\vartheta_\nu = \pm\frac{\pi}{2}$ sei $\psi_\nu = 0$. Dann sei $[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2] = \mathfrak{V}$, wo

$$r = r_1+r_2; \qquad \psi = \frac{r_1\psi_1+r_2\psi_2}{r_1+r_2}; \qquad \vartheta = \frac{r_1\vartheta_1+r_2\vartheta_2}{r_1+r_2}.$$

A'. Statt der beiden letzten Gleichungen nehme man:

$$\psi = \frac{(e^{r_1}-1)\psi_1+(e^{r_2}-1)\psi_2}{e^{r_1+r_2}-1}; \qquad \vartheta = \frac{(e^{r_1}-1)\vartheta_1+(e^{r_2}-1)\vartheta_2}{e^{r_1+r_2}-1}.$$

B. Sei eine feste Richtung $\mathfrak{X}$ gegeben, $\mathfrak{V}_\nu$ bilde mit $\mathfrak{X}$ den $\measuredangle \xi_\nu$. Auf $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ trage man bzgl. $r_1(1+\sin\xi_1)$, $r_2(1+\sin\xi_2)$ ab,

konstruiere daraus das Parallelogramm, nehme als Richtung der Resultante $\mathfrak{V}$ die Diagonale und setze deren Länge $= r(1+\sin\xi)$.

B'. In B ersetze man $\sin\xi_\nu$ durch e^{ξ_ν}.

C. Für $\mathfrak{V}_1 \neq 0$ sei $[\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2] = \frac{r_1+r_2}{r_1}\mathfrak{V}_1$, und $[0, \mathfrak{V}_2] = \mathfrak{V}_2$.

D. Sei ω der Komponentenwinkel, so habe die Resultante $\mathfrak{V}$ die Größe $r = \sqrt{r_1^2+r_2^2+2r_1r_2\cos\omega}$. Ist $0 \leqq \omega < \pi$ so halbiere $\mathfrak{V}$ den $\measuredangle \omega$. Ist $\omega = \pi$, so liege $\mathfrak{V}$ in Richtung der größeren Komponente. Ist eine Komponente $= 0$, so liege $\mathfrak{V}$ in der anderen.

E. Für $\mathfrak{V} = [\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2]$ sei $r = (r_1+r_2)\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{r_1r_2}$. Sodann betrachte man die Einheitskugel um den Träger des Strahlbündels und bezeichne die Spur von $\mathfrak{V}_\nu$ auf ihr mit V_ν. Auf dem Großkreis durch V_1, V_2 bestimme man den Punkt P, der den Bogen $\widehat{V_1V_2}$ im Verhältnis $\widehat{V_1P}:\widehat{V_2P} = r_2:r_1$ innerlich teilt. Man konstruiere in P den zu $\widehat{V_1V_2}$ orthogonalen Großkreis und trage von P aus $\widehat{PV} = r_1r_2|r_1-r_2|\sin\omega$ ab, und zwar nach rechts für einen Beobachter, der auf der Kugel von der Spur der größeren Komponente nach der der kleineren hinsieht.

F. In E werden die 3 Gleichungen anders gewählt:

$$r = \sqrt{(r_1-r_2)^2+4r_1r_2\left(1-\frac{\omega}{\pi}\right)^2};$$

$$\widehat{V_1P}:\widehat{V_2P} = \left(r_2\sin\omega+|r_1-r_2|\int_0^\infty \frac{\sin ar_2\cos ar_1}{a}\,da\right) : \left(r_1\sin\omega+|r_1-r_2|\int_0^\infty \frac{\sin ar_1\cos ar_2}{a}\,da\right);$$

$$\widehat{PV} = \frac{r_1r_2|r_1-r_2|}{r^2}\left|\sqrt{\omega(\pi-\omega)}\right|.$$

F'. Man ersetze die erste Gleichung durch:

$$r = \sqrt{(r_1-r_2)^2+4(r_1+\omega)(r_2+\omega)\left(1-\frac{\omega}{\pi}\right)^2}.$$

G. Sind beide Komponenten $\neq 0$ und von gleicher Richtungslinie, so werden sie algebraisch addiert; in allen übrigen Fällen sei die Resultante $= 0$.

G'. Die Resultante sei identisch $= 0$.

H. Jedem Vektor werde ein konjugierter zugeordnet:

$$\mathfrak{V}' = (-1)^{1+[r]}\mathfrak{V},$$

wo $[r]$ die größte in r enthaltene ganze Zahl bedeutet. Die Pseudoaddition der $\mathfrak{B}$ bestehe dann in der gewöhnlichen Addition der $\mathfrak{B}'$.

J. Man wähle in dem vorigen Gesetz:

$$\mathfrak{B}' = \frac{e^r - 1}{r}\mathfrak{B},$$

J'. Man wähle dafür:

$$\mathfrak{B}' = r\mathfrak{B}.$$

* * *

Die angegebenen Pseudoadditionen zeigen die Unabhängigkeit eines jeden der Ax. II—VI von allen übrigen. Dem Ax. I kommt eine Sonderstellung zu, insofern es bei der Formulierung der folgenden Axiome bereits als erfüllt vorausgesetzt ist. Wollte man ihm dieselbe nehmen und zugleich seine Unabhängigkeit zur Evidenz bringen, so brauchte man nur jedem der Ax. II—VII die Bedingung hinzuzufügen: „falls eine (eindeutige) Resultante existiert." Die Frage nach der Unabhängigkeit von VII, welche äquivalent ist der Frage nach der Möglichkeit einer unstetigen Lösung der Gleichung

$$\varphi(r_1) + \varphi(r_2) = \varphi(r_1 + r_2),$$

ist noch nicht entschieden. Für eine beliebige abzählbare Menge von Argumenten läßt sich ein solches φ angeben, wobei sogar alle Nebenbedingungen (Eindeutigkeit usw.) erfüllt sind.

Die Widerspruchslosigkeit der Axiome folgt unmittelbar daraus, daß sich aus ihrer Gesamtheit der Parallelogrammsatz ableitet, welcher seinerseits die Axiome wieder als Spezialsätze enthält.

Ferner beweisen die Pseudoadditionen für die Mehrzahl der einzelnen Teilsätze, die bei der schrittweisen Ableitung des Additionssatzes formuliert wurden, daß die jedesmal benutzten Axiome auch gerade notwendig zum Beweise waren. So kann z. B. der Satz der inversen Eindeutigkeit nach A nicht ohne II, nach C nicht ohne III, nach D nicht ohne IV, nach G nicht ohne V hergeleitet werden, mag man auch in jedem einzelnen Falle eine Anzahl anderer Sätze als Axiome hinzunehmen.

* * *

Was die Frage nach zweckmäßigen Modifikationen des Axiomsystems angeht, so ist es nicht zu empfehlen, den Inhalt

des Ax. V auf VI oder VII zu werfen, besonders weil sich aus Ax. I—V ohne VI und VII so sehr viel schließen läßt. Dagegen könnte man Ax. VII ersetzen durch eines der folgenden:

Ax. VII'. Betrachtet man zwei gleichgroße Komponenten von verschiedenen Richtungen und ändert letztere hinreichend wenig, so ändert sich die Größe der Resultante beliebig wenig. — Ax. VII''. Die Addition ist von der Größeneinheit der Vektoren unabhängig (Homogenität). — Bei Voraussetzung von I—VI sind VII, VII', VII'' äquivalent.

Eine interessantere Frage ist, ob sich V nicht durch die Forderung der inversen Eindeutigkeit (V') ersetzen läßt. Hier ergibt sich: Bei Voraussetzung von I—IV sind V und V' äquivalent. Bei Voraussetzung von I, II, IV, VI dagegen folgt V aus V', aber nicht V' aus V. Die Forderung, welche hier noch zu V hinzukommen muß, damit V' folgt, ist: V*. Zu jedem Vektor $\mathfrak{V}$ existiert (wenigstens) ein $\overline{\mathfrak{V}}$, sodaß $[\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}] = 0$ ist. Für das letztere mag hier der Beweis angedeutet werden.

Vorausgesetzt sind I, II, IV, V, V*, VI. Man betrachte zunächst $[\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}] = \mathfrak{V}^*$ und bilde:

$$[\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*] = [\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}] = [\overline{\mathfrak{V}}, 0, 0, 0, \mathfrak{V}].$$

Da nun nach I, II $[0, 0] = 0$ ist, so folgt:

$$[\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*] = [\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*] = [\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*].$$

Nach VI ist aber der erste dieser 3 Vektoren doppelt so groß als der letzte, also ist $[\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*] = 0$. Wenn man dies einsetzt, folgt nach V:

$$[\mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*, \mathfrak{V}^*] = [\mathfrak{V}^*, 0] = \mathfrak{V}^* = 0.$$

Nachdem so bewiesen ist, daß auch $[\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}] = 0$, ergibt sich:

$$[0, \mathfrak{V}] = [\mathfrak{V}, \overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}] = [\mathfrak{V}, 0],$$

und hiermit läßt sich nun V' ableiten. Sind $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{V}^0$ gegeben, so existiert stets ein $\mathfrak{V}'$, sodaß $[\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'] = \mathfrak{V}^0$ wird, man braucht nur $\mathfrak{V}' = [\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}^0]$ zu wählen. Angenommen aber, es gäbe zwei solche Lösungen:

$$[\mathfrak{V}, \mathfrak{V}'] = [\mathfrak{V}, \mathfrak{V}''],$$

so würde folgen:

$$[\mathfrak{V}', \overline{\mathfrak{V}''}] = [\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}', \overline{\mathfrak{V}''}] = [\overline{\mathfrak{V}}, \mathfrak{V}, \mathfrak{V}'', \overline{\mathfrak{V}''}]$$
$$= [0, 0] = 0,$$

also

$$[\mathfrak{V}', \overline{\mathfrak{V}''}, \mathfrak{V}''] = [0, \mathfrak{V}''] = [\mathfrak{V}', 0]$$

oder

$$\mathfrak{V}'' = \mathfrak{V}'.$$

Damit ist V′ indertat bewiesen.

* * *

Die Ueberlegungen von Siacci lassen sich bei Zugrundelegung eines gegliederten Axiomsystems zu folgendem strengen Beweisgange ausbauen. Es sollen die Axiome

I, II, III, VII″, IV, V, VII′, VI

benutzt werden, und zwar in dieser Reihenfolge; dabei soll VI so lange als möglich ausgeschaltet bleiben. — Aus den 4 ersten Axiomen folgt: Sind die Komponenten gleich groß ($r_1 = r_2$), so halbiert die Richtungslinie der Resultante $\mathfrak{V}$ den Komponentenwinkel ω, und die Größe ist

$$r = 2r_1 F(\omega),$$

wo F eine eindeutige positive Funktion bedeutet. Für diese erhält man durch Heranziehung von IV die Funktionalgleichung:

$$f(1)f(x_1x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

wo $f(x) = F(2 \arccos x)$ ist. Durch Hinzunahme von V folgt: Es ist $f(1) \neq 0$. Für eine überall dichte Menge von Argumenten ist $f(x) = f(1)x^c$. Nach Ax. VII′ gilt dies dann auch für das Kontinuum der x (c = endliche Konstante > 0). Weiter folgt: Drei gleichgroße, je unter 120° gegeneinander geneigte Komponenten haben 0 als Resultante. Es ist $f(1) = 2^{c-1}$. Die Resultante zweier gleichgroßer Komponenten hat die Größe:

$$r = r_1\left(2 \cos \frac{\omega}{2}\right)^c;$$

und liegt stets zwischen jenen. Zwei beliebige gleichgerichtete Komponenten $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ lassen sich stets als partielle Resultanten von 4 gleichgroßen Komponenten auffassen:

$$\mathfrak{V}_1 = [\mathfrak{V}_{11}, \mathfrak{V}_{12}]; \qquad \mathfrak{V}_2 = [\mathfrak{V}_{21}, \mathfrak{V}_{22}];$$
$$|\mathfrak{V}_{11}| = |\mathfrak{V}_{12}| = |\mathfrak{V}_{21}| = |\mathfrak{V}_{22}|,$$

wobei $\mathfrak{V}_{11}$ mit $\mathfrak{V}_{21}$, $\mathfrak{V}_{12}$ mit $\mathfrak{V}_{22}$ den $\sphericalangle 120°$ einschließt. Die Resul-

tante zweier gleichgerichteter Komponenten liegt in der Richtung der Komponenten und hat die Größe

$$r = \left(r_1^{\frac{1}{c}} + r_2^{\frac{1}{c}}\right)^c.$$

Ohne VI heranzuziehen, beweist man nun für ein Cartesisches Koordinatensystem von beliebiger Lage, in welchem $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ und $\mathfrak{V} = [\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2]$ die Richtungscosinusse α_1, β_1, γ_1; α_2, β_2, γ_2; α, β, γ haben, die Gleichungen:

$$\begin{aligned} r^{\frac{1}{c}}\alpha + r_1^{\frac{1}{c}}\alpha_1 + r_2^{\frac{1}{c}}\alpha_2 &= 0, \\ r^{\frac{1}{c}}\beta + r_1^{\frac{1}{c}}\beta_1 + r_2^{\frac{1}{c}}\beta_2 &= 0, \\ r^{\frac{1}{c}}\gamma + r_1^{\frac{1}{c}}\gamma_1 + r_2^{\frac{1}{c}}\gamma_2 &= 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt das Verschwinden der Determinante $(\alpha, \beta_1, \gamma_2)$, d. h. die Resultante liegt in der Ebene der Komponenten. Weiter erkennt man durch geeignete Wahl des Koordinatensystems: Die Resultante liegt stets zwischen den Komponenten. Es ist:

$$r^{\frac{1}{c}} : r_1^{\frac{1}{c}} : r_2^{\frac{1}{c}} = \sin \widehat{\mathfrak{V}_1\mathfrak{V}_2} : \sin \widehat{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_2} : \sin \widehat{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_1},$$

d. h. trägt man auf den Vektoren $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{V}_2$ bzgl. die Strecken $r_1^{\frac{1}{c}}$, $r_2^{\frac{1}{c}}$ ab und konstruiert aus ihnen das Parallelogramm, so ist die Diagonale die Richtung der Resultante und ihre Länge ist $= r^{\frac{1}{c}}$ zu setzen. Jedes positive $c \neq 1$ liefert eine Pseudoaddition, die alle Axiome außer VI erfüllt. Erst VI bestimmt $c = 1$.

Charakteristisch an diesem Beweisgang ist die frühe Hinzuziehung von VII″ und die Ausschließung von VI bis zuletzt. Ebendies bringt aber verschiedene Nachteile mit sich. Die früher angegebenen Pseudoadditionen sind nur imstande die Unabhängigkeit von II, III, IV, V, VI zu erweisen. Dagegen ist, wie schon oben angedeutet wurde, eines der Ax. VII′, VII″ überzählig, insofern sich diese bei Voraussetzung von I—VI — und anscheinend auch nur dann — gegenseitig zur Folge haben. Der strenge Nachweis, daß Ax. VII′ bei Ausschluß von VI keine Folge der übrigen ist, kommt wieder auf die Frage hinaus, ob man eine unstetige Lösung der Funktionalgleichung $\varphi(xy) = \varphi(x).\varphi(y)$ oder der äquivalenten $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y)$ für ein Kontinuum von Argumenten angeben kann. Wäre die letztere Frage jedoch zu verneinen, so würde bei dem jetzigen Axiomsystem freilich ein Axiom (VII′) weniger erforderlich sein, aber dann müßte auch in

dem früheren System ein Axiom (VII) gestrichen werden. Jedenfalls ist also bei Aufrechterhaltung des Charakteristischen bei dem letzteren Beweisgange ein Axiom mehr notwendig als bei dem früheren. Außerdem ist es hier für einige Teilsätze unmöglich, die Notwendigkeit der gerade benutzten Axiome zu beweisen. Wegen dieser systematischen Nachteile des letzteren Beweises dürfte der zuerst angegebene Beweis ihm vorzuziehen sein.

(Eingereicht am 6. Oktober 1903.)

Ueber die elektromagnetische Masse der Elektronen.

Von

C. Runge.

Vorgelegt in der Sitzung vom 31. October 1903.

In seiner ausgezeichneten Arbeit über die elektromagnetische Masse der Elektronen[1]) hat Herr Kaufmann seine Messungen nicht in der üblichen Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate discutirt, sondern hat zur Bestimmung der beiden dort mit K_1 und K_2 bezeichneten Constanten und damit des Verhältnisses ε/μ_0 ein anderes Rechnungsverfahren vorgezogen[2]). Dieses Verfahren ist nicht einwandsfrei. Es werden dabei einige Beobachtungen nicht mit benutzt, die doch nicht wesentlich geringere Genauigkeit haben als die übrigen, und es wird die Constante K_2 für jede Platte als einfaches arithmetisches Mittel aus einer Reihe von Werthen berechnet, die ganz verschiedenes Gewicht haben. Indem all diesen Werthen das gleiche Gewicht gegeben wird, stellt sich nicht nur ein unrichtiger Werth von K_2 heraus, sondern auch das Gewicht, das man aus den Abweichungen der einzelnen Werthe vom arithmetischen Mittel feststellt, wird unrichtig. Kaufmann bemerkt selbst, daß die so gewonnenen Gewichte weit entfernt sind, der Güte der photographischen Aufnahmen zu entsprechen.

All diese Uebelstände fallen weg, wenn die Beobachtungen in der orthodoxen Weise nach der Methode der kleinsten Quadrate ausgeglichen werden. Bei der grundlegenden Bedeutung der Messungen habe ich daher im Einverständniß mit Herrn Kaufmann seine Messungen noch einmal berechnet.

---

1) Göttinger Nachrichten. 1903. S. 90—103.

2) l. c. S. 97.

Da die Aufgabe typisch ist, so dürfen vielleicht einige Bemerkungen über das Ausgleichungsverfahren hinzugefügt werden.

Die Messungen liefern für eine Reihe von Werthen von z die Werthe einer von z abhängenden Function y. Von dieser Function wissen wir, daß sie die Gestalt hat

$$by = f(az),$$

wo a und b unbekannte Constante bedeuten, während f als Function ihres Argumentes az durch die Theorie geliefert wird.

Mit andern Worten die Abhängigkeit zwischen z und y ist derartig, daß sie durch passende Aenderung des Maßstabes von z und y in die Abhängigkeit

$$v = f(u)$$

übergeht. In der bekannten Weise findet man a und b dadurch, daß man

$$\Sigma(by - f(az))^2$$

zu einem Minimum macht. Es ist in unserm Falle vortheilhaft die Sache ein wenig anders zu fassen, indem man $b = a/k$ einsetzt und

$$\Sigma(ay - kf(az))^2$$

durch passende Wahl von a und k zum Minimum macht. Geometrisch gesprochen bezieht sich jetzt die Constante a auf eine Aenderung des Gesammtmaßstabes, das heißt auf eine Vergrößerung oder Verkleinerung der Curve $y = f(z)$, während k sich auf die Aenderung des Maßstabes von y allein bezieht. In bekannter Weise werden zunächst Näherungswerthe für a und k eingesetzt und deren Verbesserungen nach der Methode der kleinsten Quadrate gesucht, wobei man

$$ay - kf(az)$$

als lineare Function der Verbesserungen betrachten kann.

Die Function $f(u)$ ergiebt sich aus den Gleichungen 11) und 12) bei Kaufmann, wenn man darin setzt[1])

$v = y/K_1^2K_2$, $u = z/K_1K_2$ (d. h. $a = 1/K_1K_2$, $b = a/K_1$, $k = K_1$).

Die Gleichungen nehmen dann nämlich die Form an

$$\beta = u/v, \quad \psi(\beta) = v/u^2$$

oder

$$u = 1/\beta\psi(\beta), \quad v = 1/\beta^2\psi(\beta).$$

1) Ich habe hier y, z geschrieben, wo bei Kaufmann y' z' steht.

In diese Gleichungen kann man eine Reihenfolge von Werthen für β einsetzen und sich damit eine Tabelle der zusammengehörigen Werthe von u und v berechnen, die man natürlich auch auf die Form bringen kann, wo v oder u in gleichen Intervallen fortschreiten. Ich habe mir eine Tabelle berechnet, bei der v in Intervallen von der Größe 0,01 fortschreitet. Diese Tabelle liefert dann auch mit ausreichender Genauigkeit die Werthe von $f'(u)$, die bei der Darstellung von $ay - kf(az)$ als lineare Function der Verbesserungen von a und k nöthig ist. Man kann beiläufig u und v bequem durch hyperbolische Functionen ausdrücken. Setzt man nämlich $\beta = \operatorname{Tg} t$ so ist

$$\frac{v+1}{v} = 2t \operatorname{Cotg} 2t, \quad u = v \operatorname{Tg} t.$$

Ich gebe hier die Resultate der Rechnung, und um zugleich zu zeigen, wie gut die von Kaufmann photographirten Curven den theoretischen Verlauf innehalten, habe ich die Werthe von y nach der Formel berechnet und mit den beobachteten Werthen zusammengestellt. In der vierten Colonne sind die Werthe von β hinzugefügt d. i. die Geschwindigkeit des Electrons im Verhältniß zur Lichtgeschwindigkeit.

a) Platte No. 15

$$1/K_1K_2 = 1.616 \pm 0.038^{1}) \quad K = 0.2666 \pm 0.0027$$
$$\varepsilon/\mu \,.\, 10^{-7} = 1.669 \pm 0.039^{2})$$

y beobachtet	y berechnet	Diff.	β	
0.0388	0.0404	$-16\,\mu$	0.987	
0.0548	0.0550	$-2\,\mu$	0.964	
0.0716	0.0710	$+6\,\mu$	0.930	mittlerer Fehler von y: $9.2\,\mu$
0.0896	0.0887	$+9\,\mu$	0.889	
0.1080	0.1081	$-1\,\mu$	0.847	
0.1290	0.1297	$-7\,\mu$	0.804	
0.1524	0.1527	$-3\,\mu$	0.763	
0.1788	0.1777	$+11\,\mu$	0.724	
0.2033	0.2039	$-6\,\mu$	0.688	

1) Diese mit $\pm$ hinzugefügte Zahl bedeutet jedes Mal den mittleren nicht etwa den wahrscheinlichen Fehler.

2) Die effectiven Feldstärken waren bei den vier Platten wie Herr Kaufmann mir mittheilt 200, 200, 200, 199. In seiner Abhandlung müßte es in der Tabelle VI statt H' heißen: H_0.

b) Platte No. 19

$1/K_1K_2^* = 1.537 \pm 0.029$, $K_1 = 0.2567 \pm 0.0023$

$\varepsilon/\mu_0 . 10^{-7} = 1.755 \pm 0.033$

y beobachtet	y berechnet	Diff.	β	
0.04045	0.0388	+ 16.5 μ	0.990	
0.0529	0.0527	+ 2 μ	0.969	
0.0678	0.0675	+ 3 μ	0.939	
0.0834	0.0842	− 8 μ	0.902	mittlerer Fehler von y: 8.6 μ
0.1019	0.1022	− 3 μ	0.862	
0.1219	0.1222	− 3 μ	0.822	
0.1429	0.1434	− 5 μ	0.782	
0.1660	0.1665	− 5 μ	0.744	
0.1916	0.1906	+ 10 μ	0.709	

c) Platte No. 18

$1/K_1K_2 = 1.407 \pm 0.027$, $K_1 = 0.2755 \pm 0.0021$

$\varepsilon/\mu_0 . 10^{-7} = 1{,}917 \pm 0.037$

y beobachtet	y berechnet	Diff.	β	
0.0397	0.0415	− 18 μ	0.993	
0.0482	0.0487	− 5 μ	0.986	
0.0564	0.0561	+ 3 μ	0.978	
0.0634	0.0636	− 2 μ	0.966	
0.0725	0.0715	+ 10 μ	0.953	mittlerer Fehler von y: 10 μ
0.0801	0.0799	+ 2 μ	0.938	
0.0880	0.0885	− 5 μ	0.922	
0.0965	0.0974	− 9 μ	0.905	
0.1073	0.1067	+ 6 μ	0.887	
0.1166	0.1164	+ 2 μ	0.869	
0.1283	0.1267	+ 16 μ	0.850	
0.1579	0.1593	− 14 μ	0.795	
0.1719	0.1708	+ 11 μ	0.778	
0.1825	0.1829	− 4 μ	0.761	

d) Platte No. 24

$1/K_1K_2 = 1{,}640 \pm 0.0409$, $K_1 = 0.2317 \pm 0.0024$

$\varepsilon/\mu_0 . 10^{-7} = 1.653 \pm 0.041$

y beobachtet	y berechnet	Diff.	β	
0.0340	0.0351	− 11 μ	0.986	
0.04875	0.0479	+ 8 μ	0.962	
0.0623	0.0619	+ 4 μ	0.927	
0.0773	0.0774	− 1 μ	0.886	mittlerer Fehler von y: 6.9 μ
0.0947	0.0944	+ 3 μ	0.843	
0.1131	0.1134	− 3 μ	0.799	
0.1340	0.1337	+ 3 μ	0.757	

Die Zusammenstellung der vier Werthe von ε/μ_0:

Platte	$\varepsilon/\mu_0 \cdot 10^{-7}$	mittl. Fehler	Gewicht
15	1.669	0.039	11
19	1.755	0.033	15
18	1.917	0.037	12
24	1.653	0.041	10

zeigt zwischen den vier Werthen Abweichungen, die nach den mittleren Fehlern zu urtheilen unwahrscheinlich groß sind. Wenn wir nämlich die Gewichte den Quadraten der mittleren Fehler proportional setzen, so erhalten wir als Mittel:

$$\text{Mittelwerth } \varepsilon/\mu_0 = 1{,}755 \cdot 10^7 \pm 0{,}059 \cdot 10^7.$$

Der mittlere Fehler des Mittels ist hier aus den Abweichungen der vier Werthe vom Mittel unter Berücksichtigung ihrer Gewichte abgeleitet. Dieser mittlere Fehler ist wesentlich größer als jeder der mittleren Fehler der einzelnen Bestimmungen, während er natürlich kleiner sein müßte. Nach dem Gewicht des Mittels im Verhältniß zum Gewicht der einzelnen Bestimmungen gerechnet müßte der mittlere Fehler des Mittels nur 0,018 betragen. Mit andern Worten die Messungen jeder einzelnen Platte stimmen in sich viel besser überein als mit den Messungen der anderen Platten. Daraus ist zu schließen, daß außer den Ursachen der mikrometrischen Messungsfehler andere Ursachen vorhanden waren, welche den Gesammtmaßstab der Curve von Platte zu Platte geändert haben.

Bei Kathodenstrahlen hat S. Simon für ε/μ_0 einen Werth gefunden, der auf langsame Bewegung reducirt nach Kaufmann den Werth liefert

$$\varepsilon/\mu_0 = 1{,}885 \cdot 10^7.$$

Der mittlere Fehler des Kaufmannschen Werthes würde die Abweichung zwischen beiden Werthen noch als möglich erscheinen lassen, selbst wenn man den Simonschen Werth als fehlerfrei betrachten wollte.

Ueber
die in der Theorie der automorphen Functionen auftretenden Polygoncontinua.

Von

Robert Fricke in Braunschweig.

(Vorgelegt in der Sitzung vom 31. October 1903 von F. Klein).

Der Höhepunkt in der Entwicklung der Theorie der automorphen Functionen wird durch diejenigen Sätze dargestellt, welche F. Klein als „Fundamentaltheoreme" bezeichnete. Es sind die Existenztheoreme polymorpher Functionen auf beliebig gegebener Riemann'scher Fläche[1]). Von den verschiedenen Beweisansätzen dieser Theoreme ist der universellste der von Klein und Poincaré gleichzeitig concipierte „Continuitätsbeweis" (méthode de continuité). Die Idee dieses Beweises ist, das einzelne Continuum gleichgearteter Polygone bezw. Gruppen dem zugeordneten Continuum Riemann'scher Flächen gegenüberzustellen, um aus denjenigen Eigenschaften, welche man über die Beziehung der beiden Continua auf einander von Hause aus kennt, den Schluß auf die Eindeutigkeit der Beziehung zu thun.

Klein hat in den Math. Ann. B. 21 p. 208 ff. (dat. 2. Oktober 1882) seine Ideen über den Continuitätsbeweis entwickelt. Andrerseits ist Poincaré auf den gleichen Gegenstand in den Acta math. B. 4 p. 233 ff. (dat. Oktober 1883) eingegangen und hat daselbst in einer für das erste Eindringen bewunderungswerten Art die Tiefen und Schwierigkeiten des Beweises aufgedeckt, sowie Ideen zu ihrer Ueberwindung entwickelt. Natürlich konnte

1) Cf. A. F. II p. 45. Citate dieser Gestalt beziehen sich auf die „Vorlesungen über automorphe Functionen", welche ich in Gemeinschaft mit F. Klein bei B. G. Teubner, Leipzig, herausgebe; B. I 1897, B. II Lief. 1 1901.

es sich hier nur erst um einen ersten Entwurf handeln, der, obschon gegenwärtig gerade genau 20 Jahre seit seiner Vollendung verflossen sind, eine wesentliche Fortentwicklung seither nicht gefunden hat.

Nun liefert die in A. F. I entwickelte Theorie der Hauptkreispolygone bezw. Hauptkreisgruppen neue und gesicherte Fundamente für den Continuitätsbeweis, der hierdurch zugleich seine richtige Ausdehnung bekommt und nicht, wie bei Poincaré, auf die Grenzkreisfälle beschränkt erscheint. Die drei wichtigsten Gesichtspunkte sind erstens das Theorem über die Gestalt der kanonischen Polygone (A. F. I p. 319), zweitens das Princip der Composition der Polygone (A. F. I p. 190) und drittens die invariante Darstellung der Polygoncontinua (A. F. I p. 335 ff.).

Der letztere Gegenstand ist zwar in A. F. I principiell zum Abschluß gebracht. Indessen habe ich mich daselbst durch das Streben nach einer consequent durchgeführten Symmetrie verleiten lassen, die Schlußergebnisse in eine Form zu setzen, welche des deutlichen Ueberblicks ermangelt und als Basis für den Continuitätsbeweis unbrauchbar erscheint. Die nachfolgenden Zeilen haben den Zweck, über die neuen Ergebnisse, zu welchen ich in dieser Hinsicht letzthin gelangt bin, und welche die invariante Darstellung der Polygoncontinua in der denkbar einfachsten Gestalt geben, Bericht zu erstatten.

Ein Hauptkreispolygon P des Geschlechtes p mit n festen Ecken, von denen ν elliptisch mit den Winkeln $\frac{2\pi}{l_1}, \ldots, \frac{2\pi}{l_\nu}$ sind, heiße $P(p, n; l_1, \ldots, l_\nu)$ oder, wenn die Werte der ganzen Zahlen l nicht genannt zu werden brauchen, $P(p, n, \nu)$; (p, n) heißt „Charakter" des Polygons, $(p, n; l_1, \ldots, l_\nu)$ bezw. (p, n, ν) dessen „Signatur". Die Menge aller Polygone gleicher Signatur stellt ein Continuum $\Pi(p, n; l_1, \ldots, l_\nu)$ oder $\Pi(p, n, \nu)$ dar, dessen Dimensionenanzahl $3n-\nu+6p-6$ ist. Letztere Zahl gilt ohne Ausnahme, d. h. auch bei $p = 0$ und $p = 1$, wo jedoch $n \geqq 3$ bezw. $n \geqq 1$ zu gelten hat. Die parabolischen Polygonecken werden als Grenzfälle hyperbolischer Ecken betrachtet.

Die Continua Π vom Charakter (0, 3) sind in A. F. I p. 348 behandelt. Man hat drei Invarianten j_1, j_2, j_3, den drei Erzeugenden V_1, V_2, V_3 entsprechend. Combinieren wir die V_1, V_2, V_3 zu

Paaren, so stellen sich jeweils die dritten Invarianten der Paare so dar:

$$j_{12} = -j_3, \qquad j_{23} = -j_1, \qquad j_{31} = -j_2.$$

Das System der „charakteristischen Bedingungen“ ist:

$$(1) \qquad \begin{cases} j_1 \geqq 0, \quad j_2 \geqq 0, \quad j_3 \geqq 0, \\ j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_1 j_2 j_3 > 4 \end{cases}$$

mit dem Zusatze, daß für $j_\varkappa < 2$ die Gleichung $j_\varkappa = 2\cos\frac{\pi}{l_\varkappa}$ gelten muß. Das Continuum $\Pi(0, 3, 3)$ ist in jedem Falle nulldimensional, indem es nur aus einem einzigen Polygone besteht. Die letzte Ungleichung (1) bewirkt hier den Ausschluß derjenigen elementaren Fälle, welche zu Gruppen ohne Hauptkreis führen. Ist mindestens eine der drei Invarianten j_1, j_2, j_3 nicht < 2, so ist die letzte Ungleichung (1) überflüssig. Ausgenommen ist nur der eine Fall $j_1 = j_2 = 0$, $j_3 = 2$. Die zugehörige Gruppe (parabolische Diedergruppe) stellt sich als Grenzfall der Gruppen $j_1 = j_2 = 0$, $j_3 > 2$ dar. Indem wir uns sonach auf die drei ersten Bedingungen (1) beschränken können, setzen wir:

$$(2) \qquad \frac{j_\varkappa - 2}{j_\varkappa} = t_\varkappa,$$

wodurch die Wertmenge $j_\varkappa \geqq 2$ stetig und eindeutig auf die Menge $0 \leqq t_\varkappa < 1$ abgebildet wird. Die $t_\varkappa$ deuten wir allemal als rechtwinklige Coordinaten. Es ergiebt sich: Jedes Polygoncontinuum $\Pi(0, 3, 2)$ erscheint eindeutig und stetig auf die Punkte der geradlinigen Strecke $0 \leqq t_1 < 1$ bezogen; jedes Continuum $\Pi(0, 3, 1)$ ist eindeutig stetig auf die Punkte des Quadrats $0 \leqq t_1 < 1$, $0 \leqq t_2 < 1$ abgebildet; „das“ Continuum $\Pi(0, 3, 0)$ ist eindeutig stetig auf die Punkte des Würfels $0 \leqq t_1 < 1$, $0 \leqq t_2 < 1$, $0 \leqq t_3 < 1$ abgebildet.

Fixiert man in irgend einem Falle eine der variabelen Invarianten, so wird damit aus dem gewonnenen Gebilde ein entsprechendes Gebilde nächst niederer Dimensionenanzahl ausgeschnitten, also aus dem Würfel ein Quadrat u. s. w.

Die Gestalt der Erzeugenden müssen wir für den Fall kennen, daß mindestens eine unter ihnen, etwa $V_3 = (V_1 V_2)^{-1}$, hyperbolisch ist. Wir benutzen als Hauptkreis die reelle ζ-Axe, auf welcher die Fixpunkte von V_3 bei $\zeta = 0$ und ∞ liegen mögen. Alsdann ist

$$(3) \qquad V_1 \cdot V_2 = V_3^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(j_{12} - \sqrt{j_{12}^2-4}), & 0 \\ 0, & \frac{1}{2}(j_{12} + \sqrt{j_{12}^2-4}) \end{pmatrix},$$

wobei man die Wurzel $\sqrt{j_{12}^2-4}$ allemal positiv wählen darf. Das Polygon wird fixiert sein, wenn wir noch festsetzen, daß der Fixpunkt von V_2 auf dem Einheitskreise und zwar zur Linken der imaginären Axe sich finden soll. Zur Abkürzung setzen wir:

$$(4) \qquad J_{12} = \sqrt{j_1^2+j_2^2+j_{12}^2-j_1 j_2 j_{12}-4}$$

mit positiv genommener Wurzel. Dann sind die Coefficienten von V_1:

$$(5) \qquad \begin{cases} \alpha_1,\ \delta_1 = \frac{1}{4}(j_{12} \mp \sqrt{j_{12}^2-4})\left(j_2 \pm \dfrac{j_2 j_{12}-2j_1}{\sqrt{j_{12}^2-4}}\right), \\ \beta_1,\ \gamma_1 = \frac{1}{2}(\mp j_{12} + \sqrt{j_{12}^2-4})\dfrac{J_{12}}{\sqrt{j_{12}^2-4}}; \end{cases}$$

für V_2 aber findet man:

$$(6) \qquad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(j_2 - \dfrac{j_2 j_{12}-2j_1}{\sqrt{j_{12}^2-4}}\right), & \dfrac{J_{12}}{\sqrt{j_{12}^2-4}} \\ -\dfrac{J_{12}}{\sqrt{j_{12}^2-4}}, & \frac{1}{2}\left(j_2 + \dfrac{j_2 j_{12}-2j_1}{\sqrt{j_{12}^2-4}}\right) \end{pmatrix}.$$

V_1 und V_2 selbst mögen dabei elliptisch, parabolisch oder hyperbolisch sein.

Die Polygoncontinua vom Charakter (0, 4) behandeln wir auf Grund des Compositionsprincipes. Ein einzelnes Polygon P liefere die Erzeugenden V_1, V_2, V_3, V_4. Dann erzeugen V_1, V_3, $(V_1 \cdot V_2)^{-1}$ eine Gruppe $(0, 3, \nu)$ mit $\nu < 3$ und $j_{12} < -2$. Eine ebensolche Gruppe erzeugen V_3 und V_4 für sich genommen, und zwar gilt dabei $j_{34} = j_{12}$. Man kann sonach das Polygon P durch Composition zweier Polygone vom Charakter (0, 3) mit gemeinsamer hyperbolischer Erzeugender herstellen. Die hierbei eintretenden geometrischen Verhältnisse übersieht man am besten, wenn man statt der ξ-Halbebene nach A. F. I die projective Ebene zu Grunde legt. Die Polare p des Fixpunktes der gemeinsamen hyperbolischen Erzeugenden dient dann zur Orientierung. Das einzelne der componierten Polygone (0, 3) liegt in der Hauptsache auf der einen Seite von p und sendet über p hinüber nach dem Fixpunkte nur einen hyperbolischen Zipfel. Beide Polygone (0, 3) liegen hierbei einander bezüglich p gegenüber.

Es ist nun der ausschlaggebende Gedanke bei der Composition,

daß irgend zwei Polygone (0, 3) mit gleicher dritter (hyperbolischer) Invariante auf ∞^1 Weisen zu Polygonen (0, 4) componierbar sind. Man ordne nämlich zunächst die beiden zu componierenden Polygone zu verschiedenen Seiten einer beliebig gewählten Ellipsensehne p an. Ihre hyperbolischen Zipfel haben gleiche Breite, brauchen indes noch nicht zu coincidieren. Nun kann man aber durch einen Proceß der erlaubten Abänderung, wie er z. B. für ein Polygon (1, 1) in A. F. I p. 298 ausführlich geschildert ist, das eine der beiden Polygone (0, 3) so deformieren, daß sein hyperbolischer Zipfel längs p eine beliebige Verschiebung erfährt. Man kann denselben somit auch mit dem hyperbolischen Zipfel des anderen Polygons zum Zusammenfall bringen, worauf die Composition glatt vollzogen werden kann. Das componierte Polygon kommt dabei im allgemeinen allerdings in einer verzerrten Gestalt heraus, kann indessen nach dem Theorem in A. F. I p. 319 durch erlaubte Abänderung zu einem geradlinigen Achteck mit concaven Winkeln umgewandelt werden.

Die Invariantentheorie der Continua $\Pi(0, 4)$ wird nun so begründet. Indem wir zunächst j_1, j_2, j_{12} geben, berechnen wir die zugehörigen V_1, V_2 in den Gestalten (5), (6). Eine Gruppe (0, 3) ist stets durch Spiegelungen erweiterungsfähig. Im vorliegenden Falle (5), (6) ist der Einheitskreis ein erster Symmetriekreis. Ordnen wir nun V_3 und V_4, ihren Invarianten j_3, j_4, $j_{34} = j_{12}$ entsprechend, auf der anderen Seite der imaginären ξ-Axe (Polare p) derart an, daß der Fixpunkt von V_3 auch auf den Einheitskreis fällt, so entspringt eine durch Spiegelungen erweiterungsfähige Gruppe (0, 4).

Man kann nun unter Festhaltung von V_1, V_2 die Substitutionen V_3, V_4 durch eine beliebige Substitution $V = \begin{pmatrix} \tau, & 0 \\ 0, & \tau^{-1} \end{pmatrix}$ mit $\tau > 0$ transformieren, ohne daß das transformierte Polygon aufhört, die dritte (hyperbolische) Erzeugende mit dem zu V_1, V_2 gehörenden Polygon gemein zu haben. Jedes solche transformierte Polygon ist aber, wie wir sahen, mit dem ersten Polygon noch componierbar. Die symmetrische Gestalt erscheint dabei als Mittellage $\tau = 1$. Man hat also erstlich die vier Invarianten j_1, j_2, j_3, j_4, welche den bekannten Bedingungen unterliegen, daß entweder $j_\varkappa = 2\cos\frac{\pi}{l_\varkappa}$ oder $j_\varkappa \geqq 2$ gilt. Diese Invarianten mögen als „Eckeninvarianten“ bezeichnet werden. Es folgt die Invariante $j_{12} = j_{34}$ mit der Bedingung $j_{12} < -2$; j_{12} heiße „Transversalinvariante“, insofern die zu j_{12} gehörende Polare p

eine Transversale des Polygons $P(0, 4)$ ist. Endlich haben wir in $\tau+\tau^{-1}$ oder, was zweckmäßiger ist, in τ selbst eine sechste Invariante, welche „Compositionsinvariante“ heiße.

Zum Zwecke einer übersichtlichen geometrischen Darstellung setzen wir:

$$(7)\quad \frac{j_1-2}{j_1}=t_1,\ \ldots,\ \frac{j_4-2}{j_4}=t_4,\ \frac{j_{12}+2}{j_{12}}=t_5,\ \frac{\tau}{\tau+1}=t_6,$$

worauf wir die t wieder als rechtwinklige Coordinaten deuten. Es folgt: Das einzelne zweidimensionale Continuum $\Pi(0, 4, 4)$ ist eindeutig stetig auf das Quadrat $0<t_5<1$, $0<t_6<1$ abgebildet; jedes dreidimensionale Continuum $\Pi(0, 4, 3)$ ist eindeutig stetig auf den Würfel $0\leqq t_4<1$, $0<t_5<1$, $0<t_6<1$ bezogen; u. s. w., endlich: „das“ sechsdimensionale Continuum $\Pi(0, 4, 0)$ ist eindeutig und stetig auf den „sechsdimensionalen Würfel“ $0\leqq t_1<1, \ldots, 0\leqq t_4<1$, $0<t_5<1$ $0<t_6<1$ abgebildet. Das Auftreten des bei den Eckeninvarianten vorgesehenen Gleichheitszeichens führt auf parabolische Spitzen. Fixiert man eine der als variabel gedachten Eckeninvarianten, so wird natürlich ein Würfel nächst niederer Dimension ausgesondert.

Die benutzte Ueberlegung ist ohne weiteres der Verallgemeinerung fähig. Man wähle im eben erledigten Falle V_4 hyperbolisch und kann wieder auf ∞^1 Weisen mit einem Polygone (0, 3) componieren, welches diese hyperbolische Erzeugende hat. Indem man in gleicher Weise fortfährt, gelangt man zu folgender allgemeinen Auffassung: Den Continuis $\Pi(0, n, \nu)$ gehören $(3n-6)$ Invarianten zu, nämlich n „Eckeninvarianten“ $j_1, \ldots, j_n$, den Bedingungen:

$$(8)\quad j_\varkappa = 2\cos\frac{\pi}{l_\varkappa},\ \text{resp.}\ j_\varkappa\geqq 2$$

unterworfen, $n-3$ „Transversalinvarianten“, die consequent durch $j_{3,4,\ldots,n}, j_{4,5,\ldots,n}, \ldots, j_{n-1,n}$ zu bezeichnen sind und den Ungleichungen:

$$(9)\quad j_{3,4,\ldots,n}<-2,\ \ldots,\ j_{n-1,n}<-2$$

genügen, endlich $n-3$ „Compositionsinvarianten“ $\tau_1, \ldots, \tau_{n-3}$ mit den Bedingungen:

$$(10)\quad \tau_1>0,\ \ldots,\ \tau_{n-3}>0.$$

Alle $3n-6$ Invarianten sind von einander unabhängig, und sie sind keinen anderen als den angegebenen Bedingungen unterworfen.

Führt man $3n-6$ Größen t wie oben ein, so folgt: Das einzelne Continuum $\Pi(0, n, \nu)$ ist eindeutig stetig beziehbar auf die Punkte des $(3n-\nu-6)$-dimensionalen Würfels:

$$0 \leqq t_{\nu+1} < 1, \quad \ldots, \quad 0 \leqq t_n < 1, \quad 0 < t_{n+1} < 1, \quad \ldots, \quad 0 < t_{3n-6} < 1,$$

wobei solche Randpunkte des Würfels, welche den anfangs vorgesehenen Gleichheitszeichen entsprechen, Polygone mit einem oder mehreren parabolischen Zipfeln liefern. Natürlich bleibt die Bemerkung in Kraft, daß die Fixierung einer zunächst variabel gedachten Eckeninvariante zu einem Würfel nächst niederer Dimensionenanzahl führt. Es ist dies für die Fortsetzung des Compositionsverfahrens von Wichtigkeit.

Unter Rückkehr zum Falle (0, 4) vergleichen wir die jetzt gewonnene Darstellung der Continua $\Pi(0, 4)$ mit der in A. F. I p. 394 besprochenen. Es wurden daselbst aus Symmetriegründen im ganzen acht Invarianten:

$$(11) \qquad j_1, j_2, j_3, j_4, \qquad j_{12} = j_{34}, \qquad j_{23} = j_{41}, \qquad j_{13}, j_{24}$$

zu Grunde gelegt; zwischen ihnen bestanden alsdann die beiden Relationen:

$$(12) \quad \begin{cases} j_{12}^2 + j_{23}^2 - j_{13} j_{24} - (j_1 j_2 + j_3 j_4) j_{12} - (j_1 j_4 + j_2 j_3) j_{23} \\ \qquad + (j_1 j_2 j_3 j_4 + j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 + j_4^2 - 4) = 0, \\ j_{13} j_{23} + j_{13} + j_{24} - (j_1 j_3 + j_2 j_4) = 0. \end{cases}$$

Die drei letzten Invarianten (11), nämlich j_{13}, j_{23}, j_{24} müssen eindeutig in den $j_1, j_2, j_3, j_4, j_{12}, \tau$ darstellbar sein. Durch Berechnung des gesamten Erzeugendensystems V_1, V_2, V_3, V_4 ergeben sich die fraglichen Darstellungen in der Gestalt:

$$(13) \quad \begin{cases} j_{13}(j_{12}^2 - 4) = j_{12}(j_1 j_4 + j_2 j_3) - 2(j_1 j_3 + j_2 j_4) \\ \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\{(\tau^2 + \tau^{-2}) j_{12} - (\tau^2 - \tau^{-2})\sqrt{j_{12}^2 - 4}\} J_{12} J_{34}, \\ j_{23}(j_{12}^2 - 4) = j_{12}(j_1 j_3 + j_2 j_4) - 2(j_1 j_4 + j_2 j_3) - (\tau^2 + \tau^{-2}) J_{12} J_{34}, \\ j_{24}(j_{12}^2 - 4) = j_{12}(j_1 j_4 + j_2 j_3) - 2(j_1 j_3 + j_2 j_4) \\ \qquad\qquad + \tfrac{1}{2}\{(\tau^2 + \tau^{-2}) j_{12} + (\tau^2 - \tau^{-2})\sqrt{j_{12}^2 - 4}\} J_{12} J_{34}, \end{cases}$$

wo $\sqrt{j_{12}^2 - 4}$ ebenso wie die Quadratwurzeln J_{12}, J_{34} positiv zu nehmen sind. Durch Eintragung der aus (13) entspringenden

Werte von j_{13}, j_{23}, j_{24} werden die beiden Relationen (12) in der That identisch erfüllt, wie eine leichte Rechnung zeigt.

Man kann die vorstehenden Rechnungen einer für die Folge wichtigen geometrischen Deutung unterziehen. Vorab eliminiere man j_{24}, indem man den aus der zweiten Gleichung (12) entspringenden Ausdruck j_{24} in die erste Gleichung (12) einträgt. Demnächst setze man:

$$j_{12} = x, \qquad j_{13} = y, \qquad j_{23} = z$$

und deute x, y, z als rechtwinklige Coordinaten. Es gilt:

$$(14)\quad x^2+y^2+z^2+xyz-(j_1j_2+j_3j_4)x-(j_1j_3+j_2j_4)y-(j_1j_4+j_2j_3)z \\ +(j_1j_2j_3j_4+j_1^2+j_2^2+j_3^2+j_4^2-4) = 0.$$

Für das einzelne Continuum $\Pi(0, 4, 4)$ ist somit der Punkt (x, y, z) auf die durch (14) dargestellte Fläche dritter Ordnung beschränkt; für die Continua $\Pi(0, 4, \nu)$ mit $\nu < 4$ gelangt man zu $(4-\nu)$-fach unendlichen Continuis von Flächen dritter Ordnung, wobei die $j_\varkappa$ als Parameter dienen.

Aber die einzelne Fläche kommt hierbei nicht in ihrer ganzen Ausdehnung zur Geltung. Welcher Teil gilt, ist in einfachster Weise durch Rückgang auf die oben gewonnene Gestalt der charakteristischen Ungleichungen anzugeben. Nur dasjenige einfach zusammenhängende Stück der einzelnen Fläche (14) kommt zur Benutzung, welches vermöge der Transformation:

$$(15)\quad \begin{cases} x = j_{12} = \dfrac{2}{t_5-1}, \qquad \tau = \dfrac{t_6}{1-t_6}, \\ (j_{12}^2-4)y = (j_1j_4+j_2j_3)j_{12}-2(j_1j_3+j_2j_4) \\ \qquad +\tfrac{1}{2}\{(\tau^2+\tau^{-2})j_{12}-(\tau^2-\tau^{-2})\sqrt{j_{12}^2-4}\}\sqrt{j_1^2+j_2^2+j_{12}^2-j_1j_2j_{12}-4} \\ \qquad \cdot\sqrt{j_3^2+j_4^2+j_{12}^2-j_3j_4j_{12}-4}, \\ (j_{12}^2-4)z = (j_1j_3+j_2j_4)j_{12}-2(j_1j_4+j_2j_3) \\ \qquad -(\tau^2+\tau^{-2})\sqrt{j_1^2+j_2^2+j_{12}^2-j_1j_2j_{12}-4}\cdot\sqrt{j_3^2+j_4^2+j_{12}^2-j_3j_4j_{12}-4} \end{cases}$$

aus dem Quadrat $0 < t_5 < 1$, $0 < t_6 < 1$ hergestellt wird.

Indem wir zur Gattung (1, 1) übergehen, zeigt sich, daß wir die Invariantentheorie derselben als einen Specialfall der oben zu Ende geführten Invariantentheorie des Falles (0, 4) betrachten können. Ein einzelnes Polygon $P(1, 1)$ hat drei Invarianten j_a, j_b, j_{ab}, für welche die Gleichung:

(16) $$j_a^2+j_b^2+j_{ab}^2-j_a j_b j_{ab} = j_e+2$$

maßgeblich ist (cf. A. F. I p. 354). Für das dreidimensionale Continuum $\Pi(1, 1, 0)$ sind die Ungleichungen:

(17) $$j_a > 2, \quad j_b > 2, \quad j_{ab} > 2, \quad j_e \leqq -2$$

gültig. Für das einzelne Continuum $\Pi(1, 1; l)$ ist die letzte Ungleichung (17) durch:

$$j_e = -2\cos\frac{\pi}{l}$$

zu ersetzen (cf. A. F. I p. 360).

Um die Beziehung zur Gattung (0, 4) herzustellen, setzen wir

$$j_a = -x, \quad j_b = -y, \quad j_{ab} = -z, \quad j_e = 2-j_1^2,$$

wobei die letztere Gleichung für $\nu = 1$ auf $l_1 = 2l$ hinausläuft. Die aus (16) entspringende Gleichung:

(18) $$x^2+y^2+z^2+xyz+(j_1^2-4) = 0$$

erscheint als Specialfall $j_2 = j_3 = j_4 = 0$ der Gleichung (14), in welcher in der That $x = j_{12} < -2$, $y = j_{13} < -2$, $z = j_{23} < -2$ gilt (cf. A. F. I p. 377).

Man kommt hiermit auf eine bekannte Thatsache zurück. Eine Riemann'sche Fläche des Geschlechtes $p = 1$ ist durch die im Integral erster Gattung u in der Gestalt $u' = -u+C$ darstellbare Transformation der Periode 2 in sich überführbar. Hier, wo die Riemann'sche Fläche „mit einem Punkte e signiert" ist, ist C nicht willkürlich wählbar, muß vielmehr so bestimmt werden, daß der Punkt e einer der vier Fixpunkte der Transformation ist. Dem entspricht eine Erweiterung der einzelnen Gruppe $(1, 1; l)$ durch Zusatz einer geeigneten Substitution der Periode 2; die erweiterte Gruppe besitzt die Signatur $(0, 4; 2l, 2, 2, 2)$. Für die Gruppen (1, 1, 0) bleibt die letztere Angabe bestehen; die erweiterte Gruppe ist hier eine solche der Signatur (0, 4; 2, 2, 2), besitzt also eine hyperbolische Ecke.

Umgekehrt enthält aber auch j e d e Gruppe $(0, 4; 2l, 2, 2, 2)$ bezw. (0, 4; 2, 2, 2) eine ausgezeichnete Untergruppe des Index 2 vom Charakter (1, 1), so daß hier volle Eindeutigkeit der Beziehung besteht.

Für die Invariantentheorie der Polygone $P(1, 1)$ liefert diese Beziehung auf Grund der Formeln (14) ff. eine wichtige Ergänzung. Deuten wir x, y, z wieder als rechtwinklige Raumcoordinaten, so entspricht dem einzelnen zulässigen Werte j_e resp.

dem correspondierenden j_1 eine durch (18) dargestellte Fläche dritter Ordnung, welche in dem durch $x<-2$, $y<-2$, $z<-2$ dargestellten Raumoctanten eine einfach zusammenhängende, sich ins Unendliche ziehende Schale besitzt. Insbesondere liefern die gesamten Werte $j_1>2$ ein eindimensionales Continuum solcher Flächenschalen. Ueben wir nun im Anschluß an (15) die Transformation aus:

$$(19)\quad \begin{cases} x=-j_a=\dfrac{2}{t_5-1}, \quad \tau=\dfrac{t_6}{1-t_6}, \quad \sqrt{2-j_c}=\dfrac{2}{1-t_1}, \\ y\sqrt{j_a^2-4}=-\frac{1}{2}\{(\tau^2+\tau^{-2})j_a+(\tau^2-\tau^{-2})\sqrt{j_a^2-4}\}\sqrt{j_a^2-j_c-2}, \\ z\sqrt{j_a^2-4}=(\tau^2+\tau^{-2})\sqrt{j_a^2-j_c-2}, \end{cases}$$

so erscheint die einzelne Flächenschale dritter Ordnung und damit das einzelne Continuum $\Pi(1, 1; l)$ auf das Quadrat $0<t_5<1$, $0<t_6<1$, das eindimensionale Continuum von Flächenschalen und damit das Continuum $\Pi(1, 1)$ auf den Würfel $0\leqq t_1<1$, $0<t_5<1$, $0<t_6<1$ eindeutig stetig abgebildet. Natürlich gilt hier wieder die für die Composition wichtige Bemerkung, daß durch Fixierung des Wertes $j_c\leqq -2$ aus dem Würfel ein Quadrat ausgeschnitten wird.

Durch die letzten Entwicklungen ist der Weg gebahnt, um vermöge des Princips der Composition zum allgemeinsten Continuum $\Pi(p, n, \nu)$ von Hauptkreispolygonen zu gelangen. Ein einzelnes kanonisches Polygon $P(p, n, \nu)$ mit $p>0$ kann man nach A. F. I p. 311 ff. entstanden denken durch Composition zweier Polygone $P(p-1, n+1, \nu)$ und $P(1, 1, 0)$, welche eine hyperbolische Erzeugende gemein haben. Umgekehrt kann man zwei solche Polygone mit gemeinsamer hyperbolischer Erzeugender stets auf ∞^1 Weisen zu einem Polygone $P(p, n, \nu)$ componieren. Es ist hierbei nötigenfalls am Polygone $P(1, 1, 0)$ die oben schon erwähnte Verzerrung auszuüben, welche gerade für diesen Fall in A. F. I p. 298 besprochen wurde. Natürlich kann man hinterher das Polygon wieder in ein geradliniges $(2n+4p)$-eck mit nur concaven Winkeln umwandeln.

Die Invariantentheorie gestaltet sich jetzt so, daß mit $P(p-1, n+1, \nu)$ die Invariante j_c für $P(1, 1, 0)$ gegeben ist. Es treten dann drei weitere an die Relation (16) gebundene Invarianten j_a, j_b, j_{ab}, die „Periodeninvarianten“ (aus nahe liegendem Grunde) heißen sollen, hinzu. Statt ihrer kann man vermöge der Transformation (19) auch zur Eckeninvariante t_1 (jetzt nur

noch im Intervall $0 < t_1 < 1$ variabel) und den beiden Periodeninvarianten t_5, t_6 übergehen, wobei der „Punkt" (t_5, t_6) unabhängig von t_1 in seinem Quadrate $0 < t_5 < 1$, $0 < t_6 < 1$ frei beweglich ist. Endlich kommt noch eine „Compositionsinvariante" hinzu, welche wir wie oben durch eine auf das Intervall $0 < t < 1$ eingeschränkte Variabele t darstellen können. Bei irgend welchen stetigen Abänderungen des Polygons können sich diese Invarianten t_1, t_5, t_6, t gleichfalls nur stetig mitändern.

Die Invariantentheorie des Polygons $P(p, n, \nu)$ ist nun unmittelbar zu erledigen. Wir erzeugen dasselbe durch Composition aus einem Polygone $P(0, n+p, \nu)$ und p Polygonen $P(1, 1, 0)$. Ersteres Polygon hat $3(n+p)-6$ Invarianten, die wir durch die Größen $t_1, \ldots, t_{3(n+p)-6}$ darstellen. Die ersten n Eckeninvarianten sind entweder fest oder im Intervall $0 \leqq t < 1$ variabel, wobei das Gleichheitszeichen allemal eine parabolische Spitze anzeigt. Hinzu kommen bei der Composition noch $2p$ Periodeninvarianten $t_{3n+3p-5}, t_{3n+3p-4}, \ldots, t_{3n+5p-6}$, sowie endlich p Compositionsinvarianten $t_{3n+5p-5}, \ldots, t_{3n+6p-6}$. Alle diese Invarianten sind im Intervall $0 < t < 1$ variabel. Zugleich sind die sämtlichen $3n+6p-6$ Invarianten von einander unabhängig. Unter Heranziehung einer schon wiederholt benutzten geometrischen Sprechweise entspringt der Satz: Das $(3n-\nu+6p-6)$-dimensionale Polygoncontinuum $\Pi(p, n, \nu)$ von gegebener Signatur ist eindeutig stetig abbildbar auf den $(3n-\nu+6p-6)$-dimensionalen Würfel:

$$0 \leqq t_{r+1} < 1, \ \ldots, \ 0 \leqq t_n < 1, \quad 0 < t_{n+1} < 1, \ \ldots, \ 0 < t_{3n+6p-6} < 1.$$

Sieht man von den beiden Signaturen (0, 3, 3) und (0, 3, 2) ab, so ist die Anzahl $3n-\nu+6p-6$ stets >1. Alsdann ist die Berandung des Continuums $\Pi(p, n, \nu)$ ein zusammenhängendes geschlossenes Continuum von $3n-\nu+6p-7$ Dimensionen. Bei der Darstellung des Continuums $\Pi(p, n, \nu)$ durch die t erscheint der Rand als aus $2(3n-\nu+6p-6)$ Würfeln der Dimension $3n-\nu+6p-7$ zusammengesetzt. Die ersten $n-\nu$ dieser berandenden Würfel liefern die Polygone mit parabolischen Zipfeln. Alle übrigen Würfel liefern Grenzfälle, deren Natur durch eine besondere Untersuchung festzustellen ist.

Als ein Hauptergebnis der neuen Darstellung der Polygoncontinua ist anzusehen, daß jedes Polygoncontinuum $\Pi(p, n, \nu)$ einen „einfach" zusammenhängenden Bereich darstellt. Die stetige und ohne Zerreissen vor sich gehende Zusammenziehung des ganzen Randes bis zu einem Punkte

kann man in einfachster Weise durch die Ungleichungen:

$$\sigma \leqq t_{\nu+1} \leqq 1-\sigma, \quad \ldots, \quad \sigma \leqq t_{3n+6p-6} \leqq 1-\sigma$$

vorschreiben, in welchen man σ stetig von 0 bis $\frac{1}{2}$ wachsen läßt. Der Rand des jeweils übrig bleibenden Bereiches zieht sich dabei bis auf den Punkt $t_{\nu+1} = t_{\nu+2} = \cdots = t_{3n+6p-6} = \frac{1}{2}$ zusammen und beschreibt das ganze Continuum einmal und vollständig. Die Einfachheit der hiermit gewonnenen Vorstellung, mögen wir sie, wie eben gedacht, an dem $(3n-\nu+6p-6)$-dimensionalen Würfel oder an einer anderen auf letzteren eindeutig stetig bezogenen Darstellung unseres Polygoncontinuums ausüben, ist für die Durchführung des „Continuitätsbeweises“ von großer Bedeutung.

Ueber das Gesetz der Lichtgeschwindigkeit im Turmalin.

Von

S. Nakamura.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 31. October 1903.

C. Viola[1]) führte eine Reihe von Messungen der Brechungsindices von Quarz mittelst des Abbe'schen Totalrefraktometers mit solcher Genauigkeit aus, daß die Messungen des Grenzwinkels der Totalreflektion für die Glaskugel und Luft nur Abweichungen von $\pm 10''$ unter einander zeigten. Er fand bei Messungen an einer parallel zur Hauptachse geschliffenen Quarzplatte, daß der Grenzwinkel für den ordentlichen Strahl gesetzmäßig mit dem Azimut variirte. Die Differenz zwischen den Grenzwinkeln für die Richtungen parallel und senkrecht zur Hauptachse war $25''$, und die entsprechenden Werte des Brechungsindex (für das Na-Licht) waren

$$n_{\parallel} = 1.54426 \quad \text{und} \quad n_{\perp} = 1.54440.$$

Eine senkrecht zur Achse geschliffene Platte ergab

$$n_{\perp} = 1.54445.$$

Die von ihm gefundene Differenz $n_{\perp} - n_{\parallel}$ ist größer, als die Differenz, die von der Circularpolarisation herrühren könnte. Viola schließt aus diesem Resultate, daß die Fortpflanzung des Lichtes im Quarz vom Huyghens-Fresnel'schen Gesetze abweicht.

1) C. Viola, Zeitschr. f. Kryst. 32. 1900. p. 551.

Aehnliche und noch stärkere Abweichungen [1]) vom Huyghens-schen Gesetze fand er an durchsichtigen Turmalinen aus Elba. Aus einem und demselben Krystalle wurden je zwei Prismen hergestellt, deren Kanten parallel und senkrecht zur Hauptachse waren. Er bestimmte den Brechungsindex (für das Na-Licht) nach der Prismenmethode und erhielt die folgenden Werte. $n_{\parallel}$ und $n_{\perp}$ sind die Brechungsexponenten des ordentlichen Strahles in den resp. parallelen und senkrechten Richtungen zur Hauptachse, während n_e der außerordentliche Brechungsexponent ist.

	$n_{\parallel}$	$n_{\perp}$	$n_{\parallel}-n_{\perp}$	n_e
Gelber Turmalin	1.6494	1.6482	0.0012	1.6239
Farbloser „	1.6425	1.6402	0.0023	1.6215
Grüner „	1.6479	1.6503	−0.0024	1.6254.

Beim Quarz fand im Gegensatz hierzu J. Macé de Lépinay [2]) durch Messungen über die Phasenverzögerung des Lichtes beim Durchgang durch einen Quarzwürfel von ca. 4 cm Seitenlänge, eine hundertmal kleinere Differenz in $n_{\parallel}-n_{\perp}$, und zwar eine noch kleinere als aus der Theorie der Circularpolarisation folgen würde. Er fand für das Cd-Licht,

$$n_{\parallel} = 1.5487429 \quad \text{und} \quad n_{\perp} = 1.5487413.$$

Bei der Prismenmethode fand er

$$n_{\perp} = 1.5487381.$$

Im Quarz bestätigte sich also die Viola'sche Ansicht nicht.

Für seine Messungen an drei verschiedenen Turmalinen aus Elba und einem grünen aus Haddam, stellte E. A. Wülfing [3]), um den Mangel, welcher durch die Inhomogenität des Krystalls verursacht wird, möglichst zu vermindern, je eine vierseitige Pyramide her, von der zwei Flächen parallel zur Hauptachse, die zwei anderen parallel zur Basis waren. Er erhielt völlig identische Werte für $n_{\parallel}$ und $n_{\perp}$ in zwei Fällen und einen Unterschied von 0.0001 in den beiden anderen.

---

1) C. Viola, Zeitschr. f. Kryst. 32. 1900. p. 557.

2) J. M. de Lépinay, Zeitschr. f. Kryst. 34. 1901. p. 280. Compt. Rendus 1899. p. 128.

3) E. A. Wülfing, Centralblatt f. Miner. 1901. p. 299.

	$n_{\parallel}$	$n_{\perp}$	n_{ε}
Farbloser Turmalin (Elba)	1.6419	1.6419	1.6220
" " "	1.6418	1.6418	1.6220
" " "	1.6424	1.6423	1.6223
Grüner " (Haddam)	1.6401	1.6400	1.6220.

Dieser Widerspruch mit seinen Resultaten veranlaßte C. Viola[1]) zur Wiederaufnahme der Untersuchungen. Er stellte an sechs selbst geschliffenen Prismen verschiedener Orientierung aus Elbaner und Brasilianer Krystallen Messungen nach der Stokesschen Methode an, um die Veränderung des Brechungsexponenten für ordentliche Strahlen mit der Richtung innerhalb eines Winkelbereichs von etwa 40° in der Querschnittebene des Prismas festzustellen. Seiner Ansicht nach geht aus den Messungsresultaten hervor, daß der ordentliche Exponent Veränderungen mit der Richtung zeigt, welche die möglichen Beobachtungsfehler übertreffen. Sie betrugen in der zur Hauptachse senkrechten Ebene etwa 4, in einem Hauptschnitte 12 Einheiten der 4 Decimale für einen Winkelbereich von ca. 40°. Er schloß daraus, daß die Lichtfortpflanzung in den untersuchten Turmalinen jedenfalls nicht dem Huyghens'schen Gesetze für einachsige Krystalle folgt.

Aber es ist höchst wahrscheinlich, daß diese großen Abweichungen des ordentlichen Strahles in Turmaline durch die Unebenheit der Prismenfläche verursacht sind. Wenn die Flächen gekrümmt sind, dann ist es ganz klar, daß, da der Einfallswinkel des Strahles stufenweise variirt wird, und folglich der Strahl einen allmählig wechselnden Pfad entlang sich fortpflanzt, auch der brechende Winkel des Prismas sich ändern muß. Wenn man also die Beobachtung durch die Annahme vom constanten brechenden Winkel reduciirt, so wird eine scheinbare Veränderlichkeit im Brechungsexponenten sich zeigen.

Auf Anregung des Herrn Prof. Voigt sind die nachstehenden Messungen der ordentlichen und außerordentlichen Brechungsexponenten an nahezu farblosem Turmalin aus Brasilien mit einem Abbe'schen Totalrefraktometer vorgenommen worden. Aus dem Krystall ist durch die Firma C. Zeiß-Jena ein kreisrundes Scheibchen von ca. 6 mm. Durchmesser hergestellt, dessen eine Endfläche optisch eben und zur Hauptachse genau parallel ist. Daß die

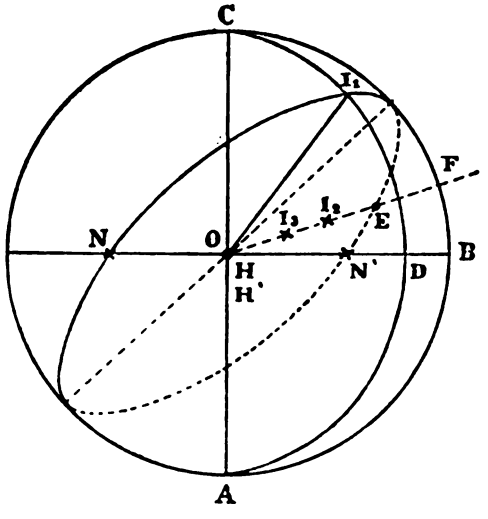
1) C. Viola, Zeitschr. f. Kryst. 37. 1902. p. 120.

Tabelle I.

(1)		(2)		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	
α	R	α	L	$\frac{1}{2}(R+L)$	$\theta=\frac{1}{2}(R-L)$	$\Delta\theta$ Beob.	$\Delta\theta$ Berechn.	θ = (4) + (6)	
0°	240° 20′ 25″	180°	120° 23′ 5″	180° 21′ 45″	59° 58′ 40″	−20.3	+ 4	59° 58′ 44″	1.6
10	20 5	190	23 45	21 55	58 10	+ 9.7	+10	20	
20	19 35	200	23 55	21 45	57 50	+29.7	+15	5	
30	19 55	210	23 55	21 55	58 0	+19.7	+20	20	
40	19 45	220	23 55	21 50	57 55	+24.7	+24	19	
50	19 45	230	24 15	22 0	57 45	+34.7	+27	12	
60	19 35	240	24 5	21 50	57 45	+34.7	+30	15	
70	19 55	250	23 55	21 55	58 0	+19.7	+31	31	
80	19 45	260	24 5	21 55	57 50	+29.7	+32	22	
90	19 35	270	24 15	21 55	57 40	+39.7	+32	12	
100	19 55	280	24 5	22 0	57 55	+24.7	+31	26	
110	19 45	290	23 55	21 50	57 55	+24.7	+28	23	
120	20 5	300	24 5	22 5	58 0	+19.7	+25	25	
130	19 55	310	24 5	22 0	57 55	+24.7	+21	16	
140	19 55	320	23 55	21 55	58 0	+19.7	+17	17	
150	19 55	330	23 45	21 50	58 5	+14.7	+12	17	
160	19 55	340	23 55	21 55	58 0	+19.7	+ 7	7	
170	20 5	350	23 45	21 55	58 10	+ 9.7	+ 1	11	
180	20 15	0	23 25	21 50	58 25	− 5.3	− 4	21	
190	20 25	10	23 25	21 55	58 30	−10.3	−10	20	
200	20 25	20	23 15	21 50	58 35	−15.3	−15	20	
210	20 35	30	22 55	21 45	58 50	−30.3	−20	30	
220	20 25	40	22 55	21 40	58 45	−25.3	−24	21	
230	20 35	50	22 55	21 45	58 50	−30.3	−27	23	
240	20 45	60	22 35	21 40	59 5	−45.3	−30	35	
250	20 35	70	22 55	21 45	58 50	−30.3	−31	19	
260	20 45	80	22 35	21 40	59 5	−45.3	−32	33	
270	20 45	90	23 5	21 55	58 50	−30.3	−32	18	
280	20 25	100	23 15	21 50	58 35	−15.3	−31	4	
290	20 25	110	22 45	21 35	58 50	−30.3	−28	22	
300	20 25	120	23 25	21 55	58 30	−10.3	−25	5	
310	20 15	130	23 25	21 50	58 25	− 5.3	−21	4	
320	20 25	140	23 25	21 55	58 30	−10.3	−17	13	
330	20 35	150	23 25	22 0	58 35	−15.3	−12	23	
340	20 25	160	23 25	21 55	58 30	−10.3	− 7	23	
350	20 25	170	23 15	21 50	58 35	−15.3	− 1	34	
Arithmetisches Mittel =				180° 21′ 51″.4	59° 58′ 19″.7			59° 58′ 19″.7 ± 1″.03	1.63

$$n_o = 1.636675 \pm 0.0000048.$$

In der nebenstehenden Figur sind ABC, ADC zwei Kreise auf einer Kugel mit dem Mittelpunkte O, welche resp. die Ebenen der Glashalbkugel und der Krystallscheibe darstellen; wenn man den Winkel zwischen ihnen durch ε bezeichnet, dann haben wir ein Flüssigkeitsprisma mit dem brechenden Winkel gleich ε. Nun fassen wir einen Strahl OI_1 ins Auge, der auf das eben erwähnte Prisma streifend einfällt und sich durch dasselbe in der Richtung OI_2 fortpflanzt. Sind N, N' die Pole des Kreises ADC, dann wird die Ebene NI_1N' die Einfallsebene des Strahles OI_1 sein. Wenn man den Winkel $N'OI_2$ durch α und den Brechungsexponenten der Flüssigkeit durch ν bezeichnet, so wird



$$\frac{1}{\sin\alpha} = \frac{n_0}{\nu}.$$

Beim Eintritt in die Glaskugel wird der Strahl nach OI_2 gebrochen. Sind nun H, H' die Pole des Kreises ABC, welche beide in die Figur mit O zusammenfallen, dann ist HI_2E die Einfallsebene für OI_2 und der gebrochene Strahl kann durch OI_3 dargestellt werden. Bezeichnet man die Winkel $H'OI_2$ und $H'OI_3$ durch β und θ, wovon der letztere der mit dem Fernrohr beobachtete Winkel ist, so wird

$$\frac{\sin\beta}{\sin\theta} = \frac{N}{\nu}.$$

Falls φ das Azimut des Strahles OI_3 auf dem Horizontalkreise, von der Richtung der maximalen Neigung OB berechnet, d. h. BOF bezeichnet, dann gilt

$$\cos\alpha = \cos\varepsilon\cos\beta + \sin\varepsilon\sin\beta\cos\varphi;$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}\sqrt{\nu^2 - n_0^2} &= \cos\varepsilon\sqrt{\nu^2 - N^2\sin^2\theta} + \sin\varepsilon . N\sin\theta\cos\varphi \\ &= \sqrt{\nu^2 - N^2\sin^2\theta} + \varepsilon N\sin\theta\cos\varphi.\end{aligned}$$

Diese Gleichung giebt uns die Beziehung zwischen φ und θ. Nun setzt man

$$N \sin\theta = n_o + \Delta n,$$

dann ist

$$\Delta n = \varepsilon \sqrt{v^2 - n_o^2} . \cos\varphi,$$

und, wenn man noch

$$\Delta n = N \cos\theta_o . \Delta\theta = \sqrt{N^2 - n_o^2} . \Delta\theta$$

setzt, gilt ferner

$$\Delta\theta = \varepsilon \sqrt{\frac{v^2 - n_o^2}{N^2 - n_o^2}} . \cos\varphi = \varkappa \cos\varphi.$$

Man sieht daraus, daß, wenn man die Ablesung des Horizontalkreises für die Richtung OB gleich α' und dieselbe für OE gleich α setzt, $\varphi = \alpha - \alpha'$ ist, und man aus

$$\Delta\theta = \varkappa \cos(\alpha - \alpha')$$

α' und $\varkappa$ berechnen kann. Aus den $\Delta\theta$ in (5) bekommen wir in dieser Weise

$$\alpha' = 82°11'.5, \qquad \varkappa = 32''.1, \qquad \varepsilon = 1'58''.$$

Die Werte von $\Delta\theta$, berechnet aus diesen Werten von α' und $\varkappa$, sind in der Kolumne (6) gegeben; (7) giebt uns die Werte von θ, frei von dem Neigungsfehler der Krystallscheibe. Wir sehen daraus, daß der Brechungsexponent des ordentlichen Strahles im Turmalin in allen Richtungen constant ist, und zwar gilt

$$n_0 = 1.636675 \pm 0.0000048.$$

Die Beobachtungen des außerordentlichen Strahles, welche die Lage der Hauptachse zu bestimmen gestatten, sind in der Tabelle II gegeben.

Tabelle II.

(1)	(2)		(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
R	α	L	$\frac{1}{2}(R+L)$	$\theta=\frac{1}{2}(R-L)$	θ berechn.	$\Delta\theta$	θ korrigierte	θ berechnete	$\Delta\theta$
239° 25′ 5″	180°	121° 18′ 25″	180° 21′ 45″	59° 3′ 20″	59° 3′ 45″	+25	59° 3′ 24″	59° 3′ 58″	+34″
33 25	190	10 5	21 45	11 40	12 2	+22	11 50	12 1	+11
44 15	200	0 15	21 45	22 0	22 7	+ 7	22 15	22 7	− 8
54 35	210	120 49 25	22 0	32 35	32 57	+18	32 55	32 54	− 1
240 4 35	220	39 25	22 0	42 35	43 5	+30	42 59	43 3	+ 4
13 5	230	31 5	22 5	51 0	51 20	+20	51 27	51 18	− 9
17 55	240	25 55	21 55	56 0	56 40	+40	56 30	56 38	+ 8
19 50	250	24 5	21 57	57 52	58 20	+28	58 23	58 18	− 5
17 5	260	26 25	21 45	55 20	56 8	+48	55 52	56 12	+20
12 25	270	31 35	22 0	50 25	51 3	+38	50 57	50 23	−34
2 50	280	40 15	21 32	41 18	41 47	+31	41 49	41 48	− 1
239 52 45	290	50 35	21 40	31 5	31 27	+22	31 33	31 30	− 3
41 45	300	121 1 25	21 35	20 10	20 40	+30	20 35	20 43	+ 8
31 55	310	11 35	21 45	10 10	10 45	+35	10 31	10 48	+17
24 30	320	19 45	22 7	2 22	2 50	+28	2 29	2 52	+13
19 10	330	24 25	21 47	58 57 22	57 46	+24	58 57 34	58 57 50	+16
18 10	340	26 15	22 12	55 58	56 13	+15	56 5	56 15	+10
20 5	350	24 5	22 5	58 0	58 18	+18	58 1	58 18	+17
26 10	360	17 55	22 2	59 4 8	3 45	−23	59 4 4	59 3 58	− 6
34 10	10	9 35	21 52	12 18	12 2	−16	12 8	12 1	− 7
44 15	20	120 59 35	21 55	22 20	22 7	−13	22 5	22 7	+ 2
55 5	30	48 55	22 0	33 5	32 57	− 8	32 45	32 54	+ 9
240 5 35	40	38 25	22 0	43 35	43 5	−30	43 11	43 3	− 8
13 45	50	30 10	21 57	51 48	51 20	−28	51 21	51 18	− 3
18 55	60	24 45	21 50	57 5	56 40	−25	56 35	56 38	+ 3
20 50	70	23 5	21 57	58 52	58 20	−32	58 21	58 18	− 3
18 25	80	25 5	21 45	56 40	56 8	−32	56 8	56 12	+ 4
12 35	90	30 25	21 30	51 5	51 3	− 2	50 33	50 23	−10
3 55	100	39 30	21 42	42 12	41 47	−25	41 41	41 48	+ 7
239 53 25	110	49 45	21 35	31 50	31 27	−23	31 22	31 30	+ 8
42 35	120	121 0 15	21 25	21 10	20 40	−30	20 45	20 43	− 2
32 45	130	10 25	21 35	11 10	10 45	−25	10 49	10 48	− 1
25 35	140	18 50	22 12	3 22	2 50	−32	3 5	2 52	−13
20 25	150	23 25	21 55	58 58 30	57 46	−44	58 58 18	58 57 50	−28
18 25	160	25 25	21 55	56 30	56 13	−17	56 23	56 15	− 8
20 45	170	23 45	22 15	58 30	58 18	−12	58 29	58 18	−11

Arithmetisches Mittel = 180° 21′ 56″.0

Das arithmetische Mittel in (3) stimmt mit demjenigen in der Tabelle I überein.

Da die Turmalinscheibe, wie oben erzählt, gegen die Ebene der Glashalbkugel etwas geneigt ist, wird es notwendig sein, daß man θ wiederum zuerst von diesem Fehler frei macht. Der Korrektionsbetrag ist jedoch in diesem Falle nicht so leicht streng zu berechnen, wie in dem Falle des ordentlichen Strahles. Aber wenn wir ins Auge fassen, daß 1) die in Frage stehende Neigung ganz klein war, und daß 2) nach unserer Rechnung die Fehler beinahe sich gegen einander aufheben, so wird es uns gestattet sein, die in der Tabelle I (6) gegebenen Korrektionen $\Delta\theta$ zu benutzen. Daß dieses Rechnungsverfahren zulässig ist, können wir auch aus dem folgenden ersehen. Wir machen die Berechnung, wie wir sie in der Gleichung (3) gezeigt haben, ohne Rücksicht auf diese Frage, und wir vergleichen die beobachteten und die berechneten Werte von θ. In derselben Weise, bekommen wir unter der Annahme, daß $\gamma = 0$,

$$n_o = 1.63667, \qquad n_e = 1.61935, \qquad \alpha_0 = -20°41'.0$$

und die daraus berechneten Werte von θ sind wie wir sie in (5), Tabelle II gegeben haben. Nun gleichen die Differenzen $\Delta\theta$ in (6) zwischen den beobachteten und den berechneten Werten von θ beinahe denjenigen in (6), Tabelle I; — hieraus ersehen wir folglich, daß wir (6) Tabelle I als Korrektionen für θ benutzen können. Aus den so korrigierten und in (7) gegebenen Werten von θ, bekommen wir schließlich,

$$n_o = 1.63667, \qquad n_e = 1.61934, \qquad \alpha_0 = -20°39'.4.$$

Wir sehen zuerst, daß der Wert von n_o völlig mit demjenigen übereinstimmt, den wir aus den Beobachtungen des ordentlichen Strahles gefunden haben, und die Richtigkeit der Annahme $\gamma = 0$, ist constatiert. Die berechneten Werte von θ, und die Differenzen $\Delta\theta$ sind in (8) und (9) gegeben.

Die vorliegenden Messungen zeigen uns also, daß die Fortpflanzung des Lichtes im Turmalin nicht merklich vom Huyghens'schen Gesetze abweicht.

Göttingen, September 1903.

Wirkung einer Uebergangsschicht bei Totalreflexion.

Von

R. A. Houstoun.

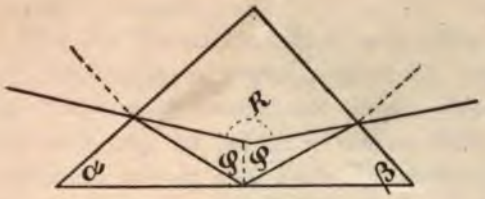
Mit einer Figur im Text.

Vorgelegt von W. Voigt in der Sitzung vom 31. October 1903.

In einer Arbeit in Wied. Ann. 24 S. 146, 1891 leitet Drude eine Formel für die relative Phasendifferenz ab, die zwischen den Componenten des eben polarisierten Lichtes durch Totalreflexion an der Grenze zweier Medien erzeugt wird, wenn eine Uebergangsschicht vorhanden ist. J. Jamin (Ann. de Phys. et Chim. (3) 30 pg. 257, 1850) und G. Quincke (Pogg. Ann. 127 pg. 217, 1866) beobachteten diese Phasendifferenz und haben gefunden, daß ihre Beobachtungen mit der älteren Fresnel'schen Formel übereinstimmen, die auf der Annahme gegründet ist, daß es eine Unstetigkeitsfläche zwischen den zwei Medien giebt. Jamin und Quincke haben gewöhnlich mit frisch geschliffenen Flächen gearbeitet und hier mochte die Uebergangsschicht in der That sehr gering sein. Prof. Voigt gab mir ein Prisma, dessen Uebergangsschicht durch lange Aufbewahrung voraussichtlich dicker geworden war. In diesem Prisma habe ich die Phasendifferenz beobachtet, die durch Totalreflexion erzeugt wurde.

Der Apparat war ein Spektrometer, dessen Spaltrohr mit einem polarisierenden Nicol, und dessen Fernrohr mit einem analysierenden Nicol und einem Babinet'schen Compensator versehen waren. Das einfallende Licht war unter einem Winkel von 45° gegen die Einfallsebene polarisiert. Die Lichtquelle war eine Na_2CO_3-Perle in einer Bunsen-Flamme.

φ, der Einfallswinkel, wurde aus R, dem Winkel zwischen



den Richtungen des Fernrohrs und des Spaltrohrs, und dem Brechungsindex n durch die folgende Formel berechnet

$$R = \alpha + \beta + \arcsin(n \sin(\varphi - \alpha)) + \arcsin(n \sin(\varphi - \beta)).$$

Die Messungen wurden für eine Reihe Einfallswinkel gemacht, von denen der Grenzwinkel der Refraction der erste war. Die Winkel des Prismas, der Brechungsindex, die Nullpunkte des Nicols und des Compensators waren vorher sehr genau festgestellt. Nach einigen erfolglosen Versuchen erhielt ich zwei gute Beobachtungsreihen — zehn verschiedene Einfallswinkel und zehn Beobachtungen zu jedem Winkel. Vor dem Versuch wurde das Prisma die Nacht hindurch in Alcohol gelassen, dann gründlich mit Wasser gewaschen und mit einem leinenen Tuch getrocknet. Es war auf dem Tisch des Spektrometers so gestellt, daß, wenn es umgedreht wurde, das Licht während derselben Reihe von Beobachtungen immer von demselben Ort reflectiert wurde. Die zwei Reihen von Beobachtungen, die unten gegeben sind, wurden für Licht gemacht, das von verschiedenen Orten der Fläche reflectiert wurde.

Δ_b ist die beobachtete Phasendifferenz. Neben Δ_b findet man die Reihe der mittleren Fehler, um einen Begriff von der Genauigkeit der Messung zu geben. Δ_0 ist die Phasendifferenz nach der gewöhnlichen Fresnel'schen Formel berechnet.

Die Fresnel'sche Formel lautet:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta_0 = -\frac{\sqrt{\sin^2\varphi - \frac{1}{n^2}}}{\sin\varphi \operatorname{tang}\varphi},$$

die Drude'sche Formel:

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}\Delta_0 - \frac{\varepsilon}{n}\frac{1}{\sin\varphi \operatorname{tang}\varphi}.$$

In der letzteren wurde zunächst Δ_b für Δ eingesetzt, ebenso die entsprechenden Werte für Δ_0 und φ. Man bekommt dadurch verschiedene Zahlenwerte für ε. Das arithmetische Mittel dieser Werte wurde dann wieder in die Drude'sche Formel gesetzt und so das Δ berechnet, für welches die Werte gemäß den beiden Beobachtungsreihen in der folgenden Tafel aufgeführt sind.

Tafel der beobachteten und berechneten Werte.

Brechungsindex des Prismas $n = 1.619$.

Winkel des Prismas $\begin{cases} \alpha = 45^0\,0'\,15'' \\ \beta = 45^0\,5'\,5'' \end{cases}$

			I.					II.				
φ	R	Δ_0	Δ_b	Der mittlere Fehler	$\Delta_0-\Delta_b$	Δ	$\Delta-\Delta_b$	Δ_b	Der mittlere Fehler	$\Delta_0-\Delta_b$	Δ	$\Delta-\Delta_b$
38°.21	67°.87	7°.2	4°.0	0°.6	3°.2	4°.1	+0°.1	4°.0	0°.3	3°.2	4°.5	+0°.5
39°.96	73°.57	36°.1	33°.6	0°.6	2°.5	33°.5	−0°.1	33°.7	0°.2	2°.4	33°.7	0°.0
41°.98	80°.17	46°.1	41°.8	0°.5	4°.3	43°.9	+2°.1	44°.2	0°.3	1°.9	43°.5	−0°.7
44°.03	86°.83	50°.7	49°.1	0°.5	1°.6	48°.7	−0°.4	48°.9	0°.3	1°.8	48°.9	0°.0
46°.09	93°.48	52°.7	51°.9	0°.4	0°.8	51°.1	−0°.8	50°.7	0°.2	2°.0	51°.1	+0°.4
47°.94	99°.47	53°.2	51°.9	0°.4	1°.3	51°.7	−0°.2	51°.9	0°.3	1°.3	51°.8	−0°.1
49°.97	106°.07	52°.8	51°.5	0°.6	1°.3	51°.6	+0°.1	51°.3	0°.5	1°.5	51°.6	+0°.3
51°.95	112°.57	51°.8	50°.3	0°.5	1°.5	50°.6	+0°.3	50°.5	0°.4	1°.3	50°.6	+0°.1
53°.97	119°.17	50°.3	48°.9	0°.4	1°.4	49°.2	+0°.3	49°.3	0°.3	1°.0	49°.2	−0°.1
55°.95	125°.77	48°.5	47°.9	0°.2	0°.6	47°.4	−0°.5	48°.5	0°.8	0°.0	47°.5	−1°.0

$\frac{\varepsilon}{n} = 0.0133$ $\qquad$ $\frac{\varepsilon}{n} = 0.0126$

Die Wirkung der Uebergangsschicht ist sehr evident.

Wir haben zwei Werte für $\frac{\varepsilon}{n}$ 0.0133 und 0.0126, also im Mittel

$$\frac{\varepsilon}{n} = 0.0130.$$

Nun ist nach Drude ε definiert durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{2\pi}{\tau} \frac{n_1^2 n_0^2}{n_1^2 - n_0^2} \int_0^L dl \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_l^2}\right)\left(\frac{1}{n_l^2} - \frac{1}{n_0^2}\right) n_l^2,$$

wobei L die Dicke der Oberflächenschicht, n_l den Brechungsindex in der Tiefe l, n_0 in der Tiefe o und n_1 in der Tiefe L bezeichnet.

Das positive Vorzeichen von ε bedeutet, daß der Brechungsindex der Schicht zwischen demjenigen des Prismas und der Luft liegt.

Nehmen wir an, daß

$$n_l = 1.309_5 + 0.309_5 \cos \frac{\pi l}{L}.$$

Dies genügt den Endbedingungen $n_0 = 1{,}619$, $n_1 = 1$ und geht stetig über. Dann findet sich $L = 0{,}028\,\lambda$, wobei λ die Wellenlänge des gelben Na-Lichtes bezeichnet. In seinem Artikel in Wied. Ann. 43, S. 145, 1891 berechnet Drude aus den Beobachtungen von Jamin über gewöhnliche Reflexion für Glas vom Brechungsindex 1.714 die untere Grenze dieses Betrags und er findet, daß diese Grenze $L = 0{,}0103 \cdot \lambda$ ist. Der hier erhaltene größere Wert ist vollkommen wahrscheinlich, da es sich um eine sehr alte Glasoberfläche handelt.

Göttingen, im August 1903.

Zur Elektronentheorie.

Von

G. Herglotz.

(Vorgelegt in der Sitzung am 28. November 1903 durch F. Klein).

Der vorliegende Aufsatz schließt sich an die erste im Arch. néerl. T. 25 erschienene Arbeit des Hrn. H. A. Lorentz über die Elektricitätstheorie für bewegte Körper an. Die Grundgleichungen sind dort aus einem Variationsprincip hergeleitet, welches eine vollkommen natürliche Erweiterung der Maxwellschen Theorie linearer elektrischer Ströme auf bewegte Körper bildet und eben deshalb als Ausgangspunkt der Theorie bemerkenswert erscheint. Die Durchführung dieses Principes jedoch scheint nicht vollkommen genau zu sein, insbesondere gilt dies bezüglich der von Hrn. Lorentz angegebenen Drehkräfte die auf das Elektron wirken. Deshalb ist hier zunächst diese Ableitungsweise der Grundgleichungen exacter zu gestalten versucht worden.

Bezüglich der Integration dieser Gleichungen richtet sich die Frage zunächst nach den Kräften die auf ein in bekannter Bewegung begriffenes Elektron wirken. Die Werthe dieser Kräfte wurden zuerst von Hrn. Abraham[1]) unter Beschränkung auf nicht rotierende Elektronen und bei Vernachlässigung der Quadrate und Producte der zweiten und höheren Differentialquotienten der Coordinaten des Elektrons gefunden. In jüngster Zeit hat Herr Schwarzschild[2]) die gleiche Aufgabe auch für ein rotierendes Elektron unter derselben Verachlässigung gelöst. Der hier eingeschlagene Weg nähert sich dem von Hrn. Lorentz in der ange-

1) Annal. d. Physik 1903.
2) Göttinger Nachrichten 1903.

führten Arbeit betretenen, und besteht in der Entwicklung der Kräfte nach Potenzen der reciproken Lichtgeschwindigkeit $\mathfrak{B}$, jedoch unter Beibehaltung aller Potenzen und Differential-Quotienten der Beschleunigungen. Es lassen sich in der That die elektrischen und magnetischen Kräfte die von einem beliebig bewegten Elektron erregt werden, derart nach $1/\mathfrak{B}$ entwickeln, daß die einzelnen Glieder durch bloße Differentiationen gewonnen werden und ganze Functionen der Coordinaten des Aufpunktes und des Elektrons sowie der Differentialquotienten der letzteren sind. Die mechanischen auf das Elektron wirkenden Kräfte sind dann durch eine einfach auszuführende Integration über Volumen und Oberfläche desselben zu gewinnen. Ihre Werthe sind speziell unter Vernachlässigung von $1/\mathfrak{B}^3$ näher ausgerechnet. Sie lassen sich noch unter einer anderen Voraussetzung einfach gestalten, wenn man nämlich annimmt, daß sich das Elektron nur wenig von dem Zustand, gleichförmiger Rotation um eine feste Achse bei ruhendem Mittelpunkt, entfernt. In diesem Falle werden die Bewegungsgleichungen lineare Differentialgleichungen mit constanten Coeffizienten, aber von unendlich hoher Ordnung. Nebenbei ergeben sich hier die Rotationsgleichungen eines Elektrons mit fixem Mittelpunkt ohne jede Vernachlässigung. — Die Schwingungen um den angegebenen stationären Zustand zerfallen in 2 Classen. Bei der ersten bleibt der Mittelpunkt in Ruhe, und es führt die Rotationsaxe des Elektrons eine Praezessionsbewegung um ihre Anfangslage aus, während gleichzeitig die Rotationsgeschwindigkeit Variationen unterworfen ist. Bei der zweiten Classe dagegen bleibt die Rotationsaxe und Rotationsgeschwindigkeit unverändert und der Mittelpunkt des Elektrons vollführt Kreisschwingungen in einer Ebene normal zur Drehaxe und geradlinige Schwingungen parallel derselben. Alle diese Bewegungen sind gedämpfte. Dämpfungsconstante und Periode bestimmen sich aus gewissen transzendenten Gleichungen, von denen gezeigt wird, daß sie, wie es der Dämpfung der Bewegungen entspricht, keine Wurzeln mit negativ reellem Theil besitzen, daß sie aber unendlich viele Wurzeln mit positiv reellem Theil haben.

I.

Herleitung der Grundgleichungen aus dem Hamiltonschen Prinzip.

Im Felde befinde sich ein Elektron mit einer homogenen elektrischen Volumenladung der Dichte ϱ begabt. Seine Lage soll

auf ein im Aether fixes Rechtssystem (X, Y, Z) bezogen werden, und zwar seien a, b, c die Coordinaten eines bestimmt gewählten im Elektron fixen Punktes und p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten des Elektrons um die Achsen (X, Y, Z). Die Geschwindigkeit des Punktes (x, y, z) ist also:

$$1) \qquad \begin{aligned} \xi &= u + qz - ry \\ \eta &= v + rx - pz \\ \zeta &= w + py - qx \end{aligned}$$

wenn:

$$2) \qquad u = \frac{da}{dt},\ v = \frac{db}{dt},\ w = \frac{dc}{dt}$$

gesetzt wird.

Der Aether andrerseits sei einer im übrigen unbekannten Bewegung fähig, die in jedem Punkt durch die drei Größen f, g, h charakterisiert sei, welche die generalisierten Coordinaten des Aethers darstellen. Nunmehr soll festgesetzt werden, daß die potentielle Energie des Aethers gemessen werde durch:

$$3) \qquad \Phi = 2\pi \mathfrak{M}^2 \int (f^2 + g^2 + h^2)\, d\tau,$$

während die kinetische Energie der ganzen aus Elektron und Aether bestehenden Systemes ausgedrückt sei durch:

$$4) \qquad \Psi = \frac{1}{2} \int\int \frac{ll' + mm' + nn'}{\Delta}\, d\tau\, d\tau'.$$

Hier bezeichnet Δ die Entfernung der Volumelemente $d\tau$ und $d\tau'$ von einander und es ist gesetzt:

$$5) \qquad l = \varrho\xi + \frac{\partial f}{\partial t},\quad m = \varrho\eta + \frac{\partial g}{\partial t},\quad n = \varrho\zeta + \frac{\partial h}{\partial t}.$$

Es ist hervorzuheben, daß hier Ψ eine homogene quadratische Function der sämmtlichen Geschwindigkeiten ist, deren Coeffizienten bloß von der Lage des Elektrons abhängen, und daher die Aetherbewegung als cyclische bezeichnet werden darf.

Die Coordinaten (f, g, h) derselben sollen aber nicht unabhängig sein, sondern untereinander und mit denen des Elektrons verknüpft sein durch die Bedingung:

$$6) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = \begin{cases} \varrho \text{ innerhalb d. Elektrons} \\ 0 \text{ außerhalb} \quad \text{„} \end{cases}.$$

Dies zieht zwischen (l, m, n) die Beziehung nach sich:

$$7) \qquad \frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial m}{\partial y} + \frac{\partial n}{\partial z} = 0.$$

Endlich soll nun die Bewegung des ganzen Systemes so vor sich gehen, daß:

$$8) \qquad 0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} (\Phi + \Psi + E)\, d\tau + \int_{t_0}^{t_1} \delta A\, dt$$

ist, bei jeder der wirklichen Bewegung benachbarten, die den Anfangs- und Endzustand mit ihr gemein hat. Hier stellt ferner E die Kinetische Energie einer etwaigen ponderablen Masse des Elektrons dar, und:

$$0) \qquad \delta A = X\delta a + Y\delta b + Z\delta c + L\delta\alpha + M\delta\beta + N\delta\gamma$$

ist die von den äußeren Kräften bei einer Parallelverschiebung $(\delta a, \delta b, \delta c)$ und einer Verdrehung $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$ des Elektrons geleistete Arbeit.

Diese Variation soll nun zunächst ausgeführt werden. Es ergeben sich hierbei die Gleichungen für die Aetherbewegung und die auf das Elektron wirkenden Translationskräfte (X, Y, Z) in Uebereinstimmung mit den von Lorentz[1]) angegebenen Ausdrücken. Die Drekräfte (L, M, N) sind jedoch andere, sie stimmen mit den aus den Translationskräften durch Momentenbildung hervorgehenden Werthen überein, was bei Lorentz nicht der Fall ist.

Die Variation der Bewegung soll dadurch definiert werden, daß man, um das Elektron aus die Lage L zur Zeit t bei der wirklichen Bewegung in die Lage L' zur selben Zeit t bei der variierten Bewegung überzuführen, es um $(\delta a, \delta b, \delta c)$ parallel zu verschieben und um $(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$ um die Coordinatenachsen zu drehen hat.

Ein bestimmter Punkt (x, y, z) des Elektrons ist also gegen die gleichzeitige Lage bei der wirklichen Bewegung verschoben um:

$$10) \qquad \begin{aligned} \delta x &= \delta a + z\delta\beta - y\delta\gamma \\ \delta y &= \delta b + x\delta\gamma - z\delta\alpha \\ \delta z &= \delta c + y\delta\alpha - x\delta\beta. \end{aligned}$$

Die Aenderung der Geschwindigkeit des Elektrons an derselben Stelle (x, y, z) des Raumes ist für die X-Componente:

$$\delta\xi = \frac{d\delta x}{dt} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\xi}{\partial y}\delta y - \frac{\partial\xi}{\partial z}\delta z,$$

wenn fortan:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \xi\frac{\partial}{\partial x} + \eta\frac{\partial}{\partial y} + \zeta\frac{\partial}{\partial z}$$

verstanden wird.

1) La Théorie de Maxwell. Arch. néer. T. 25.

Ausgerechnet giebt dies:

$$\delta\xi = \frac{d\delta x}{dt} + r\delta y - q\delta z = \frac{D\delta x}{Dt}$$

11) $$\delta\eta = \frac{d\delta y}{dt} + p\delta z - r\delta x = \frac{D\delta y}{Dt}$$

$$\delta\zeta = \frac{d\delta z}{dt} + q\delta x - p\delta y = \frac{D\delta z}{Dt}.$$

Es ist also $\frac{D}{Dt}$ die Aenderungsgeschwindigkeit eines Vectors, beurtheilt von einem mit dem Elektron starr verbundenen Coordinatensysteme aus. Es erübrigt noch (f, g, h) so zu variieren, daß die Bedingung 6) unverletzt bleibt. Nun besteht offenbar die Variation der Massenvertheilung ϱ bloß in einer Schichte welche mit der Dichte

12) $$\varrho\delta n = \varrho\,(\delta x \cos nx + \delta y \cos ny + \delta z \cos nz)$$

(n .. äußere Normale)

die Oberfläche $\mathfrak{Q}$ des Elektrons überdeckt. Daher sind $\delta f, \delta g, \delta h$ der Bedingung unterworfen im Innen- und Außenraum des Elektrons sammt ihren ersten Ableitungen stetig zu sein und die Gleichung zu erfüllen:

13) $$\frac{\partial\delta f}{\partial x} + \frac{\partial\delta g}{\partial y} + \frac{\partial\delta h}{\partial z} = 0.$$

An der Oberfläche $\mathfrak{Q}$ des Elektrons aber so unstetig zu sein, daß:

14) $$\begin{aligned}&(\delta f \cos nx + \delta g \cos ny + \delta h \cos nz) \text{ außen}\\ &-(\delta f \cos nx + \delta g \cos ny + \delta h \cos nz) \text{ innen} = \varrho\delta n\end{aligned}$$

ist.

Bildet man daher:

$$\delta J = -\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{Q}} \frac{\varrho\delta n}{\Delta}\, d\omega$$

so sind die Größen:

$$\delta f' = \delta f - \frac{\partial\delta J}{\partial x}, \quad \delta g' = \delta g - \frac{\partial\delta J}{\partial y}, \quad \delta h' = \delta h - \frac{\partial\delta J}{\partial z}$$

überall, auch an $\mathfrak{Q}$ stetig, und es ist überdies im ganzen Raume

$$\frac{\partial\delta f'}{\partial x} + \frac{\partial\delta g'}{\partial y} + \frac{\partial\delta h'}{\partial z} = 0.$$

Daraus folgt in bekannter Weise, daß man haben muß:

$$14) \qquad \begin{aligned} \delta f &= \frac{\partial \delta J}{\partial x} + \frac{\partial \delta C}{\partial y} - \frac{\partial \delta B}{\partial z} \\ \delta g &= \frac{\partial \delta J}{\partial y} + \frac{\partial \delta A}{\partial z} - \frac{\partial \delta C}{\partial x} \\ \delta h &= \frac{\partial \delta J}{\partial z} + \frac{\partial \delta B}{\partial x} - \frac{\partial \delta A}{\partial y} \end{aligned}$$

worin jetzt $\delta A, \delta B, \delta C$ von der Stetigkeitsbedingung abgesehen ganz willkürlich sind. Trägt man jetzt diese Werthe in:

$$\delta \Phi = 4\pi \mathfrak{V}^2 \int (f \delta f + g \delta g + h \delta h)\, d\tau$$

ein, so folgt nach partieller Integration:

$$15) \quad \delta \Phi = 4\pi \mathfrak{V}^2 \int \left[\left(\frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) \delta A + \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) \delta B + \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \delta C \right] d\tau.$$

Infolge der Unstetigkeit von $\frac{\partial \delta J}{\partial n}$ an Ω tritt rechts noch das Glied $-4\pi \mathfrak{V}^2 \int_E \varrho \delta J\, d\tau$ hinzu, welches aber identisch Null ist.

Für $\delta \Psi$ hat man weiterhin:

$$\delta \Psi = \int\int \frac{l' \delta l + m' \delta m + n' \delta n}{\Delta} d\tau\, d\tau',$$

oder wenn:

$$16) \qquad R = \int \frac{l'\, d\tau}{\Delta} \quad S = \int \frac{m'\, d\tau'}{\Delta} \quad T = \int \frac{n'\, d\tau'}{\Delta}$$

gesetzt wird:

$$17) \qquad \delta \Psi = \int (R \delta l + S \delta m + T \delta n)\, d\tau.$$

Betrachtet man nun die Werthe von $\delta l, \delta m, \delta n$ wie sie aus 5) folgen so erkennt man daß sich $\delta \Psi$ additiv zusammensetzt aus den drei Bestandtheilen:

$$\delta_1 \Psi = \int_R \left(R \frac{\partial \delta f}{\partial t} + S \frac{\partial \delta g}{\partial t} + T \frac{\partial \delta h}{\partial t} \right) d\tau,$$

$$18) \qquad \delta_2 \Psi = \int_E (R \delta \xi + S \delta \eta + T \delta \zeta)\, d\tau,$$

$$\delta_3 \Psi = \int_\Omega (R \xi + S \eta + T \zeta)\, \varrho \delta n\, d\omega = \int_\Omega P \varrho \delta n\, d\omega,$$

worin $\int_R$ und $\int_E$ eine Integration über den ganzen Raum R bezw. über das Volumen E des Elektrons anzeigen.

Nun sind noch $\int_{t_0}^{t_1} \delta_1 \Psi dt$ und $\int_{t_0}^{t_1} \delta_2 \Psi dt$ so umzuformen, daß die zeitlichen Differentialquotienten der Variationen darin nicht mehr auftreten. Zunächst ist unmittelbar:

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta_1 \Psi dt = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_R \left(\frac{\partial R}{\partial t} \delta f + \frac{\partial S}{\partial t} \delta g + \frac{\partial T}{\partial t} \delta h \right) d\tau.$$

(Wegen der Unstetigkeit von δf, δg, δh an Ω bedürfte dies einer strengeren Begründung, welche aber das obige Resultat wiederfinden läßt.) Setzt man noch die Werthe von δf, δg, δh ein, integriert partiell nach x, y, z und bemerkt, daß aus 7) folgt:

$$19) \qquad \frac{\partial R}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

so ergibt sich:

$$20) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta_1 \Psi dt = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_R \left(\frac{\partial U}{\partial t} \delta A + \frac{\partial V}{\partial t} \delta B + \frac{\partial W}{\partial t} \delta C \right) d\tau,$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$21) \quad U = \frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial S}{\partial z}, \quad V = \frac{\partial R}{\partial z} - \frac{\partial T}{\partial x}, \quad W = \frac{\partial S}{\partial x} - \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Bei der partiellen Integration von $\int_{t_0}^{t_1} \delta_2 \Psi dt$ hat man zu beachten, daß hier $\frac{d}{dt}$ statt $\frac{\partial}{\partial t}$ auftritt und daß zweitens das Integrationsgebiet E nach (x, y, z) auch von t abhängt. Man findet leicht, daß unter diesen Voraussetzungen die Gleichung gilt:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt \int_E F \frac{dG}{dt} d\tau = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_E G \frac{dF}{dt} d\tau + \left(\int_E FG \, d\tau \right)_{t_0}^{t_1}.$$

Und findet damit:

$$22) \quad \int_{t_0}^{t_1} \delta_2 \Psi dt = -\int_{t_0}^{t_1} dt \int_E \left(\frac{DR}{Dt} \delta x + \frac{DS}{Dt} \delta y + \frac{DT}{Dt} \delta z \right) \varrho d\tau.$$

Vereinigt man jetzt alle gefundenen Terme, so erhält man für die Gesammtvariation:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}(\Phi+\Psi)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}dt\int_R d\tau\left\{\left[4\pi\mathfrak{V}^2\left(\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z}\right)-\frac{\partial U}{\partial t}\right]\delta A\right.$$

$$23)\quad\left.+\left[4\pi\mathfrak{V}^2\left(\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x}\right)-\frac{\partial V}{\partial t}\right]\delta B+\left[4\pi\mathfrak{V}^2\left(\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}\right)-\frac{\partial W}{\partial t}\right]\delta C\right\}$$

$$-\int_{t_0}^{t_1}dt\int_E\varrho d\tau\left(\frac{DR}{Dt}\delta x+\frac{DS}{Dt}\delta y+\frac{DT}{Dt}\delta z\right)+\int_{t_0}^{t_1}dt\int_\Omega P\varrho\delta n\,d\omega.$$

Mit Rücksicht auf 8) hat man also zunächst:

$$24)\qquad\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}^2}\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial h}{\partial y}-\frac{\partial g}{\partial z},\quad\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}^2}\frac{\partial V}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial z}-\frac{\partial h}{\partial x},\quad\frac{1}{4\pi\mathfrak{V}^2}\frac{\partial W}{\partial t}=\frac{\partial g}{\partial x}-\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen des Aethers. Nimmt man ferner $E=0$, also ein Elektron ohne ponderable Masse an, so folgt aus 8), 9) und 23):

$$25)\qquad\begin{aligned}X&=\int_E\varrho\frac{DR}{Dt}d\tau-\int_\Omega\varrho P\cos nx\,d\omega\\ Y&=\int_E\varrho\frac{DS}{Dt}d\tau-\int_\Omega\varrho P\cos ny\,d\omega\\ Z&=\int_E\varrho\frac{DT}{Dt}d\tau-\int_\Omega\varrho P\cos nz\,d\omega\\ L&=\int_E\varrho\left(y\frac{DT}{Dt}-z\frac{DS}{Dt}\right)d\tau-\int_\Omega\varrho P(y\cos nz-z\cos ny)\,d\omega\\ M&=\int_E\varrho\left(z\frac{DR}{Dt}-x\frac{DT}{Dt}\right)d\tau-\int_\Omega\varrho P(z\cos nx-x\cos nz)\,d\omega\\ N&=\int_E\varrho\left(x\frac{DS}{Dt}-y\frac{DR}{Dt}\right)d\tau-\int_\Omega\varrho P(x\cos ny-y\cos nx)\,d\omega.\end{aligned}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen des Elektrons. Man kann nun die f, g, h eliminieren, so daß in diesen Gleichungen bloß u, v, w, p, q, r auftreten, wenn man in bekannter Weise[1]) die vier retardierten Potentiale F, G, H, φ einführt durch die Gleichungen:

---

1) H. Poincaré, Electricité et optique. 1901. no. 356.

$$\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \Delta F + 4\pi\varrho\xi, \quad \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = \Delta G + 4\pi\varrho\eta,$$

26) $$\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \Delta H + 4\pi\varrho\zeta, \quad \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \Delta\varphi + 4\pi\varrho,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = 0.$$

Diese Functionen hängen also bloß von der Bewegung des Elektrons ab. Bestimmt man jetzt noch ψ aus: $\Delta\psi + 4\pi\varrho = 0$ und setzt:

26a) $$\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\chi = \int^t (\varphi - \psi)\, dt,$$

so drücken sich die früher benutzten Größen durch diese neuen folgendermaßen aus:

27) $$R = F + \frac{\partial\chi}{\partial x}, \quad 4\pi f = -\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad U = \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial G}{\partial z},$$

und analog die auf die $\mathfrak{Y}$- und $\mathfrak{Z}$-Richtung sich beziehenden Componenten. Eine kleine Rechnung zeigt ferner daß die an dem Elektron angreifenden Kräfte in den eben eingeführten Größen ausgedrückt einfach dadurch zu erhalten sind, daß man in ihren Ausdrücken 25) bezw. F, G, H statt R, S, T schreibt und P ersetzt durch die neue Größe:

28) $$\mathfrak{P} = F\xi + G\eta + H\zeta - \mathfrak{B}^2\varphi.$$

Speziell möge nunmehr angenommen werden, es handle sich um ein kugelförmiges Elektron. Dann werde der Anfangspunkt des Cooordinatensystemes in den Kugelmittelpunkt verlegt, dadurch fallen die Oberflächenintegrale in den Ausdrücken für die Drehkräfte weg. Man kann dann noch weitergehend den Kräften eine etwas einfachere Gestalt ertheilen, wenn man folgende Bezeichnungen festlegt:

$$\mathfrak{X} = \int_E \varrho F d\tau, \quad \mathfrak{Y} = \int_E \varrho G d\tau, \quad \mathfrak{Z} = \int_E \varrho H d\tau,$$

28) $$\mathfrak{L} = \int_E \varrho(yH - zG)\, d\tau, \quad \mathfrak{M} = \int_E \varrho(zF - xH)\, d\tau,$$

$$\mathfrak{N} = \int_E \varrho(xG - yF)\, d\tau.$$

Mit ihrer Hülfe bringt man nämlich die Kräfte in die definitive Form:

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{d\mathfrak{X}}{dt} + r\mathfrak{Y} - q\mathfrak{Z} - \int_\Omega \mathfrak{P}\varrho \cos nx\, d\omega \\
Y &= \frac{d\mathfrak{Y}}{dt} + p\mathfrak{Z} - r\mathfrak{X} - \int_\Omega \mathfrak{P}\varrho \cos ny\, d\omega \\
Z &= \frac{d\mathfrak{Z}}{dt} + q\mathfrak{X} - p\mathfrak{Y} - \int_\Omega \mathfrak{P}\varrho \cos nz\, d\omega \\
L &= \frac{d\mathfrak{L}}{dt} + r\mathfrak{M} - q\mathfrak{N} \\
M &= \frac{d\mathfrak{M}}{dt} + p\mathfrak{N} - r\mathfrak{L} \\
N &= \frac{d\mathfrak{N}}{dt} + q\mathfrak{L} - p\mathfrak{M}.
\end{aligned}
\qquad 30)
$$

II.

Entwicklung der retardierten Potentiale F, G, H, φ.

Um nunmehr die F, G, H, φ zu bestimmen, hat man sich mit der Gleichung:

$$1) \qquad \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \Delta U + 4\pi s(x, y, z, t)$$

zu beschäftigen. Sind für $t = 0$ die Werthe $U = F(x, y, z)$ und $\frac{\partial U}{\partial t} = f(x, y, z)$ gegeben, so ist die Lösung bekanntlich:

$$2) \qquad U(x, y, z, t) = t \cdot M_1 + \frac{\partial}{\partial t}(tM_2) + \int f\left(x', y', z', t - \frac{r}{\mathfrak{V}}\right)\frac{d\tau'}{r},$$

wo M_1 und M_2 die Mittelwerthe von f bezw. F auf der Oberfläche einer mit dem Radius $\mathfrak{V}t$ um den Punkt (x, y, z) geschlagenen Kugel bedeuten und die Integration nach $d\tau'$ sich auf das Volumen derselben bezieht. War nun zu Anfang die Störung auf ein endliches Gebiet beschränkt, so werden nach Ablauf einer genügend langen Zeit M_1 und M_2 verschwinden, und die Integration nach $d\tau'$ über den ganzen Raum erstreckt werden können, wofern nur (x, y, z) im Endlichen bleibt und s nur im Endlichen von Null verschieden ist. Aus der Annahme eines räumlich begrenzten Anfangszustandes also folgt, daß U schließlich unabhängig von diesem das retardierte Potential der Massen s wird, der Vorgang daher

einseitig verläuft. Dieser Endzustand soll im folgenden stets als bereits eingetreten vorausgesetzt werden, es soll also sein:

$$3) \qquad U(x,y,z,t) = \int s\left(x',y',z',t-\frac{r}{\mathfrak{B}}\right)\frac{d\tau'}{r}.$$

Sei nun speziell bloß ein einziges, beliebig bewegtes Volumelement $d\tau$ von zeitlich veränderlicher Dichte $s(t)$ vorhanden, dann hat man obiger Formel zufolge zunächst jene Punkte (x', y', z') zu bestimmen, die zur Zeit $t-\frac{r}{\mathfrak{B}}$ innerhalb von $d\tau$ lagen, deren Entfernung Δ vom Aufpunkte (x, y, z) also bestimmt sein wird durch:

$$4) \qquad \Delta = r\left(t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta\right),$$

wenn $r(t)$ die jeweilige Entfernung des Elementes $d\tau$ vom Punkte (x, y, z) bezeichnet. Alle diese Punkte nun werden ein neues Volumelement $d\tau'$ erfüllen, dessen Größe man leicht findet zu:

$$5) \qquad d\tau' = \frac{d\tau}{1+\frac{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta}}.$$

Die Gleichung für U gibt dann:

$$6) \qquad U = \frac{s\left(t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta\right)}{\Delta}\,\frac{d\tau}{1+\frac{1}{\mathfrak{B}}\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta}}.$$

Nun folgt aber aus 4):

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_{t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta} = \frac{\frac{d\Delta}{dt}}{1-\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d\Delta}{dt}}$$

und damit ergibt sich für U:

$$7) \qquad U = \frac{s\left(t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta\right)}{\Delta}\left(1-\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{d\Delta}{dt}\right)d\tau.$$

Setzt man also:

$$8) \qquad t-\frac{1}{\mathfrak{B}}\Delta = T \quad \text{und} \quad \int^t \frac{s(t)}{r(t)}\,dt = \varphi(t),$$

so hat man:

$$9) \qquad U = \frac{d\varphi(T)}{dt} d\tau.$$

Für T aber gilt nach 4) die Beziehung:

$$10) \qquad T = t - \frac{1}{\mathfrak{B}} r(T).$$

Nach dem Lagrange'schen Reversionstheorem ist daher:

$$11) \qquad \varphi(T) = \varphi(t) + \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} [s(t) r^{n-1}(t)]$$

und also nach 9)

$$12) \qquad U = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n} \frac{d^n (s r^{n-1})}{dt^n} d\tau.$$

Hierdurch ist das retardierte Potentialexplizite durch die Beschleunigungen aller Ordnungen des Elementes $d\tau$ ausgedrückt.

Nunmehr ist es leicht, auch F, G, H, φ in ähnlicher Weise darzustellen. Zu diesem Zwecke beziehe man alles auf ein stets parallel zu sich selber fortbewegtes Coordinatensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkt des Elektrons festliegt, sich also mit den Geschwindigkeiten u, v, w fortbewegt. Es seien wieder p, q, r die Winkelgeschwindigkeiten des Elektrons um diese Achsen, (x', y', z') die Coordinaten eines Punktes innerhalb desselben und (x, y, z) jene des Aufpunktes.

Die Geschwindigkeit von (x', y', z') ist also:

$$13) \qquad \begin{aligned} \xi &= u + qz' - ry' \\ \eta &= v + rx' - pz' \\ \zeta &= w + py' - qx'. \end{aligned}$$

Nun kann man offenbar bei Berechnung der F, G, H, φ wegen der Kugelgestalt des Elektrons von seiner Rotation absehen und die genannten Größen einfach als die retardierten Potentiale einer mit der Geschwindigkeit (u, v, w) bewegten aber nicht rotierenden Kugel auffassen, diese jedesmal erfüllt gedacht mit einer Masse der Dichte $\varrho\xi$, $\varrho\eta$, $\varrho\zeta$, ϱ. In diesem Falle aber hat man zu setzen[1]):

---

1) Bei einem nicht kugelförmigen Elektron hätte man auf mitrotierende Achsen zu beziehen und $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - \Sigma\xi \frac{\partial}{\partial x}$ zu setzen.

$$14) \qquad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} - u\frac{\partial}{\partial x} - v\frac{\partial}{\partial y} - w\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} - \sum u\frac{\partial}{\partial x}.$$

Kehrt man jetzt noch die Reihenfolge der Differentiation und Integration um, so können F, G, H, φ in der Gestalt angesetzt werden:

$$15) \qquad \begin{aligned} F &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\frac{d^n}{dt^n}\int \rho\xi' R^{n-1}\,d\tau' \\ G &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\frac{d^n}{dt^n}\int \rho\eta' R^{n-1}\,d\tau' \\ H &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\frac{d^n}{dt^n}\int \rho\zeta' R^{n-1}\,d\tau' \\ \varphi &= \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\frac{d^n}{dt^n}\int \rho R^{n-1}\,d\tau' \end{aligned}$$

worin

$$R = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$$

sein soll und die Integration sich über das Volumen des Elektrons zu erstrecken hat. Die hier auftretenden vier Integrale können leicht ermittelt werden, und die Ausführung der diesbezüglichen Rechnung ergiebt folgende Werthe:

Ist

$$16) \qquad \sigma = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

die Entfernung des Aufpunktes vom Mittelpunkt des Elektrons so hat man:

$$17) \qquad \begin{aligned} &\int x' R^{n-1}\,d\tau' = x\,\Psi_n(\sigma), \quad \int y' R^{n-1}\,d\tau' = y\,\Psi_n(\sigma), \\ &\int z' R^{n-1}\,d\tau' = z\,\Psi_n(\sigma), \quad \int R^{n-1}\,d\tau' = \Phi_n(\sigma). \end{aligned}$$

Hierin setzen sich $\Phi_n(\sigma)$ und $\Psi_n(\sigma)$ aus zwei anderen Functionen:

$$18) \qquad \begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &= \frac{2\pi(a+\sigma)^{n+2}}{(n+1)(n+3)\sigma}\left(a - \frac{\sigma}{n+2}\right), \\ \psi_n(\sigma) &= \frac{2\pi(a+\sigma)^{n+2}}{(n+1)(n+3)(n+5)\sigma^3}\left[(a+\sigma)^3 - (n+5)\left(a^2+\frac{\sigma^2}{n+3}\right)\sigma\right], \end{aligned}$$

a ... Radius des Elektrons

in der Weise zusammen, daß:

$$19) \qquad \begin{aligned} \Phi_n(\sigma) &= \varphi_n(\sigma) + \varphi_n(-\sigma) \\ \Psi_n(\sigma) &= \psi_n(\sigma) + \psi_n(-\sigma) \end{aligned} \Big\} \text{ innerhalb des Elektrons}$$

$$\begin{aligned} \Phi_n(\sigma) &= \varphi_n(\sigma) + (-1)^{n+1}\varphi_n(-\sigma) \\ \Psi_n(\sigma) &= \psi_n(\sigma) + (-1)^{n+1}\psi_n(-\sigma) \end{aligned} \Big\} \text{ außerhalb des Elektrons ist.}$$

Versteht man jetzt unter $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n$ die n-malige Wiederholung des in der Klammer enthaltenen Differentiationsprozesses, so hat man also schließlich für die vier gesuchten Potentiale folgende Werthe:

$$20)\quad \begin{aligned} F &= \varrho\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{V}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n[u\,\Phi_n(\sigma)+(qz-ry)\,\Psi_n(\sigma)]\\ G &= \varrho\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{V}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n[v\,\Phi_n(\sigma)+(rx-pz)\,\Psi_n(\sigma)]\\ H &= \varrho\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{V}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n[w\,\Phi_n(\sigma)+(py-qx)\,\Psi_n(\sigma)]\\ \varphi &= \varrho\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{V}^n}\left(\frac{\partial}{\partial t}-\sum u\frac{\partial}{\partial x}\right)^n\Phi_n(\sigma). \end{aligned}$$

Zwischen ihnen besteht wie leicht zu erkennen die Beziehung:

$$21)\quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial G}{\partial y}+\frac{\partial H}{\partial z}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\sum u\frac{\partial\varphi}{\partial x}=0.$$

Somit sind die von einem beliebig bewegten Elektron erregten elektrischen und magnetischen Kräfte durch bloße Differentiationen in Reihenform zu erhalten.

Die Bestimmung der auf das Elektron wirkenden mechanischen Kräfte dagen erfordert noch eine Integration der Ausdrücke 20) über das Volumen und die Oberfläche des Elektrons. Da nun die einzelnen Glieder dieser Reihen ganze Functionen in (x, y, z) sind so ist dieselbe verhältnismäßig einfach auszuführen.

III.

Die ersten Glieder der Bewegungsgleichungen des Elektrons.

Unter Vernachlässigung der dritten Potenz von $1/\mathfrak{V}$ soll diese Ausrechnung jetzt wirklich geschehen. Man hat hiebei jedoch in φ bis $1/\mathfrak{V}^4$ incl. zugehen, da in $\mathfrak{P}$ das Glied $\mathfrak{V}^2\varphi$ auftritt. Die Ausführung der Differentiation in 20) gibt für den Innenraum des Elektrons:

$$F = 2\pi\varrho\left(a^2 - \frac{1}{3}\sigma^2\right)u + \frac{2\pi\varrho}{3}\left(a^2 - \frac{3}{5}\sigma^2\right)(qz - ry) - \frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{4\pi\varrho a^2}{3}u'$$
$$- \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{4\pi\varrho}{15}u(\sum ux)^2 + \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{2\pi\varrho}{3}\left(a^2 - \frac{1}{5}\sigma^2\right)(u\sum u^2 - u\sum u'x - 2u'\sum ux)$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{\pi\varrho}{2}\left(a^4 + \frac{2}{3}a^2\sigma^2 - \frac{1}{15}\sigma^4\right)u'' - \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{4\pi\varrho}{35}(qz - ry)(\sum ux)^2$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{2\pi\varrho}{15}\left(a^2 - \frac{3}{7}\sigma^2\right)[(qz - ry)(\sum u^2 - \sum u'x) + 2(qw - rv)\sum ux - 2(q'z - r'y)\sum ux]$$
$$- \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{\pi\varrho}{6}\left(a^4 - \frac{2}{5}a^2\sigma^2 + \frac{3}{35}\sigma^4\right)[(q''z - r''y) - 2(q'w - r'v) - (qw' - rv')],$$

$$\mathfrak{p} = 2\pi\varrho\left(a^2 - \frac{1}{3}\sigma^2\right) - \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{4\pi\varrho}{15}(\sum ux)^2 + \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{2\pi\varrho}{3}\left(a^2 - \frac{1}{5}\sigma^2\right)(\sum u^2 - \sum u'x)$$
$$- \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{4\pi\varrho a^2}{9}(3\sum uu' - \sum u''x)$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^4}\frac{2\pi}{5}\left(a^2 - \frac{1}{7}\sigma^2\right)\left[(\sum u^2)^2 - 2\sum u^2\sum u'x - 4\sum uu'\sum ux + (\sum u'x)^2 + \frac{4}{3}\sum ux\sum u''x\right]$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^4}\frac{\pi}{6}\left(a^4 + \frac{2}{5}a^2\sigma^2 - \frac{1}{35}\sigma^4\right)(3\sum u'^2 + 4\sum uu'' - \sum u'''x).$$

Hierin bedeutet $\sum$ eine Summation über die der x, y, z Achse entsprechenden Größen und G, H sind aus F durch cyclische Vertauschung von (u, v, w) (p, q, r) und (x, y, z) zu erhalten. Bei Bildung der Integrale $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{L}$, und $\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{P}\cos nx\, d\omega$ hat man darauf zu achten, die ganzen Functionen von x, y, z stets in Kugelfunctionen zu zerspalten, wodurch die Integration äußerst einfach wird. Man erhält auf diese Weise:

3)
$$\mathfrak{X} = \frac{32\pi^2\varrho^2a^5}{3.5}u - \frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{16\pi^2\varrho^2a^6}{3.3}u' + \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{32\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5}u\sum u^2$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{32\pi^2\varrho^2a^7}{5.7}u'' + \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}[(qw' - rv') + 2(q'w - r'v)],$$

4)
$$\mathfrak{L} = \frac{64\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.7}p + \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5.5.7}(2p\sum u^2 - u\sum pu)$$
$$+ \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}(v'w - w'v) - \frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^9}{3.5.7.9}p'',$$

$$\int_\Omega \mathfrak{P}\cos nx\,d\omega = \frac{32\pi^2\varrho^2a^5}{3.5}(rv-qw)+\frac{32\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5}u'$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{16\pi^2\varrho^2a^6}{3.3}(qw'-rv')-\frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{16\pi^2\varrho^2a^6}{3.3.3}u''+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{32\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5.5}\frac{d}{dt}u\sum u^2$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{112\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.5.7}\frac{d}{dt}u\sum p^2+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{32\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}u'''$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5.5}(rv-qw)\sum u^2+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5}(rv''-qw'')$$

$$-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}(vr''-wq'')$$

$$-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.5.7}[26p'\sum up+11p\sum u'p-4p\sum up'].$$

Daraus endlich folgen unmittelbar die mechanischen Kräfte

$$X = \frac{64\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5}u'-\frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{32\pi^2\varrho^2a^6}{3.3.3}u''+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}u'''$$

$$\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{128\pi^2\varrho^2a^5}{3.3.5.5}\frac{d}{dt}u\sum u^2+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.5.7}\frac{d}{dt}(2u\sum p^2-p\sum pu) \tag{6}$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}\frac{d}{dt}[(q'w-r'v)+2(qw'-rv')],$$

$$L = \frac{64\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.7}p'-\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^9}{3.5.7.9}p'''+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^9}{3.5.7.9}(qr''-rq'')$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{16\pi^2\varrho^2a^7}{3.5.7}\left[u\sum pu'-u'\sum pu+\frac{d}{dt}(v'w-vw')\right] \tag{7}$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{V}^2}\frac{64\pi^2\varrho^2a^7}{3.3.5.5.7}\left[(qw-rv)\sum pu+\frac{d}{dt}(2p\sum u^2-u\sum pu\right].$$

Eine aufmerksame Betrachtung dieser Ausdrücke lehrt, daß sie sich in die Form bringen lassen:

$$H = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial u}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial u'}-\frac{1}{\mathfrak{V}}\frac{32\pi^2\varrho^2a^6}{3.3.3}u'', \tag{8}$$

$$L = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p}-\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial H}{\partial p'}+r\left(\frac{\partial H}{\partial q}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial q'}\right)-q\left(\frac{\partial H}{\partial r}-\frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial r'}\right), \tag{9}$$

wenn man unter H die Function versteht:

$$H = \frac{32\pi^3\varrho^3a^5}{3.3.5}\sum u^2 + \frac{32\pi^3\varrho^3a^7}{3.3.5.7}\sum p^2 + \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{32\pi^3\varrho^3a^5}{3.3.5.5}(\sum u^2)^2$$

10) $$+\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{32\pi^3\varrho^3a^9}{3.5.7.9}\sum p'^2 + \frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{16\pi^3\varrho^3a^7}{3.5.7}[\sum u'(rv-qw) - 2\sum u'^2]$$

$$+\frac{1}{\mathfrak{B}^2}\frac{32\pi^3\varrho^3a^7}{3.3.5.5.7}[2\sum u^2\sum p^2 - (\sum pu)^2].$$

Demgemäß lassen sich die Bewegungsgleichungen in die eine Variationsgleichung zusammenziehen:

11) $$\int_{t_0}^{t_1}\left(\delta H + \delta A - \frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{32\pi^3\varrho^3a^6}{3.3.3}\sum u'\,\delta u\right)dt = 0.$$

Befremdlich erscheinen könnte hier das Glied $-\frac{1}{\mathfrak{B}}\frac{32\pi^3\varrho^3a^6}{3.3.3}u''$ in X, denn es ergiebt bei einem schwingenden Elektron ein unendliches Anwachsen der Amplitude, statt einer Dämpfung wie aus der Vorstellung der Energieausstrahlung zu erwarten wäre. Es liegt dies aber bloß an der Weglassung der höheren Differentialquotienten in den Bewegungsgleichungen, wie aus dem folgenden näher hervorgehen dürfte.

IV.

Kleine Schwingungen eines rotierenden Elektrons.

Von den Reihenentwicklungen 20) II soll nämlich noch eine zweite Anwendung auf den Fall gemacht werden, daß sich das Elektron nur wenig von dem Zustande der gleichförmigen Rotation um eine feste Achse bei ruhendem Mittelpunkt entfernt. Es sollen mithin u, v, w, sowie die Differentialquotienten von u, v, w, p, q, r als kleine Größen erster Ordnung betrachtet werden, während p, q, r selbst endliche Werthe besitzen mögen. Unter dieser Voraussetzung nun nimmt F die Gestalt an:

$$F = \varrho\,\Phi_0(\sigma)u + \varrho\,\Psi_0(\sigma)(qz - ry)$$

1) $$+\varrho\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\Big[\Phi_n(\sigma)u^{(n)} + \Psi_n(\sigma)(q^{(n)}z - r^{(n)}y + rv^{(n-1)} - qw^{(n-1)})$$

$$-\frac{1}{\sigma}\frac{d\Psi_n(\sigma)}{d\sigma}(qz - ry)\sum xu^{(n-1)}\Big],$$

und φ wird in gleicher Weise:

2) $$\varphi = \varrho\,\Phi_0(\sigma) - \varrho\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\frac{1}{\sigma}\frac{d\Phi_n(\sigma)}{d\sigma}\sum xu^{(n-1)}.$$

Durch Integration über das Volumen des Elektrons folgt hieraus

$$\mathfrak{X} = 4\pi\varrho^2 u \int_0^a \Phi_0(\sigma)\,\sigma^2\,d\sigma$$

3)
$$+ 4\pi\varrho^2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\left[u^{(n)}\int_0^a \Phi_n(\sigma)\,\sigma^2 d\sigma + \frac{1}{3}a^2\,\Psi_n(a)\,(rv^{(n-1)} - qw^{(n-0)})\right],$$

oder wenn man die Integrale über Φ_n und Ψ_n wirklich ausrechnet.

$$\mathfrak{X} = 2(2a)^5\pi^2\varrho^2\sum_0^\infty \frac{(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)\,n!\,\mathfrak{B}^n}\,u^{(n)}$$

3a)
$$-\frac{1}{3}(2a)^5\pi^2\varrho^2\sum_2^\infty \frac{(n-1)(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)\,n!\,\mathfrak{B}^n}(rv^{(n-1)} - qw^{(n-1)}).$$

Ebenso erhält man für $\mathfrak{L}$ nacheinander:

4)
$$\mathfrak{L} = \frac{8\pi\varrho^2}{3}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}p^{(n)}\int_0^a \Psi_n(\sigma)\,\sigma^4\,d\sigma,$$

4a)
$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{3}(2a)^7\pi^2\varrho^2\sum_0^\infty \frac{(n-1)(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)(n+7)\,n!\,\mathfrak{B}^n}\,p^{(n)}.$$

Für $\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{P}\,\varrho\cos nx\,d\omega$ ergibt sich schließlich:

$$\int_{\mathfrak{Q}} \mathfrak{P}\,\varrho\cos nx\,d\omega = \frac{4\pi a^2\varrho^2}{3}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\Big[\Phi_n(a)(rv^{(n)} - qw^{(n)})$$

5)
$$+ \Psi_n(a)\,\{r(pw^{(n)} - ru^{(n)}) - q(qu^{(n)} - pv^{(n)})\}$$

$$+\frac{2}{5}a\left(\frac{d\Psi_n(\sigma)}{d\sigma}\right)_a(p\textstyle\sum pu^{(n-1)} - 2\omega^2 u^{(n-1)}) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}\frac{u^{(n+1)}}{a^4}\left(\frac{d\Phi_{n+2}(\sigma)}{d\sigma}\right)_a\Big].$$

Hier ist gesetzt:

$$\omega^2 = p^2 + q^2 + r^2,$$

und das 3. Glied unter der Summe ist für $n = 0$ wegzulassen. Sammelt man jetzt die einzelnen Glieder in X so entsteht:

$$X = \frac{8\pi\varrho^2}{3}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}n^{(n+1)}\int_0^a \Phi_n(\sigma)\,\sigma^2\,d\sigma$$

6)
$$+\frac{4\pi\varrho^2}{3}\sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n!\,\mathfrak{B}^n}\Big[(rv^{(n)} - qw^{(n)})\Big(3\int_0^a \Phi_n(\sigma^2)\,\sigma^2 d\sigma - a^3\Phi_n(a) + a^3\Phi_n(a)$$

$$-\frac{2}{5}a^4\left(\frac{d\Psi_n(\sigma)}{d\sigma}\right)_a(p\textstyle\sum pu^{(n-1)} - 2\omega^2 u^{(n-1)})\Big].$$

Oder die Integrale über Φ_n und Ψ_n wieder ausgeführt; folgt für die Componente X der Translationskraft der Werth:

$$X = \frac{4\pi^3\varrho^2(2a)^5}{3}\sum_0^\infty \frac{(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)\,n!\,\mathfrak{B}^n}\,u^{(n+1)}$$

$$7) \qquad + \frac{2\pi^3\varrho^2(2a)^5}{3}\sum_2^\infty \frac{(n-1)(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)\,n!\,\mathfrak{B}^n}(qw^{(n)} - rv^{(n)})$$

$$+ \frac{\pi^3\varrho^2(2a)^5}{15}\sum_2^\infty \frac{(n-1)(n-3)(-2a)^n}{(n+1)(n+3)(n+5)\,n!\,\mathfrak{B}^n}(p\Sigma pu^{(n-1)} - 2\omega^2 u^{(n-1)}).$$

Das Drehmoment L folgt unmittelbar aus $\mathfrak{L}$:

$$8) \qquad L = -\frac{\pi^3\varrho^3(2a)^7}{3}\sum_0^\infty \frac{(n-1)(-2a)^n}{(n+2)(n+3)(n+5)(n+7n!\mathfrak{B}^n}\,(p^{(n+1)} + rq^{(n)} - qr^{(n)}).$$

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß dies zugleich der strenge Wert des Drehmomentes ist, für den Fall eines beliebig rotierenden Elektrons mit fixen Mittelpunkt.

Die Bewegungsgleichungen zur Bestimmung der unendlich kleinen Schwingungen um den Zustand gleichförmiger Rotation bei ruhendem Mittelpunkt sind nunmehr:

$$9) \qquad \begin{aligned} X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0, \\ L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0. \end{aligned}$$

Findet nun ursprünglich die Rotation um die Z-Achse mit der Geschwindigkeit ω statt, so wird man zur Integration von 9) den Ansatz machen:

$$10) \qquad \begin{aligned} x = ae^{\lambda t}, \quad y = be^{\lambda t}, \quad z = ce^{\lambda t}, \\ p = \alpha e^{\nu t}, \quad q = \beta e^{\nu t}, \quad r = \omega + \gamma e^{\nu t}. \end{aligned}$$

Bei Substitution dieser Ausdrücke in die Gleichungen 9) treten, wie man leicht übersieht, gewisse Functionen von λ und ν auf, welche zunächst zusammengestellt werden mögen. Es soll gesetzt werden:

$$\varphi(z) = z^3\sum_0^\infty \frac{1}{(n+2)(n+3)(n+5)}\frac{z^n}{n!}$$

$$11) \qquad \psi(z) = z\sum_2^\infty \frac{n-1}{(n+2)(n+3)(n+5)}\frac{z^n}{n!}$$

$$\chi(z) = \sum_2^\infty \frac{(n-1)(n-3)}{(n+1)(n+3)(n+5)}\frac{z^n}{n!} = \infty \qquad \frac{n-1}{3)(n+5)(n+7)}\frac{z^n}{n!}.$$

Diese Reihen lassen sich sofort summieren und man erhält:

$$\varphi(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{4}{z^2} + \frac{4}{z^3}\right)e^z + \frac{1}{3} + \frac{1}{z} - \frac{4}{z^3}$$

11a)
$$\psi(z) = \left(\frac{1}{z} - \frac{8}{z^2} + \frac{24}{z^3} - \frac{24}{z^4}\right)e^z + \frac{1}{30}z - \frac{1}{z} - \frac{4}{z^2} + \frac{24}{z^4}$$

$$\chi(z) \doteq \left(\frac{1}{z} - \frac{12}{z^2} + \frac{60}{z^3} - \frac{144}{z^4} + \frac{144}{z^5}\right)e^z - \frac{1}{5} - \frac{1}{z} + \frac{12}{z^3} - \frac{144}{z^4}.$$

Ebenso mögen auch gleich die Abkürzungen eingeführt werden:

12)
$$\lambda_0 = -\frac{2a\lambda}{\mathfrak{V}}, \quad \nu_0 = -\frac{2a\nu}{\mathfrak{V}}, \quad \varepsilon = \frac{a\omega}{\mathfrak{V}}.$$

Dies festgesetzt, nehmen jetzt die durch Eintragen von 10) in 9) zu gewinnenden Gleichungen folgende Gestalt an:

13)
$$\begin{aligned}
a\left[\varphi(\lambda_0) - \frac{2}{5}\varepsilon^2\chi(\lambda_0)\right] + b\varepsilon\psi(\lambda_0) &= 0\\
a\varepsilon\psi(\lambda_0) - b\left[\varphi(\lambda_0) - \frac{2}{5}\varepsilon^2\chi(\lambda_0)\right] &= 0\\
c\left[\varphi(\lambda_0) - \frac{1}{5}\varepsilon^2\chi(\lambda_0)\right] &= 0\\
a\nu_0\chi(\nu_0) - 2\beta\varepsilon\left[\chi(\nu_0) + \frac{1}{210}\nu_0^2\right] &= 0\\
2a\varepsilon\left[\chi(\nu_0) + \frac{1}{210}\nu_0^2\right] + \beta\nu_0\chi(\nu_0) &= 0\\
\gamma\chi(\nu_0) &= 0.
\end{aligned}$$

Aus ihnen folgen die vier verschiedenen Systeme von Lösungen:

14)
$$\begin{aligned}
&A)\ a = bi, \quad c = 0, && \frac{2}{5}\varepsilon^2\chi(\lambda_0) + i\varepsilon\psi(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) = 0,\\
&B)\ a = 0, \quad b = 0, \quad c \text{ beliebig}, && \frac{1}{5}\varepsilon^2\chi(\lambda_0) - \varphi(\lambda_0) = 0,\\
&C)\ \alpha = \beta i, \quad \gamma = 0, && 2\varepsilon = \frac{i\nu_0\chi(\nu_0)}{\chi(\nu_0) + \frac{1}{210}\nu_0^2},\\
&D)\ \alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad \gamma \text{ beliebig}, && \chi(\nu_0) = 0.
\end{aligned}$$

Es repräsentieren hiebei A) und B) Schwingungen des Elektron-Mittelpunktes, während die Rotation ungestört bleibt und gleichförmig mit der Geschwindigkeit ω um eine beständig sich selbst parallel bleibende Achse vor sich geht; und zwar im Besonderen:

A) eine Kreisschwingung mit fortwährend abnehmender Amplitude, in einer Ebene normal zur Drehaxe.

B) eine gedämpfte geradlinige Schwingung parallel zur Drehaxe[1]).

Es repräsentieren ferner C) und D) bloße Rotationsbewegungen des Elektrons, bei denen der Mittelpunkt desselben in Ruhe bleibt und zwar im besonderen:

C) eine Präzessionsbewegung der Drehaxe mit (im allgemeinen) beständig abnehmender Kegelöffnung,

D) eine gedämpft periodische Aenderung der Rotationsgeschwindigkeit, während die Drehaxe ihre Lage beibehält.

V.

Ueber die Wurzeln der Gleichungen 14).

Es muß noch gezeigt werden, daß alle diese Schwingungen wirklich gedämpft sind bezw. daß die Wurzeln λ_0, ν_0 der unter A)—D) enthaltenen Gleichungen keine negativ reellen Theile besitzen. Vorerst kann man sich leicht überzeugen, daß jede dieser Gleichungen überhaupt Wurzeln besitzt und zwar jede unendlich viele.

Die Gleichungen haben nämlich durchwegs die Form:

$$g_1(z)e^z + g_2(z) = 0, \tag{1}$$

wo $g_1(z)$ und $g_2(z)$ Polynome in z sind. Besäße eine solche Gleichung eine endliche Anzahl von Wurzeln, so müßte:

$$g_1(z)e^z + g_2(z) = e^{h(z)} \cdot g_3(z) \tag{2}$$

sein, wo $g_3(z)$ wieder ein Polynom in z ist, und $h(z)$ sich im Endlichen überall regulär verhält. Man hätte also, unter $r_1(z)$ und $r_2(z)$ gebrochen rationale Functionen von z verstanden, die identische Gleichung:

$$e^{h(z)} = r_1(z)e^z + r_2(z), \tag{3}$$

aus der folgt:

$$e^{\Re h(z)} = |r_1(z)e^z + r_2(z)| < |r_1(z)|\, e^{|z|} + |r_2(z)|.$$

Nun können aber stets M, n und R so gewählt werden, daß

$$|r_1(z)| < M|z|^n, \quad |r_2(z)| < M|z|^n, \quad \text{für } |z| > R$$

---

1) Die kleinste Wurzel der zugehörigen Gleichung B) ist bei Fortfall der Rotation ($\varepsilon = 0$), $\lambda_0 = 1.325 + 10.196\,i$.

wird, und es wäre also:

$$4) \qquad \Re h(z) < \lg M . |z|^n (1 + e^{|z|}), \quad |z| > R.$$

Da aber die durch $|z|$ dividierte rechte Seite für $|z| = \infty$ die Einheit zur Grenze hat, so kann A so bestimmt werden, daß

$$5) \qquad \Re h(z) < A|z|, \quad |z| > R.$$

Dann ist jedoch $h(z)$ nach der Hadamard'schen[1]) Erweiterung des Satzes von Cauchy (daß eine überall endliche Function eine Constante ist) eine lineare Function von z, und hiermit geht 2) über in:

$$6) \qquad g_1(z)e^z + g_2(z) = e^{\alpha z} g_3(z).$$

Ist nun $g_3(z)$ vom $m$ten Grade, so gibt dies $m+1$ mal differenziert:

$$G_1(z)e^z = G_2(z)e^{\alpha z},$$

und da $G_1(z)$ und $G_2(z)$ sicher nicht identisch verschwinden, so muß $\alpha = 1$ sein. Dies ist nach 6) nicht anders möglich, als wenn $g_3(z) \equiv 0$, was aber nicht der Fall sein sollte.

Um jetzt zu zeigen, daß die reellen Theile der Wurzeln nicht negativ sein können, kann man sich des folgenden Satzes bedienen: ist eine Function innerhalb eines Gebietes G der z-Ebene, regulär und eindeutig und durchläuft der Punkt $Z = X + Yi = f(z)$ auf der Z-Ebene eine gewisse geschlossene Curve C, wenn $z = x + yi$ die Contour von G durchläuft, so liegen innerhalb G so viele Wurzeln von $f(z) = 0$, als die Windungszahl der Curve C um den Punkt $z = 0$ beträgt. Der Beweis mag mit Hülfe dieses Satzes bloß für die Gleichung D)

$$7) \qquad \chi(z) = 0,$$

erbracht werden, während für die anderen Gleichungen bloß jene Eigenschaften der betreffenden Functionen kurz abgeleitet werden sollen, die den Beweis genau ebenso zu erbringen gestatten.

Als Gebiet G wird man, da die Wurzeln $z = x + yi$ von 7) conjugiert complex sind, die linke Hälfte der oberen z-Halbebene wählen, und sich diese begrenzt denken, durch zwei aus dem Nullpunkt beschriebene Kreisquadranten von sehr großem und sehr kleinem Radius R und r. Man hat dann also zu sehen, welchen Weg der Punkt $X + Yi = \chi(z)$ nimmt, wenn z die vier Begrenzungslinien von G durchläuft. Nimmt man erst $y = 0$ und läßt x von $-\infty$ bis 0 gehen, so wandert z auf der reellen Axe

1) E. Borel, Fonctions entières.

von $-\frac{1}{5}$ bis 0. Hätte nämlich $\chi'(x) = 0$ eine negative Wurzel, so müßte, da $e^{-x}x^5\chi'(x)$ für $x = 0$ sammt seinen ersten sechs Ableitungen verschwindet, auch der sechste Differentialquotient dieser Function eine negative Wurzel besitzen. Es ist aber:

$$8) \qquad \frac{d^6 e^{-x} x^5 \chi'(x)}{dx^6} = (x^4 - 24x^3 + 144^2 - 48x)\, e^{-x},$$

$\chi(x)$ wächst also im Intervall $-\infty < x < 0$ monoton von $-\frac{1}{5}$ bis 0. Setzt man jetzt $x = 0$ und läßt y von 0 nach $+\infty$ gehen, so ist hiebei stets:

$$9) \qquad \Re \frac{1}{i}\chi(z) = Y \geqq 0,$$

denn man kann $\chi(yi)$ in der Form darstellen:

$$10) \qquad \begin{aligned} \chi(yi) &= -\frac{1}{5} + M \sin(y-m) + 2i\, M \sin^2 \frac{y-m}{2}, \\ M &= \frac{1}{y} + \frac{12}{y^3} + \frac{144}{y^5}, \quad \operatorname{tg} m = \frac{144y - 12y^3}{144 - 60y^2 + y^4}. \end{aligned}$$

Läuft daher z auf der positiven y-Achse, so tritt Z niemals in die untere Halbebene ein. Auf dem Kreisquadranten vom Radius R endlich hat man beliebig nahe $\chi(z) = \frac{1}{5} - \frac{1}{z}$, und auf jenem vom Radius r ebenso $\chi(z) = -\frac{z^3}{210}$. Die Bilder der beiden sind also wieder Kreisbögen, die nicht in die untere Halbebene hineinreichen. Alles zusammenfassend, kann man den Schluß ziehen, daß der Punkt $Z = 0$ außerhalb der Curve C liegt, und keine Wurzel von 7) einen negativ reellen Theil hat. Die Gleichung besitzt auch keine rein imaginäre Wurzel, denn, ist $Y = 0$, so wird $X = -\frac{1}{5}$. Noch kann man hinzufügen, daß sie eine und nur eine reelle positive Wurzel hat; dies folgt aus der Betrachtung der Function $x^5\chi(x)$, deren sechste Ableitung $(= x(x^3 + 12x^2 + 24x - 24)e^x)$ bloß eine positive Wurzel besitzt.

Um dieselbe Methode auf die Gleichung C) anzuwenden, hat man sich vorher zu versichern, daß $\chi(z) + \frac{z^3}{210}$ keine Nullstelle in dem zu betrachtendem Gebiet besitzt. Dies gelingt genau wie oben. Weil aber die Gleichung 6) nicht mehr reelle Coeffizienten hat, wird man als Gebiet G die durch zwei Halbkreise in entsprechender Weise begrenzte linke z-Halbebene wählen. Nun hat

man aber für $z = yi$:

$$11)\quad \frac{iz\chi(z)}{\chi(z)+\frac{1}{210}z^3} = -y\frac{X^3+Y^3-\frac{1}{210}y^3X}{\left(X-\frac{1}{210}y^3\right)^2+Y^3}+\frac{1}{210}i\frac{y^3Y}{\left(X-\frac{1}{210}y^3\right)^2+Y^3},$$

woraus wegen, $Y \gtrless 0$ für $y \gtrless 0$ folgt, daß der Factor von i nie negativ wird. Damit läßt sich der Beweis wie früher führen. Eine reelle positive Wurzel kann nur für $\varepsilon = 0$ existieren, in diesem Falle aber gibt es wirklich eine, nämlich die oben erwähnte von $\chi(z) = 0$. Für gewisse Werthe von ε hat die Gleichung C) rein imaginäre Wurzeln. Sie sind bestimmt, durch $Y = 0$, welche Gleichung für $y = 2\eta$ in die beiden folgenden zerfällt:

$$12)\quad \begin{aligned} 1+\eta\ \mathrm{tg}\ \eta &= \frac{1}{3}\eta^3 \\ 1-\eta\ \mathrm{ctg}\ \eta &= \frac{1}{3}\eta^3, \end{aligned}$$

welche, wie leicht zu sehen, unendlich viele reelle Wurzeln haben. Die zugehörigen Werthe von ε ergeben sich, da $X = -\frac{1}{5}$ wird, zu:

$$13)\quad \varepsilon = \frac{a\omega}{\mathfrak{B}} = -\frac{2\eta}{1+\frac{2}{21}\eta}.$$

Bei Gleichung B) ist wieder das Verhalten der Function $\varphi(z)$ für reelle und rein imaginäre Werthe maßgebend. Daraus, daß hier:

$$14)\quad \frac{d^4x^4e^{-x}\varphi'(x)}{dx^4} = x(4-x)e^{-x} < 0, \quad \text{für } x < 0$$

ist, und die früheren Ableitungen alle für $x = 0$ verschwinden, kann man schließen, daß $\varphi(x)$ monoton von $\frac{1}{3}$ bis 0 abnimmt, wenn x von $-\infty$ bis 0 läuft. Für $z = yi$ hat man ferner:

$$15)\quad \begin{aligned} \varphi(yi) &= \frac{1}{3}-\frac{4+y^2}{y^3}\sin(y-n)-2i\frac{4+y^2}{y^3}\sin^2\frac{y-n}{2}, \\ \mathrm{tg}\,n &= \frac{4y}{4-y^2}, \end{aligned}$$

und es ist also $\Re\frac{1}{i}\varphi(yi) \gtrless 0$, je nachdem $y \lessgtr$ ist.

Dies, verbunden mit den analogen Eigenschaften von $\chi(\varepsilon)$ reicht natürlich hier wie dort zum Beweise aus. Eine rein imaginäre Wurzel könnte nur existieren, wenn gleichzeitig $y = n$, $y = m$ wäre, was unmöglich ist. Es kann dagegen eine reelle positive Wurzel auftreten. Dies ergibt in gleicher Weise wie früher eine Betrachtung der Function $x^5\left[\frac{1}{5}\varepsilon^2\chi(x) - \varphi(x)\right]$, deren erste 6 Ableitungen für $x = 0$ verschwinden. Der sechste Differentialquotient nämlich hat eine positive Wurzel, wenn $\varepsilon^2 > 5$ und keine solche, wenn $\varepsilon^2 \leqq 5$. Deshalb hat auch die Gleichung B) eine positiv reelle Wurzel für $\varepsilon^2 > 5$ und keine für $\varepsilon^2 \leqq 5$.

Ein wenig anders muß man bei Gleichung A) vorgehen, um das Zeichen des imaginären Theiles der linken Seite für $\varepsilon = yi$ zu finden. Setzt man:

$$16) \qquad f(\varepsilon, \varepsilon) = \varphi(\varepsilon) - \frac{2}{5}\varepsilon^2\chi(\varepsilon) - i\varepsilon\psi(\varepsilon),$$

so hat man gemäß dem von $\varphi(\varepsilon)$ bewiesenen sicher:

$$17) \qquad \Re\frac{1}{i}f(yi, 0) \lesseqgtr 0, \text{ je nachdem } y \gtreqless 0.$$

Wäre nun das Zeichen von $\Re\frac{1}{i}f(yi, \varepsilon)$ für $y = y_0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$ nicht mehr das entgegengesetzte von y_0, so müßte die in ε quadratische Gleichung:

$$\Re\frac{1}{i}f(y_0, \varepsilon) = 0$$

eine zwischen 0 und ε_0 gelegene reelle, einfache Wurzel ε besitzen. Die Discriminante dieser Gleichung ist aber:

$$18) \qquad \Delta = 5[\Re\psi(y_0 i)]^2 - 8\,\Re\frac{1}{i}\varphi(y_0 i)\,\Re\frac{1}{i}\chi(y_0 i),$$

und es besteht die leicht zu verifizierende Beziehung:

$$19) \qquad [\Re\psi(yi)]^2 = \Re\frac{1}{i}\varphi(yi)\,\Re\frac{1}{i}\chi(yi).$$

Es ist also:

$$20) \qquad \Delta = -3[\Re\psi(y_0 i)]^2 \lesseqgtr 0$$

und daher hat die Gleichung für ε, wenn nicht gerade $\Re\psi(y_0 i) = 0$ ist, überhaupt keine reelle Wurzel; ist aber $\Re\psi(y_0 i) = 0$, so tritt eine reelle Doppelwurzel auf, was dem obigen ebenfalls widerspricht. Somit ist also:

$$21) \qquad \Re\frac{1}{i}f(yi, \varepsilon)\begin{cases} < 0 & \text{für } y > 0 \\ > 0 & \text{für } y < 0. \end{cases}$$

Wählt man dann als Gebiet G die in entsprechender Weise begrenzte linke z-Halbebene, so läßt sich der Beweis wieder führen. Für eine etwa vorhandene reelle Wurzel müßte $\psi(z) = 0$ sein, was sich vermöge der Beziehungen:

$$\frac{d^6 x^4 \psi(x)}{dx^6} = x(x^3 + 10x + 18)e^x >, \quad \text{für} \quad x > 0,$$

$$\frac{d^5 x^5 e^{-x} \psi'(x)}{dx^5} = x^3\left(\frac{1}{30}x^3 - \frac{5}{6}x^2 + \frac{23}{3}x - 27\right)e^{-x} < 0, \quad \text{für} \quad x < 0,$$

als unmöglich herausstellt. Auch rein imaginäre Wurzeln können nicht auftreten.

Göttingen, im Oktober 1903.

Messungen der elektrischen Leitfähigkeit der freien Atmosphäre bei 4 Ballonfahrten.

Von

H. Gerdien.

Vorgelegt durch E. Wiechert in der Sitzung am 12. Dezember 1903.

Einleitung.

Die luftelektrische Forschung ist zur Zeit noch weit von der Lösung ihrer Hauptaufgaben entfernt: wir kennen noch nicht die Energiequellen, welche die Elektricitätsströmung in der Atmosphäre unterhalten, wir wissen von Intensität und Richtung dieser Strömung über dem größten Teil der Erdoberfläche noch nichts, und selbst die geringe Zahl der bisher vorliegenden Beobachtungsdaten kann zur Berechnung der Elektricitätsströmung wegen der Unsicherheit, die der bisherigen Methode der Leitfähigkeitsmessung anhaftet, nicht benutzt werden. In welchem Zusammenhange der an dem Zerstreuungskörper des Elster-Geitel'schen Zerstreuungsapparats[1]) beobachtete Elektricitätsverlust mit den wichtigsten für den elektrischen Zustand der Luft charakteristischen Größen — specifische Ionenzahl und specifische Ionengeschwindigkeit — steht, ist noch nicht aufgeklärt; eine solche Aufklärung würde auch nur denjenigen Teil der Zerstreuungsmessungen quantitativ verwerten lassen, die mit Messungen der Windgeschwindigkeit verbunden wurden. So ist leider das ganze mit dem Zerstreuungsapparat in der freien Atmosphäre gesammelte, qualitativ so äußerst wertvolle Beobachtungsmaterial, quantitativ vorerst nicht verwertbar.

---

1) J. Elster und H. Geitel, Ueber einen Apparat zur Messung der Elektricitätszerstreuung in der Luft. Phys. Z. S. 1. S. 11—14, 1899.

Mit der Konstruktion des Aspirationsapparates zur Messung des Ionengehalts in der Luft durch H. Ebert[1]), ist nun die Erforschung der Leitfähigkeit aus dem Stadium rein qualitativer Versuche in dasjenige der quantitativen Messungen hinübergeleitet worden — die Einführung des Aspirationsverfahrens in die luftelektrische Meßtechnik ist von ähnlich weittragender Bedeutung für dieses Gebiet, wie der Uebergang vom Induktorium zur Hochspannungsbatterie es für die Erforschung der Elektricitätsleitung in Gasen war. Der Ebert'sche Aspirationsapperat liefert quantitativ gesondert den Gehalt an positiven und negativen Ionen in der Volumeneinheit; er würde die Leitfähigkeit $\lambda = \varepsilon\ (v_p n_p + v_n n_n)$ (ε Ladung des einzelnen Ions, v_p, v_n spec. Ionengeschwindigkeit = Geschwindigkeit bezogen auf die Einheit der elektrischen Kraft, n_p, n_n specifische Ionenzahlen = Anzahl der positiven bezw. negativen Ionen in der Volumeneinheit) bei Voraussetzung nur einer Ionenart jedes Vorzeichens nur dann liefern, wenn es gestattet wäre, die specifischen Ionengeschwindigkeiten v_p und v_n in der Atmosphäre in gleicher Weise als bekannt zu betrachten wie das Elementarquantum der Ladung ε. E. Riecke[2]) hat darauf hingewiesen, daß es nicht statthaft erscheint, die in trockener und staubfreier Luft im Laboratorium gewonnenen Werte der specifischen Ionengeschwindigkeiten ohne weiteres in die atmosphärische Luft zu übertragen. Schon seit März dieses Jahres beschäftigte ich mich mit der Konstruktion eines transportabeln Apparates, der es gestatten sollte, in exakter Weise die Leitfähigkeit und wenn möglich die spezifische Ionenzahl und Ionengeschwindigkeit getrennt zu messen. Die Prinzipien, die mich bei der Ausarbeitung der Methode leiteten sowie die ersten mit diesem Apparate erhaltenen Resultate sind in einer Mitteilung an die Physik. Zeitschft.[3]) vom 1. September dieses Jahres enthalten.

Der Apparat stellt sich als eine Modifikation des Ebert'schen Aspirationsapparates dar, die es gestattet, den inneren Körper des Cylinderkondensators in meßbarer Weise auf so kleine Spannungen zu laden, daß bei der vom Aspirator gelieferten Luft-

---

1) H. Ebert, Aspirationsapparat zur Bestimmung des Ionengehaltes der Atmosphäre, Phys. Ztschrft. 2. S. 662–664. 1901.

2) E. Riecke, Neuere Anschauungen der Elektricitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelektricität. Denkschrift der Kommission für Luftelektrische Forschungen, München 1903. S. 25.

3) H. Gerdien, Die absolute Messung der elektrischen Leitfähigkeit und der specifischen Ionengeschwindigkeit in der Atmosphäre, Phys. Ztschr. 4. S. 632–635. 1903.

geschwindigkeit der hindurchgesaugten Luftmenge im Cylinderkondensator nicht alle Ionen entzogen werden, sondern nur ein Bruchteil. Die notwendige niedrige Spannung wird durch Vergrößerung der Kapazität des vorher geladenen Leitersystems hergestellt; hierzu ist oberhalb des Elektrometers des Ebert'schen Apparates an den Träger des inneren Rohres des Cylinderkondensators, (der, soweit er dem Luftstrom ausgesetzt ist, von einer dünnen Blattfeder gebildet wird), eine variable Kapazität angeschlossen. Diese besteht aus zwei Systemen konaxialer Röhren, von denen das mit dem Elektrometer verbundene auf einer vor Staub gut geschützten und getrockneten Bernsteinstütze isoliert befestigt ist, während das andere System parallel zur gemeinsamen Achse der Röhren zwischen verstellbaren Anschlägen in meßbarer Weise verschoben werden kann. Man ladet, und liest das Elektrometer ab, solange das System auf das Minimum der Kapazität eingestellt ist, hält dann während des Aspirationsprocesses die Kapazität auf einem Maximum und stellt zum Ablesen des Endwertes der Spannung wieder auf das Minimum ein. Vernachlässigt man die Abweichungen der Stromlinien der Luftströmung im Inneren des Cylinderkondensators von der Geraden, die durch den Träger hervorgeworfen werden sowie die gleichfalls durch diesen Träger bedingte Aenderung des elektrischen Feldes zwischen den Belegungen des Cylinderkondensators und die Molisierung und Regenerierung der Ionen in diesem, so gilt

$$\varepsilon . v_p n_p = \frac{\lg V_2' - \lg V_2''}{t_2} \cdot \frac{C_2}{\pi . 300} \cdot \frac{\lg \left(\frac{r_a}{r_i}\right)}{2 l}$$

und

$$v_p = \frac{\lg V_2' - \lg V_2''}{V_1' - V_1''} \frac{t_1}{t_2} \frac{C_2}{C_1} \frac{G_1 (r_a^2 - r_i^2)}{2 l} \lg \left(\frac{r_a}{r_i}\right),$$

wobei V_1' die Anfangsspannung V_1'' die Endspannung, G_1 die mittlere Luftgeschwindigkeit, t_1 die Dauer der Aspiration in Sekunden, C_1 die Kapazität des Apparates bei der Bestimmung der specifischen Ionenzahl, und V_2', V_2'', $t_2 G_2 C_2$ die entsprechenden Größen bei der Bestimmung der specifischen Ionengeschwindigkeit und des Aggregats $\varepsilon . v_p n_p$ bezeichnen.

Die Bestimmung von $\varepsilon . v_p n_p$ und $\varepsilon . v_n n_n$, deren Summe die Leitfähigkeit ergiebt, ist also unabhängig von der Luftgeschwindigkeit G_2, sofern diese nur so groß ist, daß bei den gegebenen Dimensionen des Apparates und der angewandten Spannung nicht alle Ionen der durchgesaugten Luftmenge entzogen werden.

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn

$$G_2 > \frac{4\, v_{p(n)}\, V_2' \,.\, l}{\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)\cdot(r_a^2 - r_i^2)}$$

ist; bei der Bestimmung des Ionengehalts muß hingegen die Bedingung

$$G_1 < \frac{4\, v_{p(n)}\, V_1'' \,.\, l}{\lg\left(\frac{r_a}{r_i}\right)(r_a^2 - r_i^2)}$$

erfüllt sein. Die Konstanten des von mir benutzten Apparates waren folgende:

$$l = 50\text{ cm},\ r_a = 2{,}45\text{ cm},\ r_i = 0{,}515\text{ cm}$$
$$C_1 = 39{,}2\text{ cm},\ C_2 = 553{,}0\text{ cm}.$$

Die Fördermenge des Aspirators betrug 7,4 $\frac{\text{cdm}}{\text{sec.}}$ bei einem Umlauf des Federgehäuses des Aspirators in 40,0 sec. Während der Messungen muß dauernd die Umdrehungsgeschwindigkeit des Aspirators kontrolliert werden, da diese und mit ihr die Fördermenge mit abnehmender Dichte der Luft wächst und ferner bei sehr niedrigen Temperaturen infolge Eindickens des Schmieröls im Aspiratorlaufwerk abnehmen kann. Zur Ermittelung der Fördermenge für verschiedene Tourenzahlen des Aspirators bestimmt man diese zweckmäßig nach dem von Ebert angegebenen Verfahren [1]) außer bei normal aufgezogenem Laufwerk auch bei dauernd ganz aufgezogener und möglichst gleichmäßig durch Handdruck unterstützter und endlich bei dauernd nur ganz wenig aufgezogener Feder; aus den beobachteten Umlaufszeiten des Federgehäuses erhält man dann durch lineares Interpolieren die zugehörigen Fördermengen hinreichend genau.

Für die Messung der spec. Ionengeschwindigkeit ist es von großer Wichtigkeit, daß der Ionengehalt sich während der Beobachtungsreihen, die bei niedriger Spannung angestellt werden, nur so langsam ändert, daß es erlaubt ist, ihn als Mittel aus der vorangehenden und der folgenden Bestimmung zu berechnen; ist überhaupt nur eine zugehörige Messung des Ionengehalts möglich, so basiert die Berechnung der spec. Ionengeschwindigkeit auf der unkontrollierten Annahme, daß der Ionengehalt während der Messung wirklich konstant war. Ich war mir bei der Konstruktion meines

1) H. Ebert, Elektronen-Aspirationsapparat, Illustr. Aëron. Mittlgn. 1902. Heft 4.

Apparates sehr wohl dieser Unvollkommenheit der Methode bewußt, mußte aber aus äußeren Gründen von dem Bau eines ursprünglich geplanten Apparates, der von dieser Unsicherheit frei ist, vorerst Abstand nehmen. Wie nach den Arbeiten von Osborne Reynolds[1]) zu erwarten war, sind die über die Strömung der Luft durch den Cylinderkondensator gemachten Annahmen bei den benutzten Röhrendimensionen und Luftgeschwindigkeiten offenbar zutreffend. Ferner kann die Störung des Feldes durch den Träger des inneren Cylinders keine merklichen Fehler geben, da die im Zimmer (bei ungeändertem Ionengehalt) ausgeführten Messungen der specifischen Ionengeschwindigkeit Werte ergeben, die gut mit den nach anderen Methoden gewonnenen spec. Ionengeschwindigkeiten übereinstimmen; die über die Luftströmung gemachten Voraussetzungen werden auch durch die Arbeiten von H. Mache[2]) bestätigt.

Die Schwierigkeiten elektrischer Messungen im Freiballon, insbesondere die durch reibungselektrische Vorgänge beim Ballastsandwerfen erzeugten Ballonladungen hat H. Ebert[3]) eingehend untersucht. Die Messungen des Ionengehalts werden durch die nach dem Ballastgeben vorhandene positive Ballonladung insofern gefälscht, als diese Ladung den natürlichen Gehalt an positiven Ionen in der Umgebung des Ballons verringert, denjenigen an negativen vermehrt. Es stand natürlich zu erwarten, daß diese durch schnelle Aenderungen der Ballonladung, die bei notwendig werdendem Ballastgeben während der Messungen auftreten, hervorgerufenen künstlichen Aenderungen des Ionengehalts die Bestimmung der specifischen Ionengeschwindigkeit nahezu unmöglich machen würden, solange diese die Konstanz oder langsame Aenderung des Ionengehalts zur Voraussetzung haben. Es war daher auf Vorschlag von Herrn Dr. F. Linke dafür gesorgt worden, daß der Ballon merkliche Ladungen nicht erwerben konnte. Dieses geschah bei den beiden ersten Fahrten durch zeitweiliges Verspritzen von Wasser in äußerst feinen Strahlen mittelst einer mitgenommenen Spritze, bei der dritten und vierten Fahrt durch dauerndes Wirkenlassen eines dicht unter dem Boden des Ballon-

---

1) Osborne Reynolds, Phil. Trans. Roy. Soc. 1894.

2) H. Mache, Eine einfache Methode, die Geschwindigkeit von Gasionen zu bestimmen, welche weder hohes Molisierungs- noch Regenerierungsvermögen besitzen. Phys. Zschrft. 4. S. 717—721, 1903.

3) H. Ebert, Ueber elektrische Messungen im Luftballon, Beitr. z. Geoph. 6, S. 66—86. 1903.

korbes angebrachten Linke'schen Spritzkollektors[1]). Leider trat bei der dritten Fahrt durch Beschädigung des Kollektors und bei der vierten Fahrt durch Eisbildung in dem nicht genügend wasserfreien, zum Betriebe des Kollektors benutzten Alkohol schließlich ein Versagen der Entladungsvorrichtung ein.

Noch eine andere Störung luftelektrischer Messungen im Freiballon, die bisher unbeachtet geblieben ist, scheint mit der Benutzung des bei Hochfahrten üblichen äußerst feinem, scharf getrockneten Ballastsandes verbunden zu sein. Sobald der Ballon zu fallen beginnt und es notwendig wird, Ballast zu geben, wirbelt der vom Ballon überholte feine Sand nach oben; die ganze nähere Umgebung des Korbes ist in eine Sandwolke gehüllt und reichliche Mengen fallen in dem Korbe nieder. Wenn dann der Ballon infolge der Ballastausgabe wieder zu steigen beginnt, läßt er zwar schnell die Sandwolke unter sich, doch bemerkt man noch nach einigen Minuten, daß die Luft um den Korb herum von feinen Staubteilchen erfüllt ist. Notwendig muß durch die große Zahl fein verteilter fester Teilchen in der Luft zu Ionenadsorption Veranlassung gegeben werden, die geeignet ist, den natürlichen Ionengehalt in völlig unkontrollierbarer Weise herabzudrücken. Auch auf die Messung der specifischen Ionengeschwindigkeit muß die Ionenadsorption in störender Weise einwirken und sie hat offenbar, besonders bei der vierten Fahrt, einige Messungsreihen, während deren Vornahme Ballast gegeben werden mußte, leider wertlos gemacht. Es soll daher versuchsweise in Zukunft Ballast in flüssiger Form (Wasser, Salzlösung oder Alkohol) in solchen Quantitäten mitgenommen werden, daß es möglich ist, wenigstens die unmittelbar vor den elektrischen Messungen und während derselben benötigten Mengen in einer luftelektrisch unschädlichen Weise auszugeben. Von den Resultaten, die mit meinem Apparat gewonnen wurden, sind die von den beiden ersten Fahrten wohl am wenigsten durch die vom Ballastgeben herrührenden Störungen beeinträchtigt, da hier grober, feuchter Sand zur Verwendung kam; ebenso dürften diejenigen Messungen von der dritten und vierten Fahrt einwandfrei sein, die vorgenommen werden konnten, solange der Ballon ohne Ballastausgabe nach Erreichen der Prallhöhe längere Zeit eine stabile Höhenlage einhielt und gleichzeitig durch den noch wirksamen Kollektor etwa vorhandene Ballonladungen entfernt wurden.

1) F. Linke, Ueber Messungen von Potentialdifferenzen mittels Kollektoren unter besonderer Berücksichtigung von radioaktiven Substanzen. Phys. Zschft. 4, S. 661—664. 1903.

Die beiden ersten Fahrten wurden mit Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften von Göttingen aus unternommen, wobei auch besondere staatliche Mittel verwendet werden konnten, die durch Vermittelung von Herrn Geheimrat Riecke flüssig gemacht wurden.. Die Kosten der zweiten Ballonfahrt hatte in dankenswerter Weise Herr Prof. Nernst übernommen. Diese beiden ersten Fahrten konnten, da nur Leuchtgas zur Füllung des Ballons zur Verfügung stand, nur in geringe Höhe führen. Durch das Entgegenkommen von Herrn Geheimrat R. Assmann war es mir mit Unterstützung der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften ermöglicht, an zwei internationalen Ballonfahrten von Berlin aus teilzunehmen; es ist mir eine angenehme Pflicht, Herrn Geheimrat Assmann auch an dieser Stelle für die freundliche Unterstützung meiner Arbeiten meinen ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Resultate.

1. Ballonfahrt, 1.—2. Juli 1903. Ballonführer: Dr. F. Linke, Teilnehmer: Prof. Wiechert, H. Gerdien.

Abfahrt von Göttingen 1. Juli 1903, 6 h 58 min. p., Landung bei Butzbach (südlich von Gießen) 2. Juli 1903, 9 h 28 min. a. Die Fahrt fand statt im Centrum eines umfangreichen Hochdruckgebietes, das ganz Mitteleuropa überdeckte. In den unteren Schichten herrschte noch ziemlich starke Temperaturabnahme mit der Höhe, von etwa 1000—1700 m Meereshöhe lagerte darüber eine Dunstschicht (Mischungsschicht) mit geringer Temperaturabnahme und teilweiser Isothermie, darüber wurde wieder ein äußerst kleiner Temperaturgradient vorgefunden. In der Höhe von etwa 3000 m hat nach den Beobachtungen des Berliner aëronautischen Observatoriums[1]) sogar Isothermie bestanden.

Die Messungen des Ionengehalts waren während des ersten Teils der Fahrt (Nachtfahrt) durch die dauernd vorhandene, bald aufwärts bald abwärts gerichtete Vertikalbewegung des Ballons sehr erschwert, zumal ich wegen des äußerst kleinen Ionengehalts die einzelnen Beobachtungsreihen zum Teil über einen Zeitraum von 20 Minuten ausdehnen mußte, um überhaupt mit einiger Genauigkeit meßbare Spannungsabnahmen am Elektroskop zu erzielen. An eine Messung der specifischen Ionengeschwindigkeit konnte daher bei dauernd veränderlichem Ionengehalt nicht gedacht werden. Die gemessenen Werte der specifischen Ionenzahlen müssen als Mittelwerte für die vom Ballon durchschnittenen

1) Das Wetter, 1903. Heft 8.

Schichten gelten und sind zum Teil vorgenommen worden, während der Ballon in die Dunstschichten eindrang bezw. sie verließ. Erst als am Morgen des 2. Juli die Leuchtgasfüllung des Ballons infolge zunehmender Sonnenstrahlung langsam und stetig an Auftrieb gewann und ein dauerndes, gleichmäßiges Steigen des Ballons (ohne Ballastausgabe) bewirkte, konnten mit Erfolg auch Messungen der specifischen Ionengeschwindigkeit vorgenommen werden.

In die Tabelle sind nur diejenigen Werte der specifischen Ionenzahlen und Ionengeschwindigkeiten aufgenommen worden, die als merklich unbeeinflußt von den oben erörterten Störungen gelten können.

Zeit 1. Juli 1903	Höhe über dem Meere in Metern	Ionengehalt in elektrostatischen Einheiten pr. cbm	Spec. Ionengeschw. i. cm/sec. im Feld v. 1 Volt/cm	Rel. Feuchtigkeit	Bemerkgn.
$8^{30}\text{-}^{45}{}_{p}$	700-500-1000	+0,17		—	—
$11^{42}\text{-}12^{02}{}_{a}$ 2. Juli 1903	500-650	−0,16		60 %	—
$12^{33}{}_{a}\text{-}^{53}{}_{a}$	1250-1000	+0,22		60 %	Dunstschicht
$4^{33}{}_{a}\text{-}4^{48}{}_{a}$	1300-1400	+0,10		66 %	Dunstschicht
$5^{10}{}_{a}\text{-}^{25}{}_{a}$	1650-1800	−0,43		34 %	Ob. Rand d. Dunstsch.
$5^{48}{}_{a}\text{-}6^{03}{}_{a}$	1900-2000	+0,43		40 %	Ueber der Dunstsch.
$6^{04}{}_{a}\text{-}6^{19}{}_{a}$	2000-2100		+1,70	50 %	„
$6^{23}{}_{a}\text{-}6^{38}{}_{a}$	2100-2200	−1,08		60 %	„
$6^{39}{}_{a}\text{-}6^{54}{}_{a}$	2200-2250		−2,12	60 %	„
$7^{30}{}_{a}\text{-}7^{40}{}_{a}$	2400-2430	+0,57		—	Dunstsch. löst sich auf
$8^{05}{}_{a}\text{-}8^{10}{}_{a}$	2400	+0,86		44 %	„
$8^{14}{}_{a}\text{-}8^{19}{}_{a}$	2400	−1,09		—	„

Die Tabelle zeigt deutlich die Einwirkung vorhandener Adsorptionskerne auf die specifische Ionenzahl: während der Ionengehalt in der Dunstschicht sich nur auf etwa $^{2}/_{10}$ elektrostatische Einheiten im cbm erhebt, wächst er schon am oberen Rande der Dunstschicht auf etwa das Doppelte an, um dann über der Dunst-

schicht sogar etwa eine elektrostatische Einheit im cbm zu erreichen. Die Luft war auch hier noch merklich getrübt, offenbar lagerte über der unteren ziemlich dichten Dunstschicht noch eine zweite, erheblich weniger dichte. Bemerkenswert ist der über der dichten Dunstschicht gefundene Ueberschuß an negativen Ladungen, der wohl dem Umstande zuzuschreiben ist, daß in der oberen Grenze der Dunstschicht die während der Nacht unter der Wirkung des normalen Potentialgefälles eingewanderten positiven Ionen durch Adsorption festgelegt worden waren und daß so in dem über der Dunstschicht liegenden Bereich von geringerer Konzentration der Adsorptionskerne zur vorzugsweisen Ansammlung negativer Ionenladungen Anlaß gegeben werden mußte. Als die Dunstschicht sich in den Morgenstunden aufzulösen begann, nahm auch ihre Wirkung auf den Ionengehalt der darüber befindlichen Schichten ab: das Verhältnis der negativen und positiven Ionenladungen nähert sich mehr der Einheit. Die Ansammlung positiver Ladungen in der oberen Grenze der Schicht von Adsorptionskernen konnte durch die von Herrn Dr. Linke ausgeführten Messungen des Potentialgefälles [1]) bestätigt werden. Die beiden oberhalb der Dunstschicht erhaltenen Werte der specifischen Ionengeschwindigkeit zeigen das normale Verhältnis, die Geschwindigkeit der negativen Ionen ist größer als die der positiven; sie ergeben auf Atmosphärendruck reduziert 1,36 bezw. 1,48 cm²/sec. Volt. Der erste Wert stimmt recht gut mit den unter normalen Verhältnissen am Erdboden erhaltenen Zahlen [2]) überein, der zweite erscheint etwas zu klein, doch dürfte es nicht erlaubt sein in dieser Abweichung eine unmittelbare Einwirkung der Lufttrübung auf die specifische Ionengeschwindigkeit zu erblicken. Vielmehr dürfte diese Abweichung sich einfach aus einer unkontrollierbaren Aenderung des Ionengehalts während der mit geringer Spannung vorgenommenen Beobachtungsreihe erklären, die bei der Berechnung der specifischen Ionengeschwindigkeit nicht berücksichtigt werden konnte.

2. Ballonfahrt. Abfahrt von Göttingen: 2. August 1903, 10 h 50 min. a., Landung bei Güsten 2 h 20 min. p. Ballonführer: Dr. Linke, Teilnehmer: Prof. Wiechert, Prof. Nernst.

Die Fahrt fand unter äußeren Umständen statt, die für luftelektrische Messungen recht ungünstig sind; noch am Vortage der

1) Herr Dr. Linke wird über die Potentialgefälle-Messungen im Zusammenhang mit einer eingehenden Darstellung der meteorologischen Verhältnisse selbst berichten.

2) J. Stark, Die Elektrizität in Gasen, Leipzig 1902. S. 254 u. ff. (v_p = 1,36—1,37, v_n = 1,51—1,87).

Fahrt war regnerisches, stürmisches Wetter gewesen, sodaß die Fahrt, die schon für den 1. August geplant war, aufgeschoben werden mußte. Auch an den folgenden Tagen war vielfach stürmische Luftbewegung bemerkbar[1]). Die Ballonfahrt fand bei cyklonaler Wetterlage statt; in den unteren Schichten war der adiabatische Temperaturgradient schon am Vormittag ausgebildet, so daß sehr bald Cumulus-Bildung eintrat, der in größerer Höhe eine Altostratus Decke folgte. Der Ballon geriet zeitweise in eine Cumulus-Wolke hinein, auch wurde das Ende der Fahrt vorzeitig dadurch herbeigeführt, daß der mit Niederschlägen belastete Ballon in seinem Fall nicht mehr gehemmt werden konnte, und die Landung im absteigenden Luftstrom einer Regenböe erfolgen mußte.

Zeit 2. August 1903	Höhe über dem Meere in Metern	Ionengehalt in elektrostatischen Einheiten pr. cbm	Spec. Ionengeschw. i. cm/sec. im Feld v. 1 Volt/cm	Rel. Feuchtigkeit	Bemerkungen
12^{15}_{p}-12^{25}_{p}	2100-1660	+ 0,29		75 %	Cumulus unter dem Ballon ist verschwunden. Das Potentialgefälle schlägt von schwach positiven zu sehr großen negativen Werten um. 12^{16}_{p}
12^{27}_{p}-12^{37}_{p}	1660-1750		+ 1,25	75 %	
12^{41}_{p}-12^{51}_{p}	1650	− 0,29		76 %	
12^{52}_{p}-1^{02}_{p}	1420		− 1,03		

Die Messungen des Ionengehalts und der specifischen Ionengeschwindigkeit hatte Herr Prof. Wiechert übernommen.

Der Ionengehalt ergiebt sich nahezu von der gleichen Größe wie der bei der ersten Fahrt oberhalb der Dunstschicht vorgefundene; der Gleichheit der Werte für beide Vorzeichen ist keine besondere Bedeutung beizumessen, vielmehr wird infolge des lebhaften Wechsels zwischen Kondensation und Verdampfung der sich in der unmittelbaren Nachbarschaft des Ballons abspielte, wahrscheinlich der Ionengehalt außerordentlich schnell geschwankt haben. Natürlich haben die unter solchen Umständen gewonnenen specifischen Ionengeschwindigkeiten nur insofern Wert, als sie zeigen, daß auch in solchen Gebieten stürmischer Kondensation und Verdampfung die specifischen Ionengeschwindigkeiten nicht wesentlich von der Größenordnung der unter normalen Verhältnissen beobachteten Werte abweichen. Daß die specifische Ionengeschwindigkeit der positiven Ionen hier größer gefunden wurde als die der negativen, ist natürlich auch eine Folge der

1) In Berlin zerplatzte der Ballon „Meteor" des aëronautischen Observatoriums während der Vorbereitungen zur Abfahrt.

schnellen Aenderungen des Ionengehalts und hat keine principielle Bedeutung; die beiden hier angegebenen Werte für die specifische Ionengeschwindigkeit konnten ja nicht einmal auf Grund einer Interpolation des Ionengehalts berechnet werden, da für den Ionengehalt jedes Vorzeichens nur je eine Messung erhalten wurde. Weitere Messungsreihen wurden durch die oben erörterten äußeren Umstände, die zur schnellen Landung nötigten verhindert. Auch aus den Messungen des Potentialgefälles, die auch bei dieser Fahrt Herr Dr. Linke ausgeführt hat[1]), geht hervor, wie außerordentlich turbulente Vorgänge luftelektrischer Natur in Verbindung mit den Kondensations- und Verdampfungserscheinungen sich in der Nachbarschaft des Ballons abspielten — wurde doch ein plötzlicher Vorzeichenwechsel des elektrischen Feldes beobachtet, das anfangs kleine positive (normale) Werte zeigte und dann zu unmeßbar großen negativen Werten umschlug.

3. Ballonfahrt. Abfahrt von Berlin, Uebungsplatz des Luftschiffer-Bat., 1. Okt. 1903, 8 h 05 min. a. Landung bei Harmelsdorf, Kreis Dt. Krone (Westpreußen) 6 h 15 min. p. Ballonführer Dr. H. Elias, Teilnehmer H. Gerdien.

Seit mehreren Tagen stand Deutschland unter dem Einfluß einer sehr stabilen Wetterlage; hoher, gleichmäßig verteilter Druck, dessen Centrum über Südosteuropa lagerte, beherrschte die Witterung in Centraleuropa, während Depressionen ihre Lage nur über Westeuropa behaupten konnten. Noch am Morgen der Fahrt zeigte die Witterung die Charakteristika der stabilen Anticyklone, doch deuteten in den größten Höhen erscheinende Cirren den baldigen Eintritt eines Wetterumschlags an, der in der Tat durch Hereindringen einer Depression von Norden her am Tage der Fahrt eingeleitet wurde und am 2. Oktober mit Regen und Wind wirklich eintrat. Die Stabilität der Wetterlage in den letzten Septembertagen war begründet in dem Verlauf des vertikalen Temperaturgradienten[2]), wie er durch die Arbeiten des Berliner aëronautischen Observatoriums festgestellt wurde: in den untersten 500 m isothermer Verlauf und zeitweise vorhandene Temperaturumkehr, darüber eine äußerst kleine Temperaturabnahme bis 2000 m Höhe. Doch schon am 30. September rücken die Isothermenflächen einander näher und am 1. Oktober herrscht nur noch in den untersten Schichten Temperaturumkehr, die bei etwa 500 m Höhe durch eine Isothermie hindurch in eine ziemlich gleichmäßige,

1) Herr Dr. Linke wird über diese Messungen, sowie über die meteorologischen Verhältnisse selbst berichten.

2) Das Wetter. 1903, Heft 10.

sich schon dem adiabatischen Gleichgewicht nähernde, Temperaturabnahme übergeht. In Anbetracht der stabilen anticyklonalen Witterung der vorangegangenen Tage wird man auch für den 1. Ok-

Zeit	Höhe über dem Meere in Metern	Ionengehalt in elektrostatischen Einheiten pr. cbm	Spec. Ionengeschw. i. cm/sec. im Feld v. 1 Volt/cm	Rel. Feuchtigkeit	Bemerkungen
$8^{46}{}_{a}$-$^{56}{}_{a}$	2470	−0,35		24 %	Dunstschicht
$8^{57}{}_{a}$-$9^{07}{}_{a}$	2600	—	−2,70	89 %	„
9^{12}-$^{22}{}_{a}$	2600	+0,37	—	89 %	„
9^{23}-$^{33}{}_{a}$	2600	—	(+3,89)	89 %	Dunst wird schwächer
9^{37}-$^{47}{}_{a}$	2650	−0,44	—	85 %	Der Ballon schwimmt auf
9^{48}-$^{58}{}_{a}$	2600		−2,06	78 %	den Wogen der Dunstschicht
$10^{01}{}_{a}$-$10^{11}{}_{a}$	2530-2600	+0,35	—	86 %	Wieder im Dunst
10^{12}-$^{22}{}_{a}$	2600-2300	—	(+3,09)	86 %	Bisher kein Ballast verbraucht
$12^{04}{}_{p}$-^{16}	2300-2340	−0,41	—	66 %	Wenig Dunst
12^{17}-$^{27}{}_{p}$	2350	—	−2,03	62 %	„
12^{29}-$^{41}{}_{p}$	2360-2400	+0,31	—	61 %	„
12^{42}-$^{52}{}_{p}$	2400-2200	—	+1,93	68 %	Dunst
3^{15}-$^{23}{}_{p}$	3760-3790	−0,44	—	83 %	Der Dunst jetzt unter dem Ballon
3^{24}-$^{32}{}_{p}$	3800-3760	—	(−3,73)	83 %	Kollektor unbrauchbar!
3^{37}-$^{44}{}_{p}$	3770	+0,80	—	„	Ueber d. Ballon altocumuli, cirro-stratus
3^{47}-$^{55}{}_{p}$	3790	—	(+1,72)	„	„
4^{20}-$^{26}{}_{p}$	4180-4200	−0,56	—	90 %	Kollektor wieder wirksam
$4^{26\frac{1}{2}}$-$^{32\frac{1}{2}}{}_{p}$	4200-4230	—	−3,49	90 %	Kollektor versagt
4^{37}-$^{43}{}_{p}$	4250-4270	+0,31	—	—	Sand wirbelt in den Korb
4^{44}-$^{52}{}_{p}$	4280-4200	—	+3,23	—	„

tober noch schwach absteigende Luftbewegung in der Höhe annehmen dürfen. Daß der Ionengehalt selbst in der Maximalhöhe, die der Ballon erreichte, noch weit unter einer elektrostatischen Einheit im cbm blieb, ist wohl der Gegenwart von Adsorptionskernen zuzuschreiben, deren schichtenförmige Anordnung sie auch dem Auge des ungeübten Beobachters bemerkbar gemacht hätte, selbst wenn sie sich nicht in der vertikalen Verteilung der relativen Feuchtigkeit und durch merkliche Aenderungen der Windgeschwindigkeit verraten hätten.

Der am Morgen der Fahrt im Garten des aëronautischen Observatoriums gemessene Ionengehalt war infolge des auf der Erdoberfläche liegenden Nebels sehr klein; er betrug 0,09 elektrostatische Einheiten für die positiven und 0,06 für die negativen Ionen, zeigte also den am Erdboden normalen Ueberschuß an positiven Ionen.

Die beiden ersten Messungen des Ionengehalts zeigen noch einen geringen Ueberschuß an positiven Ionen, die nächsten 4 Messungen lassen den Einfluß der Dunstschicht erkennen, die vermutlich an ihrer oberen Grenze positive Ionen durch Adsorption gebunden hielt. Die Messungen in etwa 3770 m Höhe zeigen trotz des Versagens der Entladungsvorrichtung einen erheblichen Ueberschuß an positiven Ionen; vielleicht ist der Grund für diese Erscheinung in Ionenadsorption zu suchen, die während der Messung des Gehalts an negativen Ionen noch stärker wirksam war als während der 15 Minuten später vorgenommenen Messung des Gehalts an positiven Ionen, da unmittelbar vor der ersteren reichliche Ballastausgabe stattgefunden hatte. Die beiden letzten Messungen des Ionengehalts sind offenbar infolge einer vom Ballon erworbenen positiven Ladung gefälscht und wahrscheinlich beide infolge Ionenadsorption an dem im Korbe und seiner Umgebung herumwirbelnden Staub zu klein.

Die Versuche die spec. Ionengeschwindigkeit in der Dunstschicht oder in unmittelbarer Nähe derselben zu messen, haben in mehreren Fällen zu Werten geführt, die nach dem Gasdruckgesetz unwahrscheinlich sind. Auch die Messungen in etwa 3700 m Höhe sind wegen der reichlich erfolgten Ballastausgabe wahrscheinlich unbrauchbar. Die in der Maximalhöhe gewonnenen Zahlen zeigen die größere specifische Geschwindigkeit der negativen Ionen und ergeben auf Atmosphärendruck reduciert 2,01 bezw. 1,91, d. h. sie sind beide etwas größer[1]) als dem Gesetze der Proportionalität der specifischen Ionengeschwindigkeiten mit dem reciproken Wert des Gasdruckes entsprechen würde.

1) Vergl. J. Stark, l. c.

4. Ballonfahrt. Abfahrt von Berlin, Uebungsplatz des Luftschiffer-Bat. 5. November 1903, 8 h 24 min. a. Landung bei Neudorf, nahe Leobschütz (Oberschlesien) 4 h 42 min. p. Ballonführer: Dr. H. Elias, Teilnehmer: H. Gerdien.

In den ersten Novembertagen lagerten über West- und Ost-Europa Hochdruckgebiete, die durch eine flache, nord-südlich verlaufende Furche niedrigeren Druckes über Deutschland getrennt waren; der Norden Europas stand unter der Herrschaft einer Depression, die am 5. November das östliche Hochdruckgebiet etwas zurückdrängte und ihren Einfluß weiter nach Süden in stärkerer

Zeit	Höhe über über dem Meere in Metern	Ionengehalt in elektrostatischen Einheiten pr. cbm	Spec. Ionengeschw. i. cm/sec. im Feld v. 1 Volt/cm	Rel. Feuchtigkeit	Bemerkungen
9^{27}-$^{37}{}_{a}$	2430-2500	−0,59	—	23 %	
9^{38}-$^{48}{}_{a}$	2500	—	−2,70	10 %	
9^{51}-$10^{01}{}_{a}$	2500	+0,26	—	—	
10^{02}-$10^{12}{}_{a}$	2500-2550	—	—	—	Elektroskop entladen
11^{45}-$^{56}{}_{a}$	3600-3630	−0,40	—	16 %	Bisher kein Ballast verbraucht
$11^{57}{}_{a}$-$12^{07}{}_{p}$	3600-3450	—	−2,96	22 %	
12^{10}-$12^{20}{}_{p}$	3500-3550	+0,36	—	10 %	
12^{21}-$^{31}{}_{p}$	3570-3660	—	+2,71	17 %	
1^{47}-$^{55}{}_{p}$	5600-5500	−0,31	—	18 %	Kollektor versagt
$1^{55\frac{1}{2}}$-$2^{03\frac{1}{2}}{}_{p}$	5500-5400	—	?	—	Spannungsabn. b. dies. Messung größer als bei der vorangehenden
2^{06}-$2^{14}{}_{p}$	5300-5100	+0,28	—	—	
$2^{14\frac{1}{2}}$-$2^{22\frac{1}{2}}{}_{p}$	5100	—	(+1,01)	16 %	Sandwolke
$2^{58\frac{1}{2}}$-$3^{04\frac{1}{2}}{}_{p}$	6900-6930	−0,24	—	—	Vorher sehr viel Ballast
3^{05}-$3^{11}{}_{p}$	6950-7180	—	−2,92	—	Ballast
3^{14}-$3^{20}{}_{p}$	7100	+(0,07)	—	—	Sand wirbelt in den Korb
$3^{20\frac{1}{2}}$-$3^{27\frac{1}{2}}{}_{p}$	7100-7000	—	(+1,79)	—	„

Bewölkung und stellenweise in Niederschlägen geltend machte. Schon in 400—500 m Höhe bildeten sich am Morgen der Fahrt auf dunstigem Untergrunde kleine Cumuli, in etwa 1400 m Höhe drang dann der Ballon in eine ziemlich geschlossene Strato-Cumulus-Schicht ein, aus der er bei etwa 1650 m Höhe wieder heraustauchte, um nun bei völlig wolkenlosem Himmel weiter zu steigen. Unter der Strato-Cumulus-Schicht wurde nahezu adiabatische Temperaturabnahme vorgefunden, in der Schicht bestand eine geringe Temperaturumkehr, die über der Schicht wieder einer ziemlich gleichmäßig sich bis in die erreichte Maximalhöhe von 7180 m erstreckenden Temperaturabnahme von im Mittel etwa, 0,57° auf 100 m Höhe Platz machte. Es herrschte also in den größeren Höhen noch immer eine verhältnismäßig stabile Wetterlage, sodaß auch für diese Fahrt wohl der Schluß auf einen absteigenden Luftstrom gerechtfertigt erscheinen dürfte — denn offenbar hatte die Depression nur in den untersten Schichten ihre Herrschaft antreten können. Der am Boden morgens gemessene Ionengehalt erreichte wieder noch nicht $^1/_{10}$ Einheit für jedes Vorzeichen.

Ueber der Strato-cumulus-Schicht zeigt der Ionengehalt wieder wie über den Dunstschichten deutliche Unipolarität im Sinne einer positiven Ladung der oberen Genze der Adsorptionsschicht; diese Unipolarität ist noch merklich in etwa 3600 m Höhe. Diese Messungen können als ungestört gelten, da der Kollektor in gewünschter Weise wirksam war und erst nach den beiden ersten Messungen des Ionengehalts Ballastausgabe erfolgte. Dagegen ist die in etwa 5500 m Höhe beobachtete Unipolarität höchstwahrscheinlich einer positiven Ladung des Ballons zuzuschreiben, da die Entladungsvorrichtung leider versagte, und trotz aller Bemühungen nicht wieder in Gang gesetzt werden konnte.

Das Vorhandensein einer Ballonladung geht auch aus den Messungen zur Bestimmung der specifischen Ionengeschwindigkeit hervor, wo einmal bei geringerer Spannungsdifferenz im Cylinderkondensator ein größerer Spannungsabfall beobachtet wurde, als bei größerer Spannungsdifferenz, sodaß die Berechnung der specifischen Ionengeschwindigkeit ein sinnloses Resultat ergeben würde. Auch in der größten Höhe sind die Messungen durch die großen Ballastmengen, die zur Erreichung dieser Höhe geopfert werden mußten, vermutlich völlig unbrauchbar gemacht, zumal auch *während* der Messungen noch Ballast gegeben werden mußte.

Die beiden in etwa 3500 m Höhe gewonnenen Werte der specifischen Ionengeschwindigkeit sind wahrscheinlich merklich ungestört. In etwa 2500 m ist nur die Messung der specifischen Ge-

schwindigkeit der negativen Ionen gelungen, da das Elektroskop bei der entsprechenden Messungsreihe für das andere Vorzeichen auf unaufgeklärte Weise entladen wurde.

Ergebnisse und Ausblicke.

Der Ionengehalt hat im allgemeinen keine erhebliche Zunahme in der Höhe erkennen lassen und hielt sich fast bei allen vier Fahrten unter einer elektrostatischen Einheit im cbm. Dieses Resultat steht in guter Uebereinstimmung mit dem von G. Lüdeling[1]), der auch die eigentümliche Unipolarität in dem Ionengehalte der einer Adsorptionsschicht benachbarten Bereiche feststellen konnte.

Die erfreulichsten Resultate scheint das Zusammenwirken zweier luftelektrischer Beobachter zu versprechen, wofür die erste und zweite Fahrt Zeugnis ablegen. Es konnte so die in der Atmosphäre vorhandene elektrische Vertikalströmung, wenn auch vorerst nur ungenau infolge der noch immer bestehenden Unsicherheit in der Messung der Leitfähigkeit, so doch wenigstens der Größenordnung nach zum ersten Mal in der freien Atmosphäre bestimmt werden. Benutzt man die von Herrn Dr. Linke bei der ersten Fahrt gemessenen Werte des Potentialgefälles und die gleichzeitig gemessenen Leitfähigkeiten zur Berechnung dieses Vertikalstromes, so ergiebt sich 10^{-16} bis 10^{-17} Amp./cm^2, ein Wert, der mit dem direkt an der Erdoberfläche von H. Ebert[2]) galvanometrisch gemessenen gut übereinstimmt.

Die Messungen der specifischen Ionengeschwindigkeit haben, soweit sie einwandfrei erscheinen können, die Zunahme derselben mit der Höhe ergeben; ob erhebliche Abweichungen an dem Gesetz der umgekehrten Proportionalität mit dem Gasdruck in der Atmosphäre vorkommen, läßt sich noch nicht entscheiden und muß durch genauere Meßmethoden untersucht werden.

Die erhaltenen Ergebnisse zeigen die vorerst unüberwindliche Schwierigkeit, bei luftelektrischen Messungen im Freiballon wirklich störungsfreie Aufschlüsse über den natürlichen Ionengehalt und die specifische Ionengeschwindigkeit zu erhalten, solange man auf die bisherige Technik des Ballastgebens angewiesen ist.

---

1) H. Lüdeling, Luftelektrische Zerstreuungs- und Staubmessungen auf den internationalen Ballonfahrten vom 2. April und 7. Mai 1903. Ill. aëron. Mittlgn. 1903, Heft 10.

2) H. Ebert, Galvanometrische Messungen des elektrischen Ausgleichs zwischen den Ionenladungen der Atmosphäre und der Ladung der Erdoberfläche. Phys. Zschrft. 3. S. 338—339. 1902.

Ferner macht sich das Bedürfnis nach einer Methode zur Messung der specifischen Ionengeschwindigkeit geltend, die unabhängig ist von der schwer erfüllbaren Voraussetzung der Konstanz oder langsamen Aenderung des Ionengehalts.

Eine solche Methode ist in der Tat durchführbar; wenn man die bei der jetzigen Anordnung zeitlich getrennten Messungen gleichzeitig ausführt, indem man am zweckmäßigsten dem gleichen Luftstrome zunächst in einem Cylinderkondensator mit schwachem Felde einen meßbaren Bruchteil seines Ionengehalts entzieht und dann in einem zweiten Cylinderkondensator mit hinreichend starkem Felde den noch vorhandenen Rest des Ionengehalts bestimmt. Aus den in diesen hintereinander wirkenden Feldern abgeschiedenen Elektricitätsmengen erhält man die specifische Ionengeschwindigkeit und den Ionengehalt gesondert und erstere unabhängig von Aenderungen des letzteren. Ein nach diesem Prinzip konstruierter, transportabler Apparat ist seit 3 Monaten in Auftrag gegeben und geht seiner Fertigstellung entgegen.

Göttingen, Geophysikalisches Institut.

Dezember 1903.

Nachrichten

von der

Königl. Gesellschaft der Wissenschaften

zu Göttingen.

Geschäftliche Mittheilungen

aus dem Jahre 1903.

Göttingen,
Commissionsverlag der Dieterich'schen Universitätsbuchhandlung
Lüder Horstmann.
1903.

Inhalt.

Bericht des Vorsitzenden Sekretärs des Geschäftsjahres 1902/03 . . . S. 1

Verzeichnis der im Jahre 1902/03 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen . . . . . „ 6

Preisaufgabe der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte „ 12

de Lagarde-Stiftung und Stiftung der Freunde de Lagardes . . . . . „ 15

Bericht über das Samoa-Observatorium . . . . . „ 16

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden . „ 18

Aus dem Bericht der Commission für den Thesaurus linguae latinae über die Münchener Conferenz am 17. und 18. October 1902 . . . „ 20

Bericht über die ausgesetzten Preisaufgaben . . . . . „ 22

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1903 . . . . . „ 24

Benekesche Preisstiftung . . . . . „ 34

Verzeichnis der im Jahre 1902 eingegangenen Druckschriften . . . . „ 36

W. Voigt, G. G. Stokes . . . . . „ 70

F. Frensdorff, Julius Ficker . . . . . „ 81

Edward Schröder, Gaston Paris . . . . . „ 91

Bericht über die öffentliche Sitzung am 11. November 1903 . . . . . „ 99

Max Verworn, Naturwissenschaft und Weltanschauung . . . . . „ 100

Adresse an Herrn Lipschitz in Bonn . . . . . „ 116

F. Klein und K. Schwarzschild, Ueber das in der Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften mit dem Gaußischen Tagebuche reproducierte Porträt „des 26-jährigen Gauß“ . . . . . „ 118

Bericht des Vorsitzenden Sekretärs des Geschäftsjahres 1902/3.

Die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften hat in dem abgelaufenen Geschäftsjahr 2 öffentliche, 14 ordentliche und 3 außerordentliche Sitzungen abgehalten. Ein Verzeichniß der in den Sitzungen vorgelegten wissenschaftlichen Mittheilungen folgt unten; ebenso ein Verzeichniß der durch den Schriftenaustausch oder auf andern Wegen der Gesellschaft zugegangenen und der K. Universitätsbibliothek überwiesenen Druckwerke.

Von den Nachrichten des Jahres 1902 sind die der philologisch-historischen Klasse mit dem 5. Heft (762 S.), die der mathematisch-physikalischen Klasse mit dem 6. Heft (353 S.) abgeschlossen worden; Heft 1 und 2 der philologisch-historischen, Heft 1 der mathematisch-physikalischen Klasse von 1903 sind erschienen. Die Nachrichten der philologisch-historischen Klasse erhielten ein Beiheft mit dem dritten Reisebericht des Herrn Dr. C. Borchling: Mittelniederdeutsche Handschriften in Wolfenbüttel und einigen benachbarten Bibliotheken.

Von den Abhandlungen der philologisch-historischen Klasse ist erschienen: Band V

Nr. 3. Enno Littmann, Neuarabische Volkspoesie.

4. R. Pischel, Materialien zur Kenntniß des Apabhraṃśa. Ein Nachtrag zur Grammatik der Prākrit-Sprachen.

Band VI

Nr. 1. Carl Kraus, Metrische Untersuchungen über Reinbots Georg. Mit zwei Excursen.

2. Wilhelm Meyer, Henricus Stephanus über die Regii Typi Graeci.

3. Hermann Möller, Ein hochdeutsches und zwei niederdeutsche Lieder von 1563—1565 aus dem siebenjährigen nordischen Kriege. Mit einem Anhang: Deutsche Lieder aus der Grafenfehde.

Von den Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Klasse: Band II

Nr. 1. E. Wiechert, Theorie der automatischen Seismographen.

2. Julius Kramer, Theorie der kleinen Planeten. Die Planeten vom Hecuba-Typus.

4. Ph. Furtwängler, Ueber das Reciprocitätsgesetz der l^{ten} Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn l eine ungerade Primzahl bedeutet. (Von der Gesellschaft preisgekrönte Arbeit).

Die Gelehrten Anzeigen nahmen unter der Redaction von Herrn Professor R. Meißner den gewohnten Fortgang.

Die Gesellschaft bewilligte zum Zwecke wissenschaftlicher Unternehmungen:

Herrn F. Kielhorn zur Unterstützung der von der K. Bayerischen Akademie dem Verbande wissenschaftlicher Körperschaften empfohlenen Herausgabe einer indo-arischen Bibliographie . . . . . 500 ℳ

Herrn W. Meyer für handschriftliche Forschungen an auswärtigen Bibliotheken . . . . . 600 „

Herrn F. Leo für weitere Vorbereitung der von Herrn Wellmann unternommenen Ausgabe des Dioskurides . . 500 „

Demselben für die Bearbeitung antiker Scholien (Lukianscholien) . . . . . 700 „

Herrn E. Riecke und W. Voigt für Fortsetzung der Untersuchungen über Luftelektricität . . . . . 600 „

Desgleichen . . . . . 400 „

Herrn Dr. W. Kaufmann für Fortsetzung der Beobachtungen über Becquerelsche Strahlen . . . . . 750 „

Herrn C. Runge für Herausgabe mathematischer Tafeln . . . . . 500 „

Herrn H. Grafen zu Solms-Laubach Zuschuß zur Drucklegung des Buches von Dr. Hugo Bretzl, botanische Forschungen des Alexanderzuges (erschienen 1903) . . . 500 „

Der geophysikalischen Commission für Drachenbeobachtungen in Samoa . . . . . 500 „

Desgleichen . . . . . 500 „

Herrn Dr. J. Lietzmann für handschriftliche Forschungen zu Apollinaris von Laodicea . . . . . .

Herrn O. Wallach für Fortsetzung der Arbei über neue Basen stickstoffhaltiger Ringsysteme .

Herrn F. Leo für den Thesaurus linguae latinae . . 1000 ℳ
Herrn Prof. R. Meißner zur Vergleichung isländischer Handschriften in Kopenhagen . . . . . 300 „

Für die Durchführung der auf Samoa ins Werk gesetzten und Herrn Dr. Tetens übertragenen geophysikalischen Beobachtungen ist der Gesellschaft von seiten des vorgesetzten Herrn Ministers ein Zuschuß von 10000 ℳ bewilligt und die Einsetzung einer gleichen Summe in den Reichshaushaltsetat von 1903 in Aussicht gestellt worden.

Von Band VII der Ausgabe der Gaußschen Werke sind 27 Bogen, von Band IX sind 47 Bogen gesetzt; es soll zunächst die Arbeit an Band IX weitergeführt werden.

Von der Mathematischen Encyclopädie sind im Laufe des Berichtsjahrs erschienen:
I, 7 (die letzten Referate des Bandes I enthaltend),
III 2, 1 und III 3, 1 (die Anhangshefte der algebraischen Geometrie und der Infinitesimalgeometrie), endlich
IV 1, 2 (das Anfangsheft der Mechanik der Puncte und starren Systeme).
Die Arbeit an sämmtlichen Bänden I—VI schreitet fort, aber allerdings viel langsamer, als man von vorneherein erwarten mochte, weil die endgültige Herstellung der einzelnen Referate immer außerordentliche Arbeit verursacht.

Ueber den Fortgang der luftelektrischen Forschung, der Untersuchung niederdeutscher Texte, der Lukianscholien ist in den Nachrichten berichtet worden; über die Herausgabe älterer Papsturkunden, den Thesaurus linguae latinae, die geophysikalischen Untersuchungen auf Samoa, werden weiterhin besondere Berichte erstattet.

Zur Berathung einer neuen Organisation der Monumenta Germaniae paedagogica ist auf Veranlassung des Herrn Reichskanzlers eine aus Delegirten der vier reichsdeutschen Akademien gebildete Commission zusammengetreten. Die Gesellschaft hat in diese Commission ihre Mitglieder die Herren E. Ehlers und G. Roethe entsendet.

In dem für das Preußische Historische Institut in Rom nach dessen Neuordnung gebildeten wissenschaftlichen Beirath ist die Gesellschaft durch Herrn P. Kehr vertreten.

Am 15. und 16. Mai fand in Göttingen, als dem diesjährigen Vorort, die Cartellversammlung des Verbandes wissenschaftlicher

Die Protokolle sind besonders gedruckt worden.

Ein Hauptgegenstand der Verhandlungen war die Organisation der luftelektrischen Forschungen, welche von der Gesellschaft eingeleitet und dem Verbande zu weiterer Ausgestaltung vorgelegt worden ist. Zur Theilnahme an diesen Berathungen waren die Herren Elster und Geitel aus Wolfenbüttel, A. Schmidt aus Gotha, E. Wiechert aus Göttingen erschienen.

Die Gesellschaft war vertreten bei der Conferenz der Internationalen Commission für wissenschaftliche Luftschiffahrt (Pfingsten 1902) durch Herrn H. Wagner, bei der Säcularfeier Abels in Christiania durch Herrn D. Hilbert, bei der 300jahrfeier der Bibliotheca Bodleiana in Oxford (beides October 1902) durch Herrn F. Leo. Die der Universität Oxford überreichte Adresse ist in den Gesch. Mitth. 1902 S. 133 abgedruckt.

Herrn Leopold Delisle, ihrem langjährigen auswärtigen Mitgliede, der das 50jährige Jubiläum seiner Amtsthätigkeit feierte, brachte die Gesellschaft ihre Glückwünsche durch die Dedication der oben verzeichneten Abhandlung von W. Meyer dar.

Die ordentlichen Mitglieder G. Roethe, W. Schulze und J. Orth traten in Folge ihrer Uebersiedelung nach Berlin in die Reihe der auswärtigen Mitglieder.

Herr J. Wellhausen erklärte am 5. März 1903 wegen seiner zunehmenden Schwerhörigkeit, die ihm die Theilnahme an den Sitzungen unmöglich machte, seinen Austritt aus der Gesellschaft.

Durch den Tod verlor die Gesellschaft: in der philologisch-historischen Klasse ihre Mitglieder

Julius Ficker von Feldhaus in Innsbruck, im Juli 1902, Corr. seit 1866, ausw. Mitgl. seit 1889,

Lazarus Fuchs in Berlin, im April 1902, ord. Mitgl. seit 1874, ausw. Mitgl. seit 1875,

Gaston Paris in Paris, im März 1903, ausw. Mitgl. seit 1889;

in der mathematisch-physikalischen Klasse

Sir Gabriel Stokes in Cambridge, im Februar 1902, Corr. seit 1864, ausw. Mitgl. seit 1882,

Johannes Wislicenus in Leipzig, im Dezember 1902, ausw. Mitgl. seit 1901,

Friedrich Leopold Goltz in Straßburg, corr. Mitgl. seit 1892,

James Hall in Albany (New-York), corr. Mitgl. seit 1885,

Karl von Kupffer in München, corr. Mitgl. seit 1889.

Die Gesellschaft wählte zu ihrem Ehrenmitgliede am 9. März 1903:

Herrn Julius Wellhausen in Göttingen;

zu ordentlichen Mitgliedern

in ihrer philologisch-historischen Klasse:

am 31. Mai 1902 die Herren

Jacob Wackernagel (corr. Mitgl. seit 1901),

Lorenz Morsbach,

Eduard Schwartz;

am 5. Februar 1903 Herrn

Edward Schröder (corr. Mitgl. seit 1894);

in ihrer mathematisch-physikalischen Klasse:

am 5. Februar 1903 die Herren

Emil Wiechert

Max Verworn,

sämmtlich in Göttingen. Die Wahlen vom 31. Mai 1902 sind am 19. Juli 1902, die vom 5. Februar 1903 am 9. März 1903, die vom 9. März am 8. April 1903 durch allerhöchsten Erlaß bestätigt worden.

Ferner wählte die Gesellschaft am 26. Juli 1902 zu auswärtigen Mitgliedern in der mathematisch-physikalischen Klasse (allerhöchst bestätigt am 15. November 1902) die Herren

Wilhelm von Bezold in Berlin (corr. Mitgl. seit 1897),

Wilhelm Pfeffer in Leipzig (corr. Mitgl. seit 1885),

Ferdinand Freiherrn v. Richthofen in Berlin (corr. Mitgl. seit 1875);

Gustav Tschermak in Wien (corr. Mitgl. seit 1884),

Julius Elster in Wolfenbüttel;

zu correspondirenden Mitgliedern in derselben Klasse die Herren

Woldemar Christoffer Brögger in Christiania,

Karl Goebel in München,

Edmund v. Mojsisovics in Wien,

S. L. Penfield in New Haven,

Julius Wiesner in Wien.

Das auswärtige, vormals ordentliche Mitglied der Gesellschaft Herr R. Pietschmann wurde gegen Ende des Geschäftsjahres durch seine Ernennung zum Director der K. Universitätsbibliothek wieder nach Göttingen gezogen.

Die von dem vorgesetzten Herrn Minister der Gesellschaft zu ihrem Jubiläum geschenkten Büsten ihres früheren ordentlichen Mitgliedes Paul de Lagarde und ihres früheren Ehrenmitgliedes Adolf von Warnstedt sind im Sitzungssaale der Gesellschaft aufgestellt worden.

Verzeichnis der im Jahre 1902/3 abgehaltenen Sitzungen und der darin gemachten wissenschaftlichen Mittheilungen.

Sitzung am 3. Mai 1902.

F. Klein legt ein autographirtes Vorlesungsheft 'Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie, eine Revision der Principien' vor.

D. Hilbert legt vor: E. R. Neumann, Neue Integraleigenschaften successiver Potentiale. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 242.)

E. Riecke legt die 2. Auflage seines Lehrbuches der Physik und den 2. Band der Japanischen Uebersetzung desselben Buches vor.

Derselbe macht Mittheilung über die Berichte betr. luftelektrische Forschungen der Herren Elster (Wolfenbüttel), Ebert (München), Exner (Wien). Die Berichte sind erschienen in den Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 Heft 3.

W. Voigt legt vor: Ueber die absolute Verzögerung der Lichtschwingungen bei Reflexion. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 259.)

G. Roethe legt vor: C. Kraus, Metrische Untersuchungen über Reinbots Georg. (Abhandlungen phil.-hist. Kl. VI 1)

Leo Meyer: Ueber die homerischen Formen des Singulargenetivs der Grundformen auf o. (Nachrichten phil.-hist. Kl. 1902 S. 351.)

Oeffentliche Sitzung am 3. Mai 1902.

Jahresberichte.

Gedächtnissreden: F. Frensdorff auf C. Hegel.
H. Wagner auf A. v. Nordenskiöld.
F. Leo auf G. Kaibel.

Erschienen in den Gesch. Mitth. 1902 Heft 1.

Sitzung am 31. Mai 1902.

F. Leo: Ueber den Stichus des Plautus. (Nachr. phil.-hist. Kl. 1902 S. 375.)

F. Klein legt im Namen des corr. Mitgliedes C. Koppe das erste Blatt der neuen Braunschweigischen Landesaufnahme vor.

Der Vorsitzende legt die als Geschenk des Verfassers eingegangene Publikation 'Interferenz-Erscheinungen an doppeltbrechenden Krystallplatten im konvergenten polarisirten Licht' von H. Hauswald vor.

H. Wagner berichtet über die Berliner Conferenz der Internationalen Commission für wissenschaftliche Luftschiffahrt.

Sitzung am 14. Juni 1902.

W. Meyer: Henricus Stephanus über die regii typi Graeci. (Abhandlungen phil.-hist. Kl. VI. 2.)

Leo Meyer legt den 4. Band seines Handbuches der Griechischen Etymologie vor.

Sitzung am 28. Juni 1902.

N. Bonwetsch: Die Schlußkapitel des Briefes an Diognet. (Nachrichten phil.-hist. Kl. 1902 S. 621.)

Derselbe: Die Mosessage in den slavischen Menäen. (Erscheint in den Nachrichten phil.-hist. Kl.)

F. Leo legt vor: P. Kehr, Aeltere Papsturkunden in den päpstlichen Registern, I. Bericht, und kündigt die II. und III. Folge derselben Publication an. (Nachrichten phil.-hist. Kl. 1902 S. 393.)

Derselbe legt die von Seiten des Reichs-Marineamts eingegangene Publication von M. Loesch 'Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf 20 Stationen an der westafrikanischen Küste' vor.

Sitzung am 12. Juli 1902.

W. Voigt: Weiteres zur Aufklärung der Eigenschaften pleochroitischer Krystalle. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 269.)

E. Riecke legt das Buch des Herrn Dr. J. Stark 'Die Elektricität in Gasen' vor.

G. Berthold legt vor: H. Vöchting, Zur experimentellen Anatomie. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 278.)

F. Frensdorff: Biographische Mittheilungen über den Nationalökonomen Justi. (Erscheint in den Nachrichten phil.-hist. Kl. 1903 H. 4.)

G. Roethe legt vor: H. Möller, Ein hochdeutsches und zwei niederdeutsche Lieder von 1563—65 aus dem siebenjährigen nordischen Kriege. (Abhandlungen phil.-hist. Kl. VI. 3.)

Sitzung am 26. Juli 1902.

G. Roethe kündigt an: Mittheilungen aus den Briefen der Brüder Grimm an S. Hirzel, nebst Briefen J. Grimms an Goedeke. (Nachrichten phil.-hist. Kl.)

E. Ehlers legt vor: F. Schmidt, die Körpermusculatur von Branchiobdella parasita. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 284.)

F. Klein legt vor: Mathematische Encyklopädie IV. H. 2.

Derselbe legt ferner vor: Ein von Frau H. Minnigerode geschenktes, von deren verstorbenem Gatten nachgeschriebenes Collegheft nach Riemann.

Derselbe überreicht im Auftrage des Herrn F. Siacci in Neapel dessen Abhandlung 'Alcune nuove forme di resistenza che riducono il problema balistico alle quadrature' (Rom 1901).

O. Wallach: Untersuchungen aus dem Universitäts-Laboratorium XI. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 297.)

W. Voigt: Neue Beobachtungen über magnetooptische Erscheinungen in Absorptionsstreifen. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 305.)

Derselbe legt vor: W. Kaufmann, über die elektromagnetische Masse des Elektrons. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 291.)

E. Riecke kündigt weitere Mittheilungen über V. Cuomos luftelektrische Beobachtungen in Capri an. (Nachrichten math.-phys. Kl. 1902 S. 324.)

Ordentliche Sitzung am 1. November 1902.

F. Klein legt das 7. Heft des I. Bandes der Mathematischen Encyklopädie vor.

E. Riecke legt den 2. Band der 2. Auflage seines Lehrbuches der Physik vor.

H. Wagner legt im Auftrage des Verfassers vor: Vignaud, Toscanelli and Columbus, London 1902.

N. Bonwetsch legt vor: H. Achelis, Ein Versuch den Karfreitag zu datiren. Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1902 S. 707.)

Derselbe legt vor: Riedel, Katalog der christlich-arabischen Schriftsteller von Abū'l Barakāt. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1902 S. 638.)

Oeffentliche Sitzung am 15. November 1902.

Rede des Herrn Riecke über 'Neuere Anschauungen der Electricitätslehre mit besonderer Beziehung auf Probleme der Luftelectricität'.

Ordentliche Sitzung am 29. November 1902.

W. Meyer legt vor: R. Pietschmann, Die Geschichte Perus des P. Sarmiento de Gamboa. (Abhandlungen der phil.-hist. Klasse VI. 4.)

Derselbe: Das Turiner Bruchstück der ältesten irischen Liturgie. (Nachrichten phil.-hist. Klasse 1903 S. 163.)

E. Schwartz legt vor: H. Bretzl, Botanische Forschungen des Alexanderzuges (gedruckt mit Unterstützung der Königl. Ges. d. Wiss.).

J. Wackernagel, Ueber Bedeutungsverschiebung in der Verbalcomposition. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1902 S. 737.)

H. Wagner legt vor: W. Ruge, Erster Reisebericht betr. die wissenschaftliche Katalogisirung älteren kartographischen Materials. (Erscheint in den Nachrichten der phil.-hist. Klasse.)

F. Leo legt vor: H. Rabe, Die Ueberlieferung der Lukianscholien. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1902 S. 718.)

Derselbe überreicht den Bericht der Commission für den Thesaurus linguae latinae über die Octoberconferenz.

O. Wallach legt vor: C. Jacobj, Ueber die pharmakologischen Wirkungen der cyclischen Isoxime. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1902 S. 313.)

F. Klein legt das 1. Heft der Mathematischen Encyklopädie III 3 vor.

Derselbe legt vor: M. Nöther und W. Wirtinger, Nachträge zu B. Riemanns Gesammelten mathematischen Werken.

Ordentliche Sitzung am 13. Dezember 1902.

F. Kielhorn legt vor: H. Lüders, Arya-Śūra's Jātakamālā und die Fresken von Ajaṇṭā. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1902 S. 758.)

N. Bonwetsch, Die Theologie des Methodius von Olympus. (Abhandlungen der phil.-hist. Klasse VII. 1.)

F. Leo legt vor: P. Kehr, Papsturkunden in Rom; die römischen Bibliotheken. I.—III. Bericht. (Nachrichten phil.-hist. Klasse 1903 S. 1.)

H. Wagner macht Mittheilungen aus einem Berichte des Dr. Tetens über den Stand der Samoa-Expedition.

Ordentliche Sitzung am 10. Januar 1903.

W. Meyer, Ein Kapitel spätester Metrik. (Nachrichten der phil.-hist. Klasse 1903 S. 215.)

Derselbe, Wie ist die Auferstehung Christi dargestellt worden? (Nachrichten der phil.-hist, Klasse 1903 S. 236.)

P. Kehr, Otia Diplomatica. (Nachrichten der phil.-hist. Klasse 1903 S. 255.)

F. Klein legt vor: A. Schoenflies, Ueber den Beweis eines Haupttheorems aus der Theorie der Punktmengen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 21.)

W. Voigt, Zur magnetischen Influenz regulärer Krystalle. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 17.)

Ordentliche Sitzung am 24. Januar 1903.

E. Riecke, Ueber die Zerstreuung der Electricität in abgeschlossenen Räumen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 1.)

K. Dilthey legt vor: F. Imhoof-Blumer, Kleinasiatische Münzen, Band II.

Ordentliche Sitzung am 7. Februar 1903.

P. Kehr, Diplomatische Miscellen V: Römische Fälschungen. (Erscheint in den Nachrichten der phil.-hist. Klasse.)

E. Riecke, Ueber die Zerstreuung der Electricität in gleichmäßig bewegter Luft. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 32.)

F. Klein berichtet über den Internationalen Katalog der Naturwissenschaften.

Ordentliche Sitzung am 21. Februar 1903.

A. von Koenen, Ueber Temperaturzunahme in der Tiefe. (Erscheint in den Nachrichten math.-phys. Klasse.)

W. Nernst legt vor: F. Krüger, Theorie der Polarisationskapacität. (Nachrichten der math.-phys. Klasse 1903. S. 59.)

E. Riecke, Ueber die Masse der in der Luft enthaltenen Ionen. (Nachrichten der math.-phys. Klasse 1903 S. 39.)

W. Voigt, Einige Fragen der Krystallphysik. (Nachrichten der math.-phys. Klasse 1903 H. 3.)

D. Hilbert legt vor: Bernstein, Klassenkörper eines algebraischen Zahlkörpers. (Nachrichten math.-phys. Klasse 1903. S. 46.

Ordentliche Sitzung am 7. März 1903.

F. Kielhorn, Epigraphic Notes. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1903 S. 300.)

F. Leo, Ueber den Pseudolus des Plautus. (Nachrichten phil.-hist. Kl. 1903. S. 347.

Derselbe kündigt an: W. Förster, Ueber die Alexiuslegende. (Erscheint in den Nachrichten phil.-hist. Kl.)

Leo Meyer, Ueber die Modi im Griechischen. (Nachrichten, phil.-hist. Kl. 1903 S. 313.)

W. Nernst, Ueber Moleculargewichtsbestimmungen bei sehr hohen Temperaturen. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 75.)

E. Riecke kündigt an: Ueber Ionenadsorption an der Oberfläche der Erde. (Nachrichten, math.-phys. Kl. 1903 S. 83.)

Derselbe kündigt an: V. Cuomo, Beobachtungen der luftelektrischen Zerstreuung auf Capri (Schluß). (Erscheint in den Nachrichten math.-phys. Kl.)

H. Wagner berichtet über den Stand des Samoa-Unternehmens.

W. Voigt legt vor: W. Kaufmann, Ueber die 'scheinbare Masse' der Elektronen (mit Unterstützung der G. d. W. ausgeführte Untersuchung). (Erscheint in den Nachrichten math.-phys. Kl.)

Derselbe kündigt an: Specifische optische Eigenschaften hemimorpher Krystalle. (Erscheint in den Nachriehten math.-phys. Kl.)

Preisaufgabe der Wedekindschen Preisstiftung für Deutsche Geschichte.

Die von dem Verwaltungsrathe der Wedekindstiftung unterm 14. März 1896 für den Zeitraum 1896—1901 gestellte Aufgabe einer archivalisch begründeten Geschichte der innern Verwaltung des Kurfürstenthums Mainz unter seinen letzten Erzbischöfen (1763—1802) ist ohne Bewerbung geblieben. Für den Zeitraum 1901—1906 stellt der Verwaltungsrath als Aufgabe;

eine kritische Geschichte der sächsischen Bisthumsgründungen in der Karolingischen Zeit.

1. **Form und Einsendung der Bewerbungsschriften.** Bewerbungsschriften müssen vor dem 1. August 1905 an den Direktor des Verwaltungsraths der Stiftung eingesandt werden und aller äußern Zeichen entbehren, an welchen die Verfasser erkannt werden können. Jede Schrift ist mit einem Sinnspruche zu versehen, und es ist ihr ein versiegelter Zettel beizulegen, auf dessen Außenseite derselbe Sinnspruch sich befindet, während inwendig Name, Stand und Wohnort des Verfassers angegeben sind.

2. **Preis.** Der Preis beträgt 3300 Mark und muß ganz oder kann gar nicht zuerkannt werden.

3. **Druck der Preisschrift.** Die gekrönte Schrift geht in das Eigenthum der Stiftung für diejenige Zeit über, in welcher dasselbe den Verfassern und deren Erben gesetzlich zustehen würde. Der Verwaltungsrath wird dieselbe einer Buchhandlung in Verlag geben oder auf Kosten der Stiftung drucken lassen.

Der Ertrag der ersten Auflage, welche ausschließlich der Freiexemplare höchstens 1000 Exemplare stark sein darf, fällt dem verfügbaren Kapitale der Stiftung zu, da der Verfasser den erhaltenen Preis als sein Honorar zu betrachten hat. Wenn indessen jener Ertrag ungewöhnlich groß ist, d. h. wenn derselbe die Druckkosten um das Doppelte übersteigt, so wird die Königliche Gesell-

schaft auf den Vortrag des Verwaltungsrathes erwägen, ob dem Verfasser nicht eine außerordentliche Vergeltung zuzubilligen sei.

Findet die Königliche Gesellschaft fernere Auflagen erforderlich, so wird sie den Verfasser, oder, falls er nicht mehr leben sollte, einen andern dazu geeigneten Gelehrten zur Bearbeitung derselben veranlassen. Der reine Ertrag der neuen Auflagen soll sodann zu außerordentlichen Bewilligungen für den Verfasser, oder nach einem von der Königlichen Gesellschaft festzustellenden Verhältnisse bestimmt werden.

Jede von der Stiftung gekrönte und herausgegebene Schrift wird auf dem Titel die Bemerkung haben:

> von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen mit einem Wedekind'schen Preise gekrönt und herausgegeben.

4. **Freiexemplare.** Von den Preisschriften, die die Stiftung herausgiebt, erhält der Verfasser zehn Freiexemplare, der Verwaltungsrath ebenfalls zehn zu freier Verfügung.

II. Am Schlusse des oben bezeichneten Verwaltungszeitraums wird der Verwaltungsrath auch den dritten Preis der Stiftung zu ertheilen berechtigt.

Für den dritten Preis wird keine bestimmte Aufgabe ausgeschrieben, sondern die Wahl des Stoffes bleibt den Bewerbern nach Maßgabe der folgenden Bestimmungen überlassen:

Vorzugsweise verlangt der Stifter für denselben ein deutsch geschriebenes Geschichtsbuch, für welches sorgfältige und geprüfte Zusammenstellung der Thatsachen zur ersten, und Kunst der Darstellung zur zweiten Hauptbedingung gemacht wird. Es ist aber damit nicht bloß eine gut geschriebene historische Abhandlung, sondern ein umfassendes historisches Werk gemeint. Speciallandesgeschichten sind nicht ausgeschlossen, doch werden vorzugsweise nur diejenigen der größern deutschen Staaten berücksichtigt.

Zur Erlangung des Preises sind die zu diesem Zweck handschriftlich bis zum 1. August 1905 eingeschickten Arbeiten und die während des Verwaltungszeitraums von Beginn des Jahres 1896 ab bis zum 1. August 1905 gedruckt erschienenen Werke dieser Art gleichmäßig berechtigt. Dabei findet indessen der Unterschied Statt, daß die handschriftlichen, sofern sie in das Eigenthum der Stiftung übergehen, den vollen Preis von 3300 Mark, die bereits gedruckten aber, welche Eigenthum des Verfassers bleiben, oder über welche als sein Eigenthum er bereits verfügt hat, die Hälfte des Preises mit 1650 Mark empfangen.

Wenn keine preiswürdigen Schriften der bezeichneten Art vorhanden sind, so darf der dritte Preis angewendet werden, um die Verfasser solcher Schriften zu belohnen, welche durch Entdeckung und zweckmäßige Bearbeitung unbekannter oder unbenutzter historischer Quellen, Denkmäler und Urkundensammlungen sich um die deutsche Geschichte verdient gemacht haben. Solchen Schriften darf aber nur die Hälfte des Preises zuerkannt werden.

Es steht Jedem frei, für diesen zweiten Fall Werke der bezeichneten Art auch handschriftlich einzusenden. Mit denselben sind aber ebenfalls alle gleichartigen Werke, welche vor dem Einsendungstage des laufenden Zeitraums gedruckt erschienen sind, für diesen Preis gleich berechtigt. Wird ein handschriftliches Werk gekrönt, so erhält dasselbe einen Preis von 1650 Mark; gedruckt erschienenen Schriften können nach dem Grade ihrer Bedeutung Preise von 825 bezw. 1650 Mark zuerkannt werden.

Aus dem Vorstehenden ergiebt sich von selbst, daß der dritte Preis auch Mehreren zugleich zu Theil werden kann.

Die handschriftlichen Werke, welche sich um den dritten Preis bewerben, können mit dem Namen des Verfassers versehen oder ohne denselben eingesandt werden.

III. Für beide Preise gilt: Das Preisgericht besteht aus dem Verwaltungsrathe der Stiftung und sovielen von ihm aus den übrigen Angehörigen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, den ordentlichen, den auswärtigen Mitgliedern und den Correspondenten, hinzu erwählten anerkannt sachkundigen und unparteilichen Männern, daß die Gesammtzahl sieben ist. Die Mitglieder des Preisgerichts können nicht an der Bewerbung Theil nehmen. Die übrigen Mitglieder der Königlichen Gesellschaft dürfen sich wie jeder andere um den Preis bewerben.

Das Urtheil des Preisgerichts wird am 14. März 1906 in einer Sitzung der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften bekannt gemacht und in deren „Nachrichten“ in der Abtheilung: Geschäftliche Mittheilungen veröffentlicht.

Die Verfasser der gekrönten Schriften oder deren Erben werden noch besonders durch den Direktor von dem ihnen zugefallenen Preise benachrichtigt und können diesen bei der Königlichen Universitätscasse zu Göttingen auf Anweisung des Direktors gegen Quittung erheben.

Sämmtliche Preise fallen, wenn die Verfasser der Preisschriften bereits gestorben sein sollten, deren Erben zu. Der dritte Preis kann auch gedruckten Schriften zuerkannt werden, deren Verfasser schon gestorben sind, und fällt alsdann den Erben derselben zu.

Die Verfasser der nicht gekrönten Schriften können dieselben unter Angabe ihres Sinnspruches und Einsendung des etwa erhaltenen Empfangsscheines innerhalb eines halben Jahres zurückfordern oder zurückfordern lassen. Sofern sich innerhalb dieses halben Jahres kein Anstand ergiebt, werden dieselben am 14. October von dem Director den zur Empfangnahme bezeichneten Personen portofrei zugesendet. Nach Ablauf dieser Frist ist das Recht zur Zurückforderung erloschen.

Göttingen, den 14. März 1902.

Der Verwaltungsrath der Wedekindschen Preisstiftung.

Bei der de Lagarde-Stiftung ist von deren Verwaltung ein Neudruck der Deutschen Schriften von P. de Lagarde angeordnet.

Die Stiftung der Freunde de Lagardes hat auch in diesem Jahre wieder für eine erhebliche Schenkung zu danken.

Bericht über das Samoa-Observatorium.

Die Einschiffung der Ausstattung des Samoa-Observatoriums erfolgte in Bremerhaven anfang April 1902. Dr. Tetens erreichte anfang Juni seinen Bestimmungsort Apia, während die Güter mit einer durch Ueberfülluug der Schiffe verursachten Verspätung von 4 Wochen eintrafen. Weitere Verzögerungen entstanden durch die sehr schwierigen Arbeiterverhältnisse, sodaß es erst im September gelang, die Häuser in der Hauptsache fertig zu stellen.

Ende September ereignete sich auf Sawaii, der größten Insel der Samoagruppe, unerwartet und nach den Angaben der Eingeborenen seit 200 Jahren zum ersten Male ein Vulkanausbruch, der mit heftigen Erdstößen verbunden war. Dr. Tetens unternahm zur näheren Untersuchung der Vorgänge im November eine Reise in das Innere von Sawaii und konnte bis auf etwa 1 Kilometer zum vulkanischen Heerde vordringen. Die Reise wurde zugleich benutzt, um eine Organisation der Beobachtung der lokalen Erdbeben anzubahnen. Leider griffen die Anstrengungen in dem ungewohnten Klima Dr. Tetens erheblich an, sodaß er sich nach der Rückkehr für einige Zeit in der Arbeitskraft beeinträchtigt fühlte. —

Angesichts der Bedeutung, welche die Seismik plötzlich gewonnen hatte, richtete Dr. Tetens seine Tätigkeit zunächst auf sie. Der mitgenommene Wiechert'sche Seismograph wurde aufgestellt und in Gang gebracht. Er zeichnete am 16. Dezember die erste Kurve; Ende Februar befand sich die erste Sendung von Kurven in Göttingen und weitere folgten nun regelmäßig. Eine große Zahl sehr schöner Diagramme von Naheerdbeben ist erhalten worden, die offenbar auf die vulkanische Tätigkeit in Sawaii zurückzuführen sind. — Eine Störung der Registrirung des Seismographen trat nur einmal ein, veranlaßt durch Fischen mit Dynamit in der Nachbarschaft des Observatoriums. Es wurde nötig, den

Apparat neu zu regulieren, weiteren Schaden hatte er glücklicher Weise nicht gelitten. Es gelang Dr. Tetens einen Befehl der Kaiserlichen Regierung in Apia auszuwirken, der ähnliche Vorkommnisse für die Folge ausschließt. —

Die magnetischen Arbeiten sind weitgehend vorbereitet, sodaß die Nachricht von ihrem ordnungsmäßigen Beginn in nächster Zeit erwartet werden kann.

Bericht über die Arbeiten für die Ausgabe der älteren Papsturkunden.

Die Arbeiten sind in dem vergangenen Jahr Dank der Förderung, die ihnen von allen Seiten zu Teil geworden ist, um ein gutes Stück weitergeführt worden. Dem Leiter des Unternehmens, Professor Kehr, bewilligte der Herr Minister der geistlichen pp. Angelegenheiten wiederum für ein Jahr Urlaub. Dem ständigen Mitarbeiter Dr. Wendland verlieh er wie für die früheren Jahre so auch für das verflossene Jahr ein Stipendium. Für diese erneuten Gunstbeweise sagen wir Sr. Excellenz unsern geziemenden Dank.

Die Aufgabe des vergangenen Jahres war: die Sammlung des Materials in Italien und Deutschland teils zu beenden teils weiterzuführen und die Vorarbeiten für die Erforschung Frankreichs und Spaniens zu fördern. Auf allen diesen Gebieten ist das gesteckte Ziel im Wesentlichen erreicht worden.

I. In Italien waren übrig geblieben nur noch die päpstlichen Registerserien des Vaticanischen Archivs und die im Verlaufe der fortschreitenden kritischen Bearbeitung des bereits gesammelten Materials sich als notwendig erweisenden Revisionsarbeiten. Jene durchzuarbeiten hat Professor Kehr übernommen und in den Sommermonaten 1902 diese ebenso mühselige wie ertragreiche Arbeit vollendet. Die Berichte darüber stehn im 4. Heft unserer Nachrichten für 1902. Auch die Herbstmonate October bis Dezember hat Professor Kehr in Rom zugebracht, um die Durchsicht der in den römischen Bibliotheken gesammelten Materialien zu vollenden. Ueber die Ergebnisse dieser Arbeiten findet man das Nähere in den drei Berichten des 1. Heftes unserer Nachrichten für 1903. Nur das bis dahin unzugängliche Barberini-Archiv, welches im Herbst vergangenen Jahres vom Vatican erworben worden ist, blieb noch zu erledigen. Auch dieses ist nunmehr, mit reichem Gewinn für unser Unternehmen, durch Pro-

fessor Kehr ausgebeutet worden. Er fand hier außer dem Archiv von Grottaferrata auch die bislang vermißten Archivalien von Tolla bei Piacenza, von S. Lorenzo di Cremona und von S. Maria di Banzi. Endlich hat Professor Kehr, begleitet von Professor L. Schiaparelli (jetzt in Florenz) im Sommer die umbrischen Archive besucht und das dortige Material revidirt. Er beabsichtigt in derselben Weise noch die Archive von Toscana und der Emilia zu besuchen und dann sogleich den Druck der Italia pontificia, Pars I und Roma et Italia media zu beginnen.

Die Arbeiten für Pars II: Italia superior unserer Italia pontificia hat Dr. Wendland in Göttingen erheblich gefördert. Er hofft sein Manuscript im nächsten Jahre druckfertig vorlegen zu können.

Um auch den dritten Teil der Italia pontificia: Italia inferior möglichst bald zum Abschluß zu bringen, haben wir vom 1. März d. J. ab einen neuen Mitarbeiter eingestellt. Dr. E. Caspar in Berlin, der sich durch eine Dissertation über König Roger in die Wissenschaft eingeführt hat, wird sich ganz der Bearbeitung unseres süditalienischen Urkundenmaterials widmen.

II. In Deutschland hat Dr. Brackmann in Hannover seine archivalischen Forschungen fortgesetzt. Er hat hauptsächlich die Archive von Hannover und Düsseldorf, ferner die thüringischen Archive besucht und somit die archivalische Lese in Norddeutschland zum Abschluß gebracht. Auch das Material des skandinavischen Nordens hat er auf einer Reise nach Kopenhagen und Stockholm bereits zusammengebracht und, unterstützt durch Dr. K. Voigt in Göttingen, die Vorarbeiten für Holland und Belgien begonnen. Hierüber wird der Director der Wedekindstiftung, in deren Auftrag dieser Teil unsres Unternehmens bearbeitet wird, seinerzeit ausführlicher berichten.

III. Die Vorarbeiten für Frankreich und Spanien hat Dr. Wiederhold in Goslar auch in dem vergangenen Jahre so eifrig gefördert, daß noch im Jahre 1903 mit der archivalischen Forschung an Ort und Stelle wird begonnen werden können.

Die Commission für die Herausgabe der älteren Papsturkunden.

Aus dem Bericht der Commission für den Thesaurus linguae über die Münchener Conferenz am 17. und 18. October 1902

Während des Jahres October 1901/2 sind 65 Bogen fertiggegestellt worden. Es läßt sich nunmehr übersehen, daß der Umfang des Werkes im wesentlichen der Ankündigung entsprechen wird, daß dagegen eine erhebliche Ueberschreitung der für die Ausführung angesetzten Zeitdauer und damit der Kosten droht. Die Commission wird darauf bedacht sein, dieser Gefahr einerseits durch Vermehrung der Arbeitskräfte andererseits durch Vereinfachung der Arbeit (z. B. in der Behandlung der Eigennamen) zu begegnen. Der in einer Sitzung der Conferenz anwesende Vertreter der Verlagshandlung erklärte zu Protokoll, daß die Verlagshandlung keinen Einwand erheben werde, wenn die in § 3 des Vertrages bestimmte Ausarbeitungszeit und jährliche Bogenzahl nicht genau eingehalten werden kann.

Für das abgelaufene Jahr sind von der preußischen Regierung wie bisher zwei Stipendien zu je 1200 M. bewilligt und außerdem der Oberlehrer Dr. Münscher in Ratibor zur Mitarbeit am Thesaurus nach München beurlaubt worden. Die österreichische Regierung hat die Stellung eines Assistenten wiederum in Aussicht gestellt. Würtemberg, Elsaß-Lothringen und Hamburg haben je 1000 M., Baden 600 M. zu den Kosten des Unternehmens beigesteuert.

Die Zahl der Abonnenten ist über 1500 gestiegen, so daß die Verlagshandlung nach § 6 und 7 des Vertrages nunmehr 120 (70 + 50) M. Honorar für den Bogen zu zahlen hat. Indessen muß die Commission auch in diesem Jahre, vor allem im Hinblick auf die zu Anfang berührten Umstände, darauf hinweisen, daß in entsprechendem Maße die Kosten des Unternehmens steigen und es

unerläßlich sein wird, die Mittel auf jedem offenstehenden Wege zu vermehren.

Das von dem Secretär Dr. Dittmann, mit Unterstützung des Assistenten Plenkers, als Citirliste für den Gebrauch des Bureaus fast vollendete Verzeichniß der sämmtlichen Autoren und Texte in chronologischer Ordnung wird auch im Buchhandel (im Verlage von B. G. Teubner) erscheinen.

Die als Reserve für den Abschluß des Unternehmens bestimmte Wölfflin-Stiftung beträgt zur Zeit M. 15866,92.

München, den 18. October 1902.

Bericht
über die ausgesetzten Preisaufgaben.

Für die auf das Jahr 1903 ausgeschriebene Preisaufgabe ist keine Bewerbungsschrift eingegangen.

Die für das Jahr 1905 gestellte Preisaufgabe lautet:

Gegenüber den ausgedehnten Kenntnissen, über die die pathologische Anatomie der Wirbelthiere verfügt, ist die Erfahrung über krankhafte Zustände der Organe und Gewebe bei Wirbellosen gering. Die K. Gesellschaft der Wissenschaften wünscht zu Untersuchungen anzuregen, mit denen hier die wissenschaftliche Erkenntnis gefördert wird. Sie stellt daher als Aufgabe, daß, ausser einer Berücksichtigung des in der Literatur vorhandenen Materiales, systematische Untersuchungen über krankhafte Zustände und Vorgänge an Organen und Geweben wirbelloser Metazoen gemacht und mitgetheilt werden.

Um die Aufgabe an Beispielen zu erläutern, so sind in Betracht zu ziehen: die Vorgänge der Degeneration und Regeneration nach Verwundungen sowohl bei der Autotomie, wie bei Verletzung durch Schnitt, Quetschung und andere Eingriffe, und die mit der senilen Degeneration verbundenen Vorgänge; die Veränderung der Organe und Gewebe unter parasitären Einflüssen, sei es von Mikroorganismen oder Pflanzen und Thieren, wie bei Muskardine, Faulbrut, Flatterie, parasitärer Castration u a. Insbesondere ist darauf zu achten, ob krankhafte Neubildungen, die Geschwulstbildungen im Wirbelthierkörper entsprechen, zur Beobachtung kommen oder erzeugt werden können. Erwünscht ist es, daß bei experimentellen Untersuchungen dieser Art die verschiedenen großen Abtheilungen der wirbellosen Metazoen herangezogen werden.

Bei der großen Ausdehnung des Gebietes wird die Aufgabe auch dann als gelöst anzusehen sein, wenn die eingelieferte Arbeit Ergebnisse bringt,

die auf eigenen Untersuchungen fußend die pathologische Anatomie in der bezeichneten Richtung erweitern und fördern.

Der Arbeit sind auf alle Fälle erläuternde Abbildungen und beweisende Präparate beizulegen. Es soll auch durch die Mittheilung einer anonymen Adresse die Möglichkeit gegeben sein, das solche nöthigenfalls vom Verfasser eingefordert werden können, ohne daß der Name des Bewerbers bekannt wird.

Die zur Bewerbung um den Preis bestimmten Arbeiten müssen vor dem 1. Februar 1905 an die königliche Gesellschaft der Wissenschaften eingeliefert werden, mit einem Spruch versehen und von einem versiegelten Zettel begleitet sein, der außen den Spruch trägt, der die Arbeit kennzeichnet, und innen den Namen und Wohnort des Verfassers. Der Preis beträgt 1000 Mark.

Verzeichnis der Mitglieder der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Ende März 1903.

Sekretäre.

Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath.
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath.

Ehren-Mitglieder.

Friedrich Althoff, Dr., Ministerial-Direktor zu Berlin, seit 1901.
Gottfried Planck, Dr., Prof., Wirklicher Geheimer Rath, Excellenz, zu Göttingen, seit 1901.
Ernst Abbe, Dr., Prof., zu Jena, seit 1901.
Georg von Neumayer, Dr., Wirklicher Geheimer Rath, Excellenz, zu Neustadt a. Hardt, seit 1901.
Wilhelm v. Hartel, Dr., k. k. Oesterreichischer Unterrichtsminister, Excellenz, zu Wien, seit 1901.
Rochus Freiherr von Liliencron, Dr., Wirklicher Geheimer Rath und Prälat, Excellenz, zu Schleswig, seit 1901.
Conrad Studt, Dr., k. Preuss. Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medicinal-Angelegenheiten, Excellenz, zu Berlin, seit 1901.
Georg Kopp, Dr., Kardinal-Fürstbischof, Eminenz, zu Breslau, seit 1902.
Julius Wellhausen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Göttingen, seit 1903.

Ordentliche Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Hermann Wagner, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1880.
Ferdinand Frensdorff, Dr. jur. und Dr. ph., Prof., Geh. Justizrath, seit 1881.
Franz Kielhorn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1882.
Karl Dilthey, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1892.
Wilhelm Meyer, Dr. ph., Prof., seit 1892.

Gustav Cohn, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1893.
Nathanael Bonwetsch, Dr. th., Prof., seit 1893.
Friedrich Leo, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1893, D. z. Sekretär.
Paul Kehr, Dr. ph., Prof., seit 1895.
Jacob Wackernagel, Dr. ph., Prof., seit 1902 (zuvor Correspondent, seit 1901).
Lorenz Morsbach, Dr. ph., Prof., seit 1902.
Eduard Schwartz, Dr. ph., Prof., seit 1902.
Edward Schröder, Dr. ph., Prof., seit 1903 (zuvor Correspondent seit 1894).

Mathematisch-physikalische Klasse.

Georg Meißner, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrath, seit 1861.
Ernst Ehlers, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1874. D. z. Sekretär.
Eduard Riecke, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1872.)
Adolf von Koenen, Dr. ph., Prof., Geh. Bergrath, seit 1881.
Woldemar Voigt, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1883.
Friedrich Merkel, Dr. med., Prof., Geh. Medicinalrath, seit 1885.
Theodor Liebisch, Dr., ph., Prof., Geh. Bergrath, seit 1887.
Felix Klein, Dr., ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1887. (Zuvor Assessor seit 1871, Correspondent seit 1872.)
Gottfried Berthold, Dr. ph., Prof., seit 1887.
Albert Peter, Dr. ph., Prof., seit 1889.
Otto Wallach, Dr. ph., Prof., Geh. Reg.-Rath, seit 1890.
David Hilbert, Dr. ph., Prof., seit 1895.
Walther Nernst, Dr. ph., Prof., seit 1898.
Emil Wiechert, Dr. ph., Prof., seit 1903.
Max Verworn, Dr. med., Prof., seit 1903.

Assessor.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Bernhard Tollens, Dr. ph., Prof. Geh. Reg.-Rath, seit 1884.

Auswärtige Mitglieder.

Philologisch-historische Klasse.

Friedrich Bechtel, Dr., Prof., zu Halle, seit 1895. (Zuvor Assessor seit 1882.)
Franz Bücheler, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1899. (Zuvor Correspondent seit 1881.)

Alexander Conze, Dr., Generalsekretär des archäol. Instituts zu Charlottenburg, seit 1890. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Leopold Delisle, Membre de l'Institut, Administrateur général de la Bibl. Nationale, zu Paris, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1866.)

P. Heinrich Denifle, Sotto-archivista della S. Sede, zu Rom, seit 1896.

Hermann Diels, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin seit 1899.

L. Duchesne, Membre de l'Institut, Abbé, zu Paris, seit 1891.

Franz Ehrle, Präfect der vaticanischen Bibliothek, zu Rom, seit 1901.

M. J. de Goeje, Prof., zu Leiden, seit 1888. (Zuvor Correspondent seit 1872.)

Friedrich Imhoof-Blumer, Dr., zu Winterthur, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1886.)

Adolf Kirchhoff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1881. (Zuvor Correspondent seit 1865.)

Ernst von Meier, Dr., Geh. Ober Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1901.

Theodor Mommsen, Dr., Prof., zu Charlottenburg, seit 1867. (Zuvor Correspondent seit 1857.)

Theodor Nöldecke, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1883. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Julius Oppert, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1876.)

Richard Pietschmann, Dr., Prof., Abtheilungsdirector an der Kgl. Bibliothek, zu Berlin, seit 1899. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1897).

Gustav Roethe, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893.)

Wilhelm Schulze, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1898.)

Theodor von Sickel, Dr., Prof., k. k. Sektionschef, zu Meran, seit 1886. (Zuvor Correspondent seit 1868.)

Wilhelm Thomsen, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.

Hermann Usener, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1899. (Zuvor Correspondent seit 1887.)

Pasquale Villari, Senatore del Regno d'Italia, zu Florenz, seit 1896.

Ulrich von Wilamowitz-Moellendorff, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1897. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892.)

Wilhelm Wilmanns, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1894.)

Mathematisch-physikalische Klasse.

Alexander Agassiz, Prof., zu Cambridge, U. S. A., seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1879.)

Arthur Auwers, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rath, Beständiger Secretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1871.)

Adolf von Baeyer, Dr., Prof., Geh. Rath, zu München, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1879.)

Wilhelm von Bezold, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1897).

Ludwig Boltzmann, Dr., Prof., k. k. Hofrath, zu Wien, seit 1887. (Zuvor Correspondent seit 1882.)

Luigi Cremona, Prof., Senator des Königsreichs Italien und Director der Ingenieurschule zu Rom, seit 1880. (Zuvor Correspondent seit 1869.)

Gaston Darboux, Dr., Membre de l'Institut, Prof., Beständiger Secretär der Académie des Sciences, zu Paris, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1883.)

Richard Dedekind, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Braunschweig, seit 1862. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Julius Elster, Dr., Professor, Oberlehrer am Gymnasium in Wolfenbüttel, seit 1902.

Wilhelm Foerster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, Director des geodät. Instituts 1886. (Zuvor Correspondent seit 1875.)

Karl Gegenbaur, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1891.

Robert Helmert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Potsdam, seit 1898. (Zuvor Correspondent seit 1896.)

Joseph Dalton Hooker, Director der Königlichen Gärten zu Sunnigdale, seit 1865.

William Thomson Lord Kelvin, Prof., zu Glasgow, seit 1864. (Zuvor Correspondent seit 1859.)

Carl Klein, Dr., Prof., Geh. Bergrath, zu Berlin, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1877.)

Albert von Kölliker, Dr. ph. und Dr. med., Geh. Rath, Excellenz, Prof., zu Würzburg, seit 1882. (Zuvor Correspondent seit 1862.)

Friedrich Kohlrausch, Dr., Präsident der phys.-techn. Reichsanstalt, zu Charlottenburg, seit 1879. (Zuvor Assessor seit 1867).

Carl Neumann, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1868. (Zuvor Correspondent seit 1864.)

Johannes Orth, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1893.)

Wilhelm Pfeffer, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1885.)

Henri Poincaré, Membre de l'Institut, Prof. zu Paris, seit 1892. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Johannes Reinke, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Kiel, seit 1885. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1882.)

Ferdinand Freiherr von Richthofen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1875).

Hermann Amandus Schwarz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1892. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1875, Correspondent seit 1869.)

H. Graf zu Solms-Laubach, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1888. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1879.)

Eduard Sueß, Dr., Prof., Präsident der K. Akademie der Wissenschaften, zu Wien, seit 1892. (Zuvor Cerrespondent seit 1884.)

Gustav Tschermak, Dr., Prof., Hofrath zu Wien, seit 1902. (Zuvor Correspondent seit 1884.)

Wilhelm Waldeyer, Dr. med. u. Dr. ph., Prof., Geh. Medicinalrath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1877.)

Heinrich Weber, Dr., Prof., zu Straßburg, seit 1895. (Zuvor ordentl. Mitglied seit 1892, Correspondent seit 1875.)

Karl von Zittel, Dr., Prof., Geh. Rath, Präsident der K. bayer. Akademie der Wissenschaften zu München, seit 1901. (Zuvor Correspondent seit 1892.)

Correspondenten.

Philologisch-historische Klasse.

Theodor Aufrecht, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1871.

Otto Benndorf, Dr., k. k. Hofrath, Director des k. k. österreichischen archäol. Instituts, zu Wien, seit 1883.

Hugo Berger, Dr., Prof. zu Leipzig, seit 1901,

Friedrich von Bezold, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.

Adalbert Bezzenberger, Dr., Prof., zu Königsberg i. Pr., seit 1884.

Gustav Bickell, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., zu Wien, seit 1901,

Wilhelm von Bippen, Dr., Staatsarchiv- und Senatssekretär, zu Bremen, seit 1894.

Sophus Bugge, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1887.
Graf Carlo Cipolla, zu Turin, seit 1898.
Maxime Collignon, Dr., Prof. an der faculté des lettres, zu Paris, seit 1894.
Julius Eggeling, Dr., Prof., zu Edinburgh, seit 1901.
Adolf Ermann, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1888.
Arthur J. Evans, Dr., Prof., zu Oxford, seit 1901.
J. F. Fleet, Dr., zu London, seit 1885.
Wendelin Förster, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1901.
Wilhelm Fröhner, Dr., zu Paris, seit 1891.
Percy Gardner, Prof., zu Oxford, seit 1886.
Charles Groß, Prof., zu Cambridge, (Mass.), U. S. A., seit 1891.
Ignazio Guidi, Prof., zu Rom, seit 1887.
Ludwig Hänselmann, Dr., Prof., Stadtarchivar, zu Braunschweig, seit 1878.
Henry Harrisse, zu Paris, seit 1892.
G. N. Hatzidakis, Dr., Prof., zu Athen, seit 1901.
Albert Hauck, Dr. th. u. Dr. ph., Prof., Geh. Kirchenrath, zu Leipzig, seit 1894.
Joh. Ludwig Heiberg, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1899.
Wolfgang Helbig, Dr., Prof., zu Rom, seit 1882.
Riccardo de Hinojosa, Dr., Prof., zu Madrid, seit 1891.
Constantin Höhlbaum, Dr., Prof., zu Gießen, seit 1889.
Georg Hoffmann, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1881.
Oswald Holder-Egger, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1896.
Theophile Homolle, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1901.
Friedrich Hultsch, Dr., Ober-Schulrath zu Dresden, seit 1885.
Eugen Hultzsch, Dr., Government Epigraphist, zu Madras, seit 1895.
Hermann Jacobi, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1894.
Finnur Jonsson, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1901.
Adolf Jülicher, Dr. th., Prof., zu Marburg, seit 1894.
Ferdinand Justi, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Marburg, seit 1875.
Konstantinos Kontos, Prof., zu Athen, seit 1892.
Adolf Köcher, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1886.
Ulrich Köhler, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1871.
Axel Kock, Dr., Prof., zu Lund, seit 1901.
Karl Koppmann, Dr., Stadtarchivar, zu Rostock, seit 1889.
Karl Kraus, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Georg Löschcke, Dr., Prof., zu Bonn, seit 1901.
Sir Clements Robert Markham, zu London, seit 1890.
Aug. Mau, Dr., Prof. und Bibliothekar des Kgl. archäologischen Instituts zu Rom, seit 1894.

Giovanni Mercati, zu Rom, seit 1901.
Eduard Meyer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1895.
Leo Meyer, Dr., Prof., k. Russ. Wirkl. Staatsrath, zu Göttingen, seit 1865. (Zuvor Assessor seit 1861.)
Adolf Michaelis, Dr., Prof., zu Straßburg, i. E., seit 1879.
Hermann Möller, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1894.
Ernesto Monaci, zu Rom, seit 1901.
Gabriel Monod, Membre de l'Institut, zu Versailles, seit 1901.
Carl Müller, Dr. th., Prof., zu Breslau, seit 1899.
Benedictus Niese, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1901.
Heinrich Nissen, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath zu Bonn, seit 1884.
Hermann Oldenberg, Dr., Prof., zu Kiel, seit 1890.
Joseph Partsch, Dr., Prof., zu Breslau, seit 1901.
Eugen Petersen, Dr., Prof., Sekretär des archäologischen Instituts, zu Rom, seit 1887.
Richard Pischel, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1889.
Max Rieger, Dr., zu Darmstadt, seit 1897.
Moritz Ritter, Dr., Prof, Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1892.
Carl Robert, Dr., Prof., zu Halle, seit 1901.
Goswin Freiherr von der Ropp, Dr., Prof., zu Marburg, seit 1892.
Dietrich Schaefer, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1894.
Otto Seeck, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1895.
Albert Sorel, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Elias Steinmeyer, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1895.
William Stubbs, D. D. Rt. Rev. Bishop of Oxford, Cuddesdon Palace near Oxford, seit 1872.
Ludwig Traube, Dr., Prof., zu München, seit 1894.
Johannes Vahlen, Dr. ph. u. Dr. jur., Prof., Geh. Reg.-Rath, Beständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften, zu Berlin, seit 1885.
Curt Wachsmuth, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1884.
Joh. Gottfried Wetzstein, Dr., Consul a. D., zu Berlin, seit 1886.
Wilhelm Windelband, Dr., Prof., zu Heidelberg, seit 1901.
Heinrich Zimmer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1894.

Mathematisch-physikalische Klasse.

Svante Arrhenius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1901.
Charles Barrois, Dr., Prof., zu Lille, seit 1901.
Max Bauer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Marburg, seit 1892.

Friedrich Beilstein, Dr., Wirkl. Staats Rath, Excellenz, zu St. Petersburg, seit 1880.
Ernst Wilhelm Beneke, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1889.
Karl Anton Bjerknes, Dr., Prof., zu Christiania, seit 1873.
Eduard Bornet, Prof., zu Paris, seit 1885.
J. Boussinesq, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1886.
Alexander Brill, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Woldemar Christoffer Brögger, Dr., Director der geologischen Reichsanstalt, in Christiania, seit 1902.
Heinrich Bruns, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1892.
Otto Bütschli, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Heidelberg, seit 1889.
Georg Cantor, Dr., Prof., zu Halle, seit 1878.
Carl Chun, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1901.
Giacomo Ciamician, Dr., Prof., zu Bologna, seit 1901.
Ulisse Dini, Prof., zu Pisa, seit 1880.
Theodor Wilhelm Engelmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Berlin, seit 1884.
Emil Fischer, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1901.
Rudolf Fittig, Dr., Prof., zu Straßburg i. E., seit 1882.
Walter Flemming, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1887.
Lazarus Fletcher, zu London, seit 1901.
F. Fouqué, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1891.
Georg Frobenius, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Sir Archibald Geikie, Director-General of the Geological Survey of the United Kingdom, zu London, seit 1889.
J. Willard Gibbs, Prof., zu Newhaven, seit 1889.
Karl Goebel, Dr., Prof., zu München, seit 1902.
Camillo Golgi, Prof., zu Pavia, seit 1892.
Paul Gordan, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1870.
Giovanni Battista Grassi, Prof., Vicesekretär der math.-naturw. Klasse der R. Academia dei Lincei, zu Rom, seit 1901.
Victor Hensen, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Kiel, seit 1892.
Ludimar Herrmann, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Königsberg i. Pr., seit 1886.
Wilhelm His, Dr. med. u. Dr. ph., Prof., Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1880.
Wilhelm Hittorf, Dr. Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Münster, seit 1879.
Jacob Heinrich van't Hoff, Dr. ph., med., jur. u. ing., Prof., zu Berlin, seit 1892.
Wilh. Theod. Bernhard Holtz, Dr., Prof., zu Greifswald, seit 1869.

William Huggins, Prof., zu London, seit 1876.
Adolf Hurwitz, Dr., Prof., zu Zürich, seit 1892.
Alexander von Karpinski, Excellenz, Präsident des Comité géologique, zu St. Petersburg, seit 1892.
Ludwig Kiepert, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Hannover, seit 1882.
Leo Königsberger, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1874.
Carl Koppe, Dr., Prof., zu Braunschweig, seit 1901.
E. Ray Lankester, Prof., Director des Natural history Museum zu London, seit 1901.
A. Michel Lévy, Membre de l'Institut, zu Paris, seit 1901.
Heinrich Limpricht, Dr. med. und Dr. ph., Prof., Geh. Reg.- zu Greifswald, seit 1860. (Zuvor Assessor seit 1857.)
Ferdinand Lindemann, Dr., Prof., zu München, seit 1882.
Rudolf Lipschitz, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1867.
Sir Joseph Norman Lockyer, Prof., zu London, seit 1876.
Hubert Ludwig, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Bonn, seit 1901.
Ernst Mach, Dr., Prof., k. k. Hofrath, zu Wien, seit 1887.
Adolf Mayer, Dr., Prof., zu Leipzig, seit 1872.
Dmitri Mendelejeff, Dr., Prof., zu St. Petersburg, seit 1892.
Franz Carl Joseph Mertens, Dr., Prof., zu Wien, seit 1877.
Hermann Minkowski, Dr., Prof., zu Göttingen, seit 1901.
Gösta Mittag-Leffler, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1878.
Edmund von Mojsisovics, Dr., Prof., k. k. Hofrath, zu Wien, seit 1902.
Simon Newcomb, Prof., Superintendent of the American Nautical Almanac, zu Washington, seit 1888.
Max Nöther, Dr., Prof., zu Erlangen, seit 1892.
Wilhelm Ostwald, Dr., Prof., Geh. Hofrath, zu Leipzig, seit 1901.
J. L. Penfield, Professor an der Yale University, zu New Haven, U. S. A., seit 1902.
Edmond Perrier, Membre de l'Institut, Director des Muséum d'Histoire naturelle zu Paris seit 1901.
Eduard Pflüger, Dr., Prof., Geh. Medicinalrath, zu Bonn, seit 1872.
Emile Picard, Membre de l'Institut, Prof., zu Paris, seit 1884.
Max Planck, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1901.
Friedrich Prym, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1891.
Georg Quincke, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Heidelberg, seit 1866.
William Lord Rayleigh, zu Witham (Essex), seit 1886.
Friedrich von Recklinghausen, Dr. Prof., zu Straßburg i. E., seit 1901.

Gustav Retzius, Dr., Prof., zu Stockholm, seit 1886.
Theodor Reye, Dr.. Prof., zu Straßburg i. E., seit 1877.
Wilhelm Conrad von Röntgen, Dr., Prof., Geh. Rath, zu München, seit 1883.
Henry Enfield Roscoe, Prof., zu London, seit 1874.
H. Rosenbusch, Dr., Prof., Geh. Bergrath, zu Heidelberg, seit 1882.
Carl Runge, Dr., Prof., zu Hannover, seit 1901.
Georg Salmon, Prof., Provost des Trinity College, zu Dublin, seit 1869.
Franz Eilhard Schulze, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1883.
Arthur Schuster, Dr., Prof., zu Manchester, seit 1901.
Simon Schwendener, Dr. ph. u. Dr. med., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1892.
Hugo Seeliger, Dr., Prof., zu München, seit 1901.
Walther Spring, Dr., Prof., zu Lüttich, seit 1901.
Johann Strüver, Dr., Prof., zu Rom, seit 1874.
Ludwig Sylow, Dr., zu Frederichshall, seit 1883.
Johannes Thomae, Dr., Prof., zu Jena, seit 1873.
Victor Uhlig, Dr., Prof., zu Wien, seit 1901.
Hermann Vöchting, Dr., Prof., zu Tübingen, seit 1888.
Hermann Vogel, Dr., Prof., Geh. Ober-Reg.-Rath, zu Potsdam, seit 1887.
Karl von Voit, Dr., Prof., Geh.-Rath u. Ober-Medicinalrath, zu München, seit 1879.
Aurelius Voß, Dr., Prof., zu Würzburg, seit 1901.
Emil Warburg, Dr., Prof., Geh. Reg.-Rath, zu Berlin, seit 1887.
Eugen Warming, Dr., Prof., zu Kopenhagen, seit 1888.
Julius Weingarten, Dr., Prof., zu Berlin, seit 1886.
Julius Wiesner, Dr., Prof., k. k. Hofrath, zu Wien, seit 1902.
Ferdinand Zirkel, Dr., Prof., Geh. Rath, zu Leipzig, seit 1886.

Benekesche Preisstiftung.

Am 11. März 1903, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Konsistorialrates Karl Gustav Beneke, wurde in öffentlicher Fakultätssitzung verkündet, daß zwei Bewerbungsschriften rechtzeitig eingeliefert worden sind, über welche die Falkultät in folgender Weise urteilt.

Das Thema der für das Jahr 1903 gestellten Preisaufgabe lautete:

„Es wird auf experimenteller Grundlage eine kritische Untersuchung solcher complexer chemischer Verbindungen gewünscht, welche sich durch die gewöhnlich angenommenen Wertigkeitsbeziehungen nicht oder nur gezwungen erklären lassen. Die Untersuchung hat namentlich Rücksicht darauf zu nehmen, wieweit bei der Bildung solcher Verbindungen das Auftreten von Molekularadditionen eine Rolle spielt und ob es möglich ist, von den complexen Verbindungen eine abgerundete Systematik zu schaffen."

Die unter dem Motto: „*Πάντα (Θεὸς) μέτρῳ καὶ ἀριθμῷ καὶ σταθμῷ διέταξε*" eingegangene Arbeit kann als vollständige Lösung der gestellten Aufgabe nicht betrachtet werden, da der Verfasser lediglich eine Hypothese über die Bindung der Atome in den Alumosilicaten bringt. Er hat demnach die gestellte Aufgabe so eng gefaßt und auf ein so spezielles Gebiet übertragen, daß ihm der erste Preis nicht zuerkannt werden konnte. In Anerkennung seiner erfolgreichen Bemühungen, wenigstens für eine sehr wichtige Gruppe complexer Verbindungen zu einer einheitlichen Auffassung zu gelangen, wurde ihm aber der II. Preis zugesprochen.

Der Verfasser der unter dem Motto: „Dies wird besser dem Einen, dem Andern jenes gelingen, doch kein Sterblicher ist tüchtig für alles zugleich" eingelaufenen Arbeit hat zwar das gestellte Thema richtig aufgefaßt. Die von ihm für die Grundlage einer Systematik der complexen Verbindungen aufgestellten Gesichtspunkte sind aber nicht originell, und da dieselben an der Hand des vorliegenden Beobachtungsmaterials weder eingehend genug begründet,

noch neue beachtenswerte Beobachtungen ad hoc beigebracht wurden, da ferner manche in der Abhandlung enthaltenen theoretischen Erörterungen zu nicht unerheblichen Bedenken Veranlassung geben, so konnte dem Verfasser ein Preis nicht zuerkannt werden.

Die Eröffnung des mit dem Motto: *Πάντα (Θεὸς) μέτρῳ* etc. versehenen Briefumschlages ergab als Verfasser der Arbeit die Herren Dr. W. Asch und Dr. D. Asch aus Plotzk (Russland).

Für das Jahr 1906 stellt die Fakultät folgende Preisaufgabe:

„Die Ueberlieferung des Hermogenes und der mit ihm zusammenhängenden rhetorischen Litteratur soll durch möglichst umfassende Untersuchungen des handschriftlichen Materials klargestellt werden. Auf Grund dieser Untersuchungen ist der Plan einer alles wichtige umfassenden Ausgabe zu entwerfen und durch Editionsproben zu illustrieren."

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1905, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Außenseite das Motto der Abhandlung trägt, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatt oder dem beigelegten Briefumschlag muß ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird.

Der erste Preis beträgt 3400 M., der zweite 680 M.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1906 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigentum ihres Verfassers.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1903 und 31. August 1904 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftliche Mitteilungen von 1901 und 1902.

Göttingen, den 30. April 1903.

Die philosophische Fakultät.

Der Dekan.

A. Peter.

Verzeichnis
der im Jahre 1902 eingegangenen Druckschriften.

A. Gesellschaftsschriften[1]).

Aarau. Argovia. Jahresbericht der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 29. 1901.

Aberdeen. Aberdeen university studies. 1901. no. 4. 5.

Adelaide. Transactions of the R. society of South Australia. Vol. 25. 1901 part 2.

Agram. Glasnik hrvatskoga naravoslovnoga društva. Godina 13. 1901/1902.

— Ljetopis jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Svezak 16. 1902.

— Rad jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti. Knjiga 146. 147. 148. 149. 1901—1902.

— Građa za povjest književnosti hrvatske. Knjiga 1. 1897. — K. 2. 1899. — K. 3. 1901.

— Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Svezak 21. 1901.

— Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Svezak 6, no. 2. 1901. — Knjiga 7, no. 1. 1902.

— Monumenta spectantia historiam Slavorum meridionalium. Vol. 30. 1901/1902.

Altenburg. Mittheilungen der Geschichts- und Alterthumsforschenden Gesellschaft des Osterlandes. Erg.-Hft. 1. 1901.

— Mitteilungen aus dem Osterlande. Hrsg. v. d. Naturforschenden Gesellschaft. N. F. Bd. 10. 1902.

Amiens. Bulletins de la société des antiquaires de Picardie. Année 1900 (1900/1901). — Ann. 1901 fasc. 1—3. (1901/1902).

1) Der Verlagsort ist nur dann besonders angegeben, wenn er nicht mit dem Sitz der Gesellschaft zusammenfällt. Das Druckjahr ist, wo es dem Jahrgang einer Zeitschrift nicht entspricht, in Klammern hinzugefügt.

Amsterdam. Jaarboek van de Koninkl. akademie van wetenschappen voor 1901 (1902).

— Verhandelingen der Koninkl. akademie van wetenschappen. Afd. wiskunde: Sectie 1, deel 4. 1901; deel 8, no. 1. 2. 1901/1902. — Sectie 2, deel 8, no. 1—6. 1901/1902; deel 9, no. 1—3. 1902/1903. —

— Verslag van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afd. der Kon. akad. van wetenschappen. Deel 10. 1901/1902.

— Verslagen en mededeelingen d. K. akademie van wetenschappen. Afd. letterkunde. Reeks 4. Deel 4. 1901.

— Centurio, carmen (Johannis Pascoli) praemio aureo ornatum in certamine poetico Hoeufftiano. Accedunt quinque poemata laudata. 1902.

— Revue semestrielle des publications mathématiques rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam. T. 10, p. 1. 2. 1902.

— Nieuw archief voor wiskunde. Uitgeg. door het wiskundige genootschap te Amsterdam. Deel 5 st. 3. 1901.

— Wiskundige opgaven met de oplossingen, door de leden van het wiskundig genootschap, ter spreuke voerende: „En onvermoeide arbeid komt alles te boven". Deel 8 st. 2. 1900. — Nieuwe opgaven. Deel 7 no. 26—75. — D. 8 no. 1—25. — Programma van jaarl. Prijsvragen voor het jaar 1902 (Dec. 1901).

— Tijdschrift van het Koninkl. nederlandsch aardrijkskundig genootschap. Ser. 2, deel 19. 1902 no. 1—6.

Antwerpen. Bulletin de la société royale de géographie d'Anvers. T. 25. fasc. 4. 1901. — T. 26. fasc. 1. 2. 1902.

Athen. *Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις ἐπιστημονικῆς ἑταιρείας. T.* 13. *τ.* 4. 1901. — *T.* 14. *τ.* 1—3. 1902.

— Bulletin de correspondance hellénique. 24. année no. 7—12. 1900. — 25. année no. 1—6. 1901.

— Mittheilungen des Kaiserl. deutschen archaeologischen Instituts. Athenische Abt. Bd. 26. 1901. H. 2—4. — Bd. 27. 1902. H. 1/2.

Augsburg. Zeitschrift des historischen Vereins für Schwaben und Neuburg. Jg. 28. 1901.

Baltimore. American journal of mathematics. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 24 no. 1. 1902.

— Johns Hopkins University circulars. Vol. 21 no. 155—160. 1902.

Baltimore. Johns Hopkins University studies in historical and political science. Ser. 19 no. 10/12. 1901. — Ser. 20 no. 1. 1902.

— Maryland geological survey. Vol. 4. 1902.

Barcelona. Boletin de la Real academia de buenos letras de Barcelona. Núm. 4—7. 1901/1902.

Basel. Verhandlungen der naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 13. Heft 3. 1902.

Batavia. Dagh-register gehouden int casteel Batavia vant passerende daer ter plaetse als over geheel Nederlandts-India. Uitg. door het Bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. Anno 1674. s'Gravenhage 1902.

— Notulen van de algemeene en bestuurs-vergaderingen van het Bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 39 afl. 3. 4. 1901. — D. 40 afl. 1. 1902.

— Verhandelingen van het Bataviaasch genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 52 stuk 1—3. 1901/1902. — D. 54 st. 1. 1902. — D. 55 st. 1. 1902.

— Tijdschrift voor indische taal- land- en volkenkunde. Deel 45 afl. 1—4. 1902.

— Naamlijst der leden op 1. Sept. 1902.

— Observations made at the magnetical and meteorological observatory at Batavia. Vol. 23. 1900 (1902).

— Regenwaarnemingen in Nederlandsch-Indië Jg. 23. 1901 (1902).

— Natuurkundig tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Uitg. door de Koningl. natuurkundige vereeniging in Nederlandsch-Indië. Deel 61 (= X, 5) 1902.

Bergen. Bergens museums aarbog for 1901 h. 2. (1902). — f. 1902 h. 1. 2. — Aarsberetning for 1900 (1901). — f. 1901 (1902).

— Sars, G. O., An account of the Crustacea of Norway with short descriptions and figures of all the species. Publ. by the Bergens Museum. Vol. 4. Copepoda, p. 3—10. 1902.

Berkeley. Annual report of the secretary to the board of regents of the university of California for the year ending 30. June 1900. Sacramento 1901. — University of California bulletins N. S. Vol. 2 no. 4. Summer session 1901. — University chronicle Vol. 4. 1901. — Register of the university 1900/1901. — W. Reid, Our new interest. An address on charter day. 1900. — W. Ch. Blasdale, A chemical study of the indument found on the fronds of gymnogramme triangularis. Thesis.

Berkeley. Bulletin of the department of geology of the university of California. Vol. 2 no. 8—12. 1901/1902.

— University of California agricultural experiment station. Bulletin no. 131—139. 1901/1902.

— University of California publications. Lick observatory bulletins Vol. 1 (no. 1—26) 1901/02. — Publications of the Lick observatory of the university of California. Vol. 5. Sacramento 1901.

Berlin. Abhandlungen d. K. Akad. d. Wissenschaften. Jg. 1901.

— Sitzungsberichte der K. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jg. 1901 no. 39—53. — Jg. 1902 no. 1—40.

— Acta Borussica. Denkschriften der Preuss. Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Hrsg. v. d. K. Akad. d. Wissensch. Münzwesen: Beschreibender Teil. Heft 1. 1902.

— Politische Correspondenz Friedrichs des Grossen. Bd. 27. 1902.

— Centralbureau der internationalen Erdmessung. Neue Folge der Veröffentlichungen. No 5. 6. 1902.

— Reichs-Marine-Amt. Bestimmung der Intensität der Schwerkraft auf zwanzig Stationen an der westafrikanischen Küste von Rio del Rey (Kamerun-Gebiet) bis Kapstadt. Ausgeführt im Auftrage des Reichs-Marine-Amtes von M. Loesch. 1902.

— Korrespondenzblatt des Gesammtvereins der deutschen Geschichts- und Alterthumsvereine. Jg. 50. 1902.

— Mitteilungen der Gesellschaft für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte. Jg. 12. 1902.

— Deutsche chemische Gesellschaft. Volhard, J. und E. Fischer, August von Hofmann. Ein Lebensbild. 1902.

— Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft. Jg. 3. 1901 No. 11—15. — Jg. 4. 1902.

— Veröffentlichung d. K. Preußischen Geodätischen Institutes N. F. No. 7—10. 1902.

— Mitteilungen des Vereins für die Geschichte Berlins. 19. Jg. 1902.

— Zeitschrift des Vereins für Volkskunde. Jg. 11. 1901, H. 4. — Jg. 12. 1902.

Bern. Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz. Hrsg. v. d. Geolog. Kommission der schweiz. naturforsch. Gesellschaft, auf

Kosten der Eidgenossenschaft. Lief. 14. Abt. 1. 2. u. Anhang. 1877. — Abt. 3. 1881. — N. F. Lief. 8. 1902. — Lief. 9. 1900. — Lief. 10. 1900. — Lief. 11. 1901. — Lief. 13. 1902. — Geotechnische Serie. Lief. 1. 1899.

Bern. Mittheilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern. Jg. 1901 (1902).

Bonn. Jahrbücher des Vereins von Altertumsfreunden im Rheinlande. Heft 108/109. 1902.

Bordeaux. Annales de la faculté des lettres de Bordeaux Année 24: Bulletin italien t. 2. 1902. — Revue des études anciennes t. 4. 1902.

— Mémoires de la société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Sér. 6, t. 1. 1901.

— Procès-verbaux des séances de la société des sciences physiques et naturelles. Année 1900—1901. (1901).

— Commission météorologique de la Gironde. Observations pluviométriques et thermométriques 1900/1901. (1901).

Boston. Proceedings of the American academy of arts and sciences. Vol 37. no. 1—23. 1901/1902.

— Proceedings of the Boston society of natural history. Vol. 29. no. 15—18. 1901. — V. 30. no. 1. 2. 1901. — Occasional papers. 6. 1901.

Boulder, Colo. Investigations of the department of psychology and education of the university of Colorado. Vol. 1 no. 1. 2. 1902.

Braunsberg. Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde Ermlands. Bd. 14 Heft 1 (= 42. H.) 1902.

Braunschweig. Braunschweigisches Magazin. Bd. 7. 1901.

— Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaft. 12. für 1899/1900 u. 1900/1901. (1902).

Bremen. Historische Gesellschaft des Künstlervereins. Bremisches Jahrbuch. Bd. 20. 1902.

Breslau. Jahresbericht der schlesischen Gesellschaft für vaterländische Cultur. 79. 1901.

Brisbane. Proceedings of the R. society of Queensland. Vol. 17 p. 1. 1902.

Brünn. Bericht der meteorologischen Commission des naturforschenden Vereins über die Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen. 19. 1899 (1901).

Brünn. Verhandlungen des naturforschenden Vereins in Brünn. Bd. 39. 1900 (1901).

Brüssel. Annuaire de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Année 68. 1902.

— Bulletin de l'académie royale des sciences etc. Classe des sciences 1901 no. 11. 12. — 1902 no. 1. 4–8. — Classe des lettres etc. 1901 no. 9—12. — 1902 no. 1. 4—8.

— Concours pour les années et prix perpétuels 1903, 1904 et 1905.

— Mémoires de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 54 fasc. 1—5. 1900/1902. — Mémoires couronnés et autres mémoires. T. 61. 1901/1902. — T. 62 fasc. 1—3. 1902. — Mémoires couronnés et mémoires des savants étrangers. T. 59 fasc. 1—3. 1901/1902.

— Commission royale d'histoire. (Collection de chroniques belges inédites:) Chartes de l'Abbaye de S. Martin de Tournai T. 2. 1901.

— Procès-verbaux de la société Belge de géologie, de paléontologie et d'hydrologie. Année 1898 t. 12 (= 2. Sér. t. 2) fasc. 4. 1901/1902. — 1899 t. 13 (= 2. Sér. t. 3) fasc. 3. 1902. — 1901 t. 15 (= 2. Sér. t. 5) fasc. 6. 1902. — 1902 t. 16 (= 2. Sér. t. 6) fasc. 1—3. 1902.

— Analecta Bollandiana. T. 20 fasc. 4. 1901. — T. 21. 1902. — Repertorium hymnologicum: Supplementum 27303–31692.

Bryn Mawr. Dissertation: Ritchie, M. H., A study of conditional and temporal clauses in Pliny the Younger. 1902.

Budapest. Magyar tudományos akadémiai almanach polgári és csillagászati naptárral. 1902.

— Értekezések a magyar tudomán. akadém. nyelv- és széptudományi osztálya köreböl. Kötet 17 szam 9. 10. 1901.

— Értekezések a történeti tudományok köreböl. Kiadja a magyar tudományos akadémia. Kötet 19. sz. 6—10. 1901/1902.

— Margalits, Ede, Horvát történelmi repertorium. Kötet 2. 1902.

— Archaeologiai értesitö. A magyar tudom. akad. arch. bizottságának és az orsz. régészeti s emb. társulatnak közlönye. Uj folyam. Kötet 21. sz. 3—5. 1901. — Köt. 22. sz. 1—3. 1902.

— Mathematikai és természettudományi értesitö. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 19. füz. 3—5. 1901. — Köt. 20. füz. 1. 2. 1902.

Budapest. Mathematikai és természettudományi közlemények vonatkozólag a hazai viszonyokra. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 28. sz. 1. 1902.

— Nyelvtudományi közlemények. Kiadja a magyar tudom. akad. Köt. 31. füz. 3. 4. 1901. — Köt. 32. füz. 1. 1902.

— Rapport sur les travaux de l'académie hongroise des sciences en 1901 (1902).

— Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn mit Unterstützung der ungar. Akad. d. Wissensch. u. d. K. ungar. naturwissensch. Gesellschaft. Bd. 17. 1899 (1901). (2 Expl.)

— Karácsonyi, János, A magyar nemzetségek a XIV. század közepéig. Köt. 2. 1901.

— Jahresbericht d. K. ungar. geolog. Anstalt für 1899 (1901).

— Mittheilungen aus dem Jahrbuch der K. ungar. geolog. Anstalt. Bd. 13. Heft 4—6. 1902. — Bd. 14. H. 1. 1902.

— Földtani közlöny. Geologische Mitteilungen. Zeitschrift der ungar. geolog. Gesellschaft. Köt. 31. 1901 füz. 5—12. — Köt. 32. 1902 füz. 1—9.

Buenos Aires. Anales de la sociedad científica Argentina. T. 52. entr. 4—6. 1901. — T. 53. entr. 1—5. 1902. — T. 54. entr. 1—4. 1902.

— Anales del museo nacional. T. 7 (= Ser. 2, t. 4). 1902.

— Comunicaciones del museo nacional de Buenos Aires. T. 1. no. 10. 1901.

— Anales de la oficina meteorológica Argentina. T. 14. 1901.

— Veröffentlichungen d. deutschen akad. Vereinigung. Bd. 1. H. 6.

Bukarest. Edițiuni academiei Române: Operele principelui Demetriu Cantemiru typarite de societatea academica Romana. Tom. 8. 1901. — Istoria Romana de Titus Livius traducere începută de N. Barbu, continuată de Nd. Locusteanu și I. S. Petrescu. T. 2. 1901. — Com. d'Hauterive, Memoriu asupra vechei și actualei stari a Moldovei 1787. 1902. — Gr. G. Tocilescu, Monumentele epigrafice și sculpturali ale museului national de antichitati din Bucuresci. Part. 1. 1902. — Acte și documente relat. la istoria renascerei României publ. de D. A. Sturdza și J. J. Skupiewski. Vol. 9. 1901.

— Analele academiei Romane: Partea administrativă și desbaterile, Ser. II. T. 24. 1901—1902 (1902). — Memoriile secțiunii lite-

rare, Ser. II. T. 23. 1900—1901 (1902). — Memoriile sectiunii sciintifice Ser. II. T. 23. 1900—1901 (1901).

Bukarest. Discursi de receptiune. T. 24. 1902.

— Ministerul agriculturei, industriei, commerciului şi domenilor. Institutul meteorologic al României: Analele T. 15. (anul 1899) (1901).

Calcutta. Bibliotheca Indica. A collection of oriental works publ. by the Asiatic society of Bengal. N. S. 999. 1001—1014. 1901/1902.

— Memoirs of the geological survey of India. Vol. 30 p. 3/4. 1901. — V. 31 p. 2/3. 1901. V. 32 p. 1/2. 1901. — V. 33 p. 2. 1901. — V. 34 p. 1. 1901.

Cambridge, Brit. Proceedings of the Cambridge philosophical society. Vol. 11 p. 4—6. 1901/1902.

— Transactions of the Cambridge philosophical society. Vol 19. p. 2. 1902.

Cambridge, Mass. Bulletin of the museum of comparative zoology at Harvard college. Vol. 38 no. 5—7. 1901/1902. — Vol. 39 no. 2—5. 1902. — Vol. 40 no. 1—3. 1902. — Vol. 41 no. 1. 1902.

— Memoirs of the museum of comparative zoology at Harvard college. Vol. 26 no. 1—3. 1902. — Vol. 27 no. 1. 2. 1902.

— Annual report of the keeper of the museum of comp. zool. for 1901/1902 (1902).

Cassel. Abhandlungen und Berichte des Vereins für Naturkunde. 47. üb. d. Vereinsjahr 1902.

Charkow. Annales de l'université impériale. 1902, 1—4. — Prilož.: F. Patenko, K sudebno-medicinskoj ekspertizě po dělu ob ubijstvě sekretarja Poltavskoj duchovnoj konsistorii A. Ja. Komarova. 1902.

— Communications de la société mathématique de Kharkow. T. 7. no. 2—6. 1900—1902.

Chemnitz. Deutsches meteorologisches Jahrbuch. Beobachtungssystem des Kgr. Sachsen. Jahrb. f. 1898 (= Jahrb. d. sächs. meteorolog. Instituts Jg. 16) Abt. 3. 1901. — Jahrb. f. 1899 (= Jg. 17) Abt. 1. 1901. Abt. 3. 1902.

— Decaden-Monatsberichte (Vorläufige Mittheilung) des K. sächsischen meteorologischen Institutes. 1901. Jg. 4. (1902).

Cherbourg. Mémoires de la société nationale des sciences naturelles et mathématiques. T. 32 (= 4. sér. t. 2). 1901—1902.

Chicago. The John Crerar library. Annual report. 7. 1901 (1902).

— Field Columbian museum. Publication 60—65. 1901/1902.

— The university of Chicago: Astrophysical journal. Vol. 14 no. 5. 1901. — V. 15 no. 1—5. 1902. — Vol. 16 no. 1—4. 1902. — Botanical gazette. Vol. 32 no. 6. 1901. — V. 33. 1902. — V. 34 no. 1—5. 1902. — Journal of political economy. Vol. 10 no. 2—4. 1901. — Journal of geology. Vol. 9 no. 8. 1901. — V. 10 no. 1—7. 1902. — American journal of semitic languages and literatures. Vol. 18 no.1—4. 1902. — V. 19 no. 1. 1902. — American journal of sociology. Vol. 7 no. 4—6. 1901. — V. 8 no. 1. 1902.

— The monist. A quarterly magazine. Vol. 12 no. 2—4. 1902. — V. 13 no. 1. 2. 1902/1903.

— The open court. V. 16. no. 1—12. 1902.

Christiania. Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1901 (1902).

— Meteorologiske institut. Den Norske Nordhavs-Expedition: Vol. 28. Zoologi (Mollusca III) 1901.

Chur. Jahresbericht der historisch-antiquarischen Gesellschaft von Graubünden. Jg. 31. 1901 (1902).

— Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. N. F. Bd. 45. 1901/1902 (1902).

Cincinnati. Bulletin of the Lloyd library of botany, pharmacy and materia medica. Mycological series. no. 1. 2. 1902. — Mycological notes. no. 5—9. 1900/1902. — Pharmacy series. no. 1. 1902. — Reproduction series. no. 1. 2. 1900/1901.

Columbus. Annual report of the board of trustees of the Ohio state university. 31. report (= Ser. 6, no. 1) part 1. 2. 1901.

Constantinopel. Annales médicales et bulletin de statistique de l'hôpital des enfants Hamidié. Année 3. 1902.

Cordoba. Boletin de la academia nacional de ciencias en Cordoba (República Argentina). Buenos Aires. T. 17 entr. 1. 1902.

Danzig. Schriften der naturforschenden Gesellschaft. Bd. 10. H. 4. 1902.

Davenport. Proceedings of the Davenport Academy of natural sciences. Vol. 8. 1899—1900 (1901).

Dortmund. Beiträge zur Geschichte Dortmunds und der Grafschaft Mark. 11. 1902.

Dresden. Neues Archiv für sächsische Geschichte und Altertumskunde. Bd. 23. 1902.

Dresden. Jahresbericht des K. sächsischen Altertums-Vereins üb. d. Vereinsjahr 77. 1901/1902 (1902).

— Mitteilungen des Vereins für Geschichte Dresdens. Heft 15. 1901.

— Dresdener Geschichtsblätter. Jg. 10. 1901.

— Jahresbericht des Vereins für Erdkunde. 27. 1901.

Dublin. Proceedings of the R. irish academy. Vol. 24. Sect. A. p. 1. 1902. — Sect. B. p. 1. 2. 1902.

— Transactions of the R. irish academy. Vol. 31 p. 12—14. 1901/1902. — V. 32 p. 1. 2. 1902.

— The economic proceedings of the R. Dublin society. Vol 1 p. 2. 1899.

— The scientific proceedings of the R. Dublin society. Vol. 9 p. 2—4. 1900/1901.

— The scientific transactions of the R. Dublin society. Vol. 7 p. 8—13. 1900/1901.

Dürkheim. Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereines der Rheinpfalz. Bd. 15a. 16. 17. 1902.

Düsseldorf. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Jahrbuch des Geschichts-Vereins. Bd. 16. 17. 1902.

Edinburgh. Proceedings of the mathematical society. Vol. 20. 1901/1902 (1902).

— Proceedings of the R. physical society. Vol. 14, p. 4. 1900/1901 (1902).

Eichstädt. Sammelblatt des historischen Vereins Eichstädt. Jg. 16. 1901 (1902).

Eisenberg. Mittheilungen des geschichts- und alterthumsforschenden Vereins. Bd. 3, H. 2 (= 17.) 1902.

Elberfeld. Zeitschrift des Bergischen Geschichtsvereins. Bd. 35 (= N. F. 25) 1900/1901 (1901).

Emden. Jahresbericht der Naturforschenden Gesellschaft in Emden. 86. 1900/1901 (1902).

Erfurt. Jahrbücher der K. Akademie gemeinnütziger Wissenschaften. N. F. Heft 28. 1902.

— Mitteilungen des Vereins für die Geschichte und Altertumskunde von Erfurt. Bd. 23. 1902.

Erlangen. Sitzungsberichte der physikalisch-medicinischen Societät. Heft 33. 1901. München 1902.

Florenz. Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Bollettino delle pubblicazioni italiane ricev. per diritto di stampa. 1901 num. 11. 12. — 1902 num. 13—24.

Frankfurt a. M. Jahresbericht des physikalischen Vereins f. 1900/1901 (1902).

Genf. Annuaire du conservatoire et du jardin botanique. Année 5. 1901. — Ann. 6. 1902.

— Bulletin de la société d'histoire et d'archéologie de Genève. T. 2. livr. 5. 1901.

— Mémoires de la société de physique et d'histoire naturelle. T. 34 p. 1. 2. 1902.

Giessen. Bericht der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde. 33. 1899—1902.

— Mittheilungen des Oberhessischen Geschichtsvereins. N. F. Bd. 11. 1902. — Fundbericht f. 1899—1900 (1902).

Görlitz. Neues Lausitzisches Magazin. Bd. 77. 1901. (2 Expl.)

— Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2. (1431 u. 1432.) 1901. (2 Expl.)

Göteborg. Göteborgs högskolas årsskrift. Bd. 7. 1901.

— Kgl. Vetenskaps och Vitterhets Samhälles Handlingar. 4. följden h. 4. 1901 m. Bihang . . . År 1900/1901, årg. 18/19.

Granville, Ohio. Bulletin of the scientific laboratories of Denison university. Vol. 11 (Febr.) 1902. — Vol. 12 (June) 1902.

'sGravenhage. Bijdragen tot de taal- land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië, uitg. door het kongl. instituut voor de taal-land- en volkenkunde van Nederlandsch-Indië. Volgreeks 6, deel 9 afl. 3/4 1901. — Deel 10. 1902.

— Naamlijst der leden op 1. Sept. 1902.

Graz. Mittheilungen des naturwissenschaftlichen Vereins für Steiermark. Jg. 38. 1901 (1902).

Greifswald. Pommersche Jahrbücher. Hrsg. v. Rügisch-Pommerschen Geschichtsverein zu Greifswald u. Stralsund. Bd. 3. 1902.

— Mittheilungen aus dem naturwissenschaftlichen Verein für Neu-Vorpommern und Rügen. Jg. 33. 1901 (1902).

Guben. Niederlausitzer Mittheilungen. Zeitschrift der Niederlausitzer Gesellschaft f. Anthropologie u. Alterthumskunde. Bd. 7, H. 1—4. 1902.

Haarlem. Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles publ. par la société hollandaise des sciences. Sér. 2, t. 7, livr. 1—5. 1902. — Herdenking van het honderdvijftigjarig bestaan van de Hollandsche Maatschappij der Wetenschappen op 7. Juni 1902. s'Gravenhage 1902.

— Archives du musée Teyler. Sér. 2, vol. 8 p. 1. 1902.

Halle. Leopoldina. Amtl. Organ d. Kaiserl. Leopoldino-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. Heft 37. 1901 no. 12. — H. 38. 1902 no. 1—11.

— Verhandlungen der Kaiserl. Leopold.-Carolin. deutschen Akademie der Naturforscher. Bd. 79. 1901.

— Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft. Bd. 55. Heft 4. 1901. — Bd. 56. H. 1. 2. 1902.

— Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes. Bd. 11. H. 4. 1902.

— Berichte aus dem physiologischen Laboratorium und der Versuchsanstalt des landwirthschaftlichen Instituts der Universität Halle. Hrsg. v. J. Kühn. Heft 16. 1902.

— Mittheilungen des Vereins für Erdkunde. 1902.

— Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturw. Vereins f. Sachsen u. Thüringen, hrsg. v. G. Brandes. Stuttgart. Bd. 74, H. 3—6. 1901.

Hamburg. Mittheilungen des Vereins für Hamburgische Geschichte. Jg. 21. 1901 (1902).

— Zeitschrift des Vereins für Hamburgische Geschichte. Bd. 11. H. 2. 1902.

— Mittheilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4, H. 2. 1902.

— Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften, hrsg. vom Naturwissenschaftlichen Verein. Bd. 17. 1902.

— Verhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins. Folge 3, Bd. 9. 1901 (1902).

Hanoi. Bulletin de l'école française d'extrême-orient. Année 1. T. 2, no. 1—3.

Heidelberg. Neue Heidelberger Jahrbücher. Hrsg. v. historisch-philosophischen Verein. Jg. 11, H. 1. 2. 1901/1902.

Heidelberg. Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins. Bd. 7, H. 1. 2. 1902.

— Mitteilungen der Grossherzoglichen Sternwarte (Astronomisches Institut). Bd 1. 1901.

Helsingfors. Acta societatis pro fauna et flora Fennica. Vol. 18. 1899/1900. — V. 19. 1900. — V. 20. 1900/1901.

— Meddelanden af societas pro fauna et flora Fennica. Häftet 24. 1901. — H. 25. 26. 1900. — H. 27. 1900/1901.

— Fennia. Bulletin de la société de géographie de Finlande. Tome 18. 1900/1901.

— Geologisk öfversiktskarta öfver Finland. Sekt. C 2. 1902.

— Meddelanden från industristyrelsen i Finland. Häftet 31. 32. 1902.

Hermannstadt. Archiv des Vereins für siebenbürgische Landeskunde. N. F. Bd. 30, H. 2. 1902.

— Jahresbericht des Vereins für siebenbürgische Landeskunde f. 1901 (1902).

— Verhandlungen und Mittheilungen des siebenbürgischen Vereins für Naturwissenschaften. Bd. 51. 1901 (1902).

Jassy. Annales scientifiques de l'université. T. 2. fasc. 1. 1902.

— Anuarul universităţei din Jaşi. Anul şcolar 1900—1901 (1902).

Innsbruck. Leopold Franz-Universität. Bericht über das Studienjahr 1900/1901. 1901.

— Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereins. Jg. 27. 1901/1902 (1902).

Iowa. Bulletin of the State university of Iowa. N. S. no. 49. Studies in psychology Vol. 3. 1902.

Ithaca. Journal of physical chemistry, publ. at Cornell university. Vol. 5, no 9 (1901). — Vol. 6. 1902.

Jurjev (Dorpat). Učenyja zapiski Imperatorskago Jur'evskago universiteta. Jg. 7. no. 2—4. 1899. — Jg. 8. no. 1—4. 1900.

Kapstadt. Cape of Good Hope geodetic survey of South Africa. Report. Vol. 2. 1901.

Kasan. Učenyja zapiski Imperatorskago Kazanskago universiteta. God 68, no. 11. 12. 1901. — God 69, no. 1 - 10. 1902.

— Bulletin de la société physico-mathématique. Sér. 2. T. 11. 1901. — T. 12, no. 1. 1902.

Kiel. Zeitschrift der Gesellschaft für Schleswig-Holstein-Lauenburgische Geschichte. Bd. 32. 1902.

Kiew. Mémoires de la société des naturalistes. T. 17, no. 1. 1901.

Klagenfurt. Carinthia I. Mittheilungen des Geschichtsvereins für Kärnten. Jg. 92. 1902.

— Jahresbericht des Geschichtsvereins für Kärnten über 1901 u. Voranschlag f. 1902.

Köln. Annalen des historischen Vereins f. d. Niederrhein. H. 73. 74. 1902. Beiheft 2. 1897, 3. 1898, 4. 1899, 6. 1902.

Königsberg i. Pr. Schriften der physikalisch-oekonomischen Gesellschaft. Jg. 42. 1901.

Kolozsvár. Értesitö az Erdélyi múzeum-egylet orvos-természet-tudományi szakosztályából. I. Orvosi szak. Évolyam 26, kötet 23, füzet 1—3. 1901/1902. — Évoly. 27, köt. 24, füz. 1/2. 1902.

Kopenhagen. Oversigt over det kong. Danske videnskabernes selskabs forhandlinger og dets medlemmers arbejder. 1901 no. 4—6. — 1902 no. 1—5.

— Det kong. Danske vidensk. selskabs skrifter. Naturvidensk. og math. afd., R. 6. Bd. 9, no. 7. 8. 1901. — Bd. 10, no. 3. 4. 1901/1902. — Bd. 11, no. 1—4. 1901/1902.

Krakau. Anzeiger der Akademie der Wissenschaften. Mathem.-naturw. Cl. 1901 no. 9. — 1902 no. 1—7. — Hist.-philos. Cl. 1901 no. 10. — 1902 no. 1—7.

— Rocznik akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1900/1901 (1901). — R. 1901/1902 (1902).

— Biblioteka pisarzów polskich. No. 41. 1902.

— Scriptores rerum Polonicarum. T. 18. 1901.

— Rozprawy akademii umiejętności. Wydz. filolog. Ser. 2. T. 18. 1901. — Wydz. histor.-filoz. Ser. 2. T. 16. 17. 18. 1902. — Wydz. matemat.-przyrodn. Ser. 2. T. 18. 1901. — T. 19a. 1902. — T. 19 b. 1901. — Ser. 3. T. 1 A., T. 1 B. 1901.

— Sprawozdania komisyi fizyjograficznej. T. 36. 1902.

— Sprawozdania komisyi do badania historyi sztuki w Polsce. T. 6: Index osób, miejscow i rzeczy. 1900. — T. 7. zesz. 1/2. 1902.

— Atlas geologiczny Galicyi. Tekst i Kart zesz. 13. 1901.

— Materiały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne wydawane staraniem komisyi antropologicznej akademii umiejętności. Tom 5. 1901.

— Catalogue of the polish scientific literature. T. 1. rok 1901 zeszyt 3. 4. — T. 2. rok 1902 zesz. 1. 2. 1901.

— Bibliografia historyi polskiej. Część 2. zesz. 4. 1901.

Landshut. Verhandlungen des historischen Vereines für Niederbayern. Bd. 38. 1902.

Lausanne. Mémoires et documents p. p. la société d'histoire de la Suisse romande. T. 4, livr. 2. 1902. — T. 5. 1902.

Lawrence Kans. The Kansas university quarterly. Ser. A. (Science a. mathem.) Vol. 10. 1901, no. 3.

— Bulletin of the university of Kansas. Science bulletin. Vol. 1, no. 1—4. 1902.

Leiden. Handelingen en mededeelingen van de maatschappij der nederlandsche letterkunde. 1901/1902 (1902).

— Nederlandsche Volksboeken op nieuw uitgegeven. I. Den droefliken strijt van Roncevale. 1902.

— Die Spiegel der Sonden. Deel 2. 1901.

— Tijdschrift voor nederlandsche taal- en letterkunde uitg. vanwege de maatschappij der nederl. letterkunde. Deel 20 (= N. R. 12) afl. 3. 4. 1901.

— Annalen der Sternwarte. Bd. 8. Haag 1902. — A. Pannekoek, Untersuchungen über den Lichtwechsel Algols. 1902. — Catalogus v. de boeken in de bibliotheek d. sterrenwacht. Supplement 4. 1892—1901. 'sGravenhage (1902).

Leipzig. Abhandlungen der philolog.-histor. Classe d. K. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften. Bd. 19, no. 3. 4. 1901. — Bd. 20, no. 5. 1902. — Bd. 21, no. 2. 1901. — Abhandlungen d. math.-physik. Cl. Bd. 27, no. 1—9. 1901/1902.

— Berichte über die Verhandlungen der Kgl. sächs. Gesellschaft d. Wissenschaften. Philolog.-histor. Cl. Bd. 53, Heft 2—4. 1901. — Bd. 54, H. 1. 2. 1902. — Mathem.-physik. Cl. Bd. 53, H. 4—7. 1901. — Bd. 54, H. 1—5. 1902. Sonderheft. 1902 (10 Expl.).

— Jahresbericht der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. März 1902.

Lemberg. Lud. Organ towarzystwa ludoznawczego. T. 8. 1902.

Lincoln. Bulletin of the agricultural experiment station of Nebraska. Vol. 12, no. 67. 69. 70. 72—74. 1900—1902. — Press bulletin. 16. 1902.

— Annual report of the U. S. agricultural experiment station of Nebraska. Presented to the governor. 15. 1902.

Linz. Jahres-Bericht des Museums Francisco-Carolinum. 60. 1902.

Liverpool. Proceedings of the literary and philosophical society. Sess. 90. 1900/1901 no. 55. (1901).

— Proceedings and transactions of the Liverpool biological society. Vol. 16. Sess. 1901/1902 (1902).

London. Proceedings of the Royal society of London. Vol. 69. no. 454—458. 1901. — Vol. 70 (= no. 459—466). 1902. Vol. 71. no. 467—468. 1902.

London. Philosophical transactions of the R. society. Vol. 197 A. 1901.— V. 198 A. 1902.

— R. society. Reports of the Malaria Committee. 6. Ser. 1902. — 7. Ser. 1902.

— Yearbook. No. 6. 1902.

— Reports to the evolution committee. Report 1. 1902.

— Monthly notices of the R. astronomical society, containing papers, abstracts of papers and reports of the proceedings of the society. Vol. 62, no. 2—9. 1902. — Vol. 63, no. 1. 2. 1902.

— The journal of the Linnean society. Botany: Vol. 26, no. 179/180. 1902. — Vol. 35, no. 244. 245. 1902. — Zoology: Vol. 28, no. 184. 185. 1902.

— Proceedings of the Linnean society. 114. Sess. from Nov. 1901 to June 1902. (1902).

— Transactions of the Linnean society. Botany: Vol. 6, part 2. 3. 1901/1902. — Zoology: Vol. 8, part 5—8. 1901/1902.

— Proceedings of the mathematical society. Vol. 34, no. 767—789. 1901/02.

— Journal of the R. microscopical society for 1902, part 1—6.

— Proceedings of the general meetings for scientific business of the zoological society. 1901, Vol. 2 p. 2 (1902). — 1902, Vol. 1 p. 1. 2. 1902. — Vol. 2 p. 1. 1902. — Index to 1891—1900 (1902). — List of fellows. Mai 31. 1902.

— Transactions of the zoological society. Vol. 16 p. 5—7. 1902.

— Catalogue of the library of the zoological society of London. 5. edit. 1902.

— Report of H. M.'s astronomer at the Cape of Good Hope to the secretary of the admiralty for the year 1901 (1902).

— Account of the operations of the great trigonometrical survey of India. Vol. 16. Dehra Dun 1901.

Lübeck. Mitteilungen des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Heft 9, No. 3—12. 1900.

— Zeitschrift des Vereins für Lübeckische Geschichte und Alterthumskunde. Bd. 8. H. 2. 1900.

Lüttich. Annales de la société géologique de Belgique. T. 28, livr. 4. 1902. — T. 29, livr. 1—3. 1902.

— Mémoires de la société royale des sciences. Sér. 3. T. 4. 1902.

Lund. Acta universitatis Lundensis. Lunds universitets årsskrift. T. 36, no. 1. 2. 1900. — T. 37, no. 1. 2. 1901.

Luxemburg. Publications de la section historique de l'institut royal grand-ducal de Luxembourg (ci-devant „Société archéologique du grand-duché"). Vol. 49, fasc. 2. 1901. — V. 50, f. 1. 1901.

Luzern. Der Geschichtsfreund. Mittheilungen des historischen Vereins der fünf Orte Luzern, Uri, Schwyz, Unterwalden und Zug. Bd. 57. 1902.

Lyon. Annales de l'université de Lyon. Nouvelle série. Droit, lettres: fasc. 7. 8. 1901. — Sciences, médecine: fasc. 5—9. 1901/1902.

— Mémoires de l'académie des sciences, belles-lettres et arts. 3. série, sciences et lettres T. 6. 1901.

— Annales de la société Linnéenne. Nouv. sér. T. 47. 1901. — T. 48. 1901.

— Annales de la société d'agriculture, histoire naturelle et arts utiles. Sér. 7. T. 7/8. 1899/1900 (1901).

— Bulletin historique du diocèse de Lyon paraissant tous les deux mois sous le patronage des facultés catholiques de Lyon. 3. année 1902 no. 13—18.

Madison. Publications of the Washburn observatory of the university of Wisconsin. Vol. 10, p. 2. 1901.

Madras. Madras government museum. Bulletin. Vol. 4, no. 2. 1901.

Madrid. Boletin de la Real academia de la historia. T. 40. 41. 1902.

— Memorias de la R. academia de ciencias exactas, fisicas y naturales. T. 14, fasc. 1. 1890. Atlas fasc. 1. (je 2 Expl.).

Mailand. Memorie del R. istituto Lombardo di scienze e lettere. Cl. di sc. mat. e nat. Vol. 19. 1900, fasc. 5—8.

— R. istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Vol. 34. 1901.

Manchester. Memoirs and proceedings of the literary and philosophical society. Ser. 4, vol. 46, p. 3—5. 1901/1902. — Vol. 47, p. 1. 1902.

Mannheim. Mannheimer Geschichtsblätter. Monatsschrift f. d. Geschichte, Altertums- und Volkskunde Mannheims u. d. Pfalz. Hrsg. v. Altertumsverein. Jg. 2. 1901. — Jg. 3. 1902.

Marseille. Annales de la faculté des sciences de Marseille publ. sous les auspices de la municipalité. T. 12. 1902.

Meiningen. Schriften des Vereins für Meiningische Geschichte und Landeskunde. Heft 40—42. 1902.

Meissen. Mittheilungen des Vereins f. d. Geschichte der Stadt. Bd. 6, Hft. 1. 1901.

Melbourne. Proceedings of the R. society of Victoria. Vol. 12, p. 1. 1899. — V. 14, p. 2. 1902. — V. 15, p. 1. 1902.

Metz. Jahrbuch der Gesellschaft für lothringische Geschichte u. Alterthumskunde. Jg. 13. 1901.

Mexico. Boletin mensuel del observatorio meteorologico central. 1901, Julio-Octubre.

— Boletin del instituto geologico de Mexico. Num. 15. 1901.

Missoula, Mont. Bulletin of the university of Montana. No. 3. 1901.

Mitau. Kurländische Gesellschaft für Literatur und Kunst. Jahrbuch für Genealogie, Heraldik und Sphragistik. 1900 (1902).

Mölln i. Lbg. Vaterländisches Archiv für das Herzogtum Lauenburg. N. F. Bd. 10 (= Archiv d. Vereins f. d. Geschichte d. Herzogt. Lauenburg, Bd. 7) Heft 1. 1902.

Montevideo. Anales del museo nacional de Montevideo. T. 3 fasc. 22. 1901. — T. 4 f. 1. 1902.

Montpellier. Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la Sect. des sciences. 2. Sér. T. 3, no. 1. 1901. — Catalogue de la bibliothèque. Partie 1. 1901.

Moskau. Matematičeskij sbornik. Recueil mathématique publ. p. la société mathématique. T. 22, no. 2—4. 1901/1902. — T. 23, no. 1. 2. 1902.

— Bulletin de la société impériale des naturalistes. Année 1901, no. 3/4. — Ann. 1902, no. 1/2.

— Bogoslovskij věstnik izdavaemyj Moskovskoju duchovnoju akademieju. God 11. 1902.

München. Abhandlungen der Kgl. bayer. Akademie der Wissenschaften. Hist. Cl. Bd. 22. Abt. 2. 1902.

— Sitzungsberichte der Kgl. bayer. Akademie d. Wissenschaften. Philos.-philol. u. hist. Cl. Jg. 1901 H. 5. — Jg. 1902 H. 1. 2. — Mathem.-physik. Cl. Jg. 1901 H. 4. — Jg. 1902 H. 1. 2.

— Pöhlmann, R., Griechische Geschichte im neunzehnten Jahrhundert. Festrede, geh. am 13. März 1902.

— Monumenta Boica. 47 (= N. F. 1) 1902.

München. Historischer Verein. Oberbayerisches Archiv für vaterländische Geschichte. Bd. 51, Heft 1. 2. 1901/1902.

— Altbayerische Monatsschrift, hrsg. v. d. histor. Verein für Oberbayern. Jg. 3. 1901/1902. H. 3–6.

Neapel. Rendiconto dell' accademia delle scienze fisiche e matematiche (Sezione della società reale di Napoli) Ser. 3, vol. 7. 1901 f. 12. — Vol. 8. 1902 f. 1—7.

Neuburg a. D. Kollektaneen-Blatt für die Geschichte Bayerns, insbesondere des ehemaligen Herzogtums Neuburg, hrsg. v. d. historischen Verein. Jg. 64. 1900.

New Haven. Journal of the american oriental society. Vol. 22 p. 2. 1901. — V. 23 p. 1. 1902.

New York. Journal of the american geographical society of New York. Vol. 33, no. 5. 1901. — V. 34, no. 1—4. 1902.

— Bulletin of the american mathematical society. Vol. 8, no. 3—10. 1902. — V. 9, no. 1—4. 1902.

— Columbia university in the City of New York. Annual reports of the president and treasurer to the trustees with accompanying documents for the year ending June 30. 1902.

— Columbia university quarterly. Vol. 5, no. 1. 1902.

Nürnberg. Abhandlungen der naturhistorischen Gesellschaft. Bd. 14. 1902. — Jahresbericht für 1900. — Jahresb. f. 1901.

— Anzeiger und Mittheilungen aus dem germanischen Nationalmuseum. Jg. 1901, H. 1—4. — Katalog der Gewebesammlung. Teil 2. 1901.

Odessa. Mémoires de la société des naturalistes de la Nouvelle-Russie. T. 24, no. 1. 1901.

Osnabrück. Mittheilungen des Vereins für Geschichte und Landeskunde von Osnabrück. Bd. 26. 1901 (1902).

Ottawa. Geological survey of Canada. No. 722. 1901. — No 783. 1901.

— Contributions to Canadian palaeontology. Vol. 2, p. 2. 1900. — V. 4, p. 2. 1901.

— General index to the reports of progress 1863 to 1884. 1900.

Palermo. Rendiconti del circolo matematico. T. 16. 1902.

— Giornale di scienze naturali ed economiche. Vol. 23. 1901.

Paris. Société de l'histoire de France. Delisle, L., Notice de douze livres royaux du XIIIe et du XIVe siècle. 1902. —

Heures de Turin (de Jean de France). 1902. — Ordericus Vitalis, Historiae eccles. libri 7 et 8. 1902.

Paris. Comité international des poids et mesures. Procès-verbaux des séances. Sér. 2. T. 1. 1901 (1902).

— Travaux et mémoires du bureau international des poids et mesures. T. 12. 1902.

— Annales du musée Guimet. T. 30. 1902. — Bibliothèque d'études. T. 10. 1901. — T. 13. 1901. — Revue de l'histoire des religions. Année 19, t. 43, no. 3. 1901. — T. 44. 1901. — T. 45. 1902.

— Bulletin de la société mathématique de France. T. 29. 1901, fasc. 4. — T. 30. 1902, fasc. 1—3.

— Journal de l'école polytechnique. Sér. 2. Cah. 7. 1902.

— Rapports présentés au congrès international de physique réuni à Paris en 1900. Vol. 4. 1901.

Philadelphia. Annals of the american academy of political and social science. Vol. 19. 1902. — V. 20. 1902.

— Proceedings of the academy of natural sciences. Vol. 53, p. 2. 3. 1901. — V. 54, p. 1. 1902.

— Alumni report, publ. by the alumni association of the Philadelphia college of pharmacy. Vol. 37. 1901, no. 12. — Vol. 38. 1902.

— Proceedings of the american philosophical society held at Philadelphia for promoting useful knowledge. Vol. 40. 1901, no. 167. — Vol. 41. 1902.

— University of Pennsylvania. Bulletin. II. Series. no. 1. p. 2. (= Provost's Report) 1901. — Catalogue 1901/1902 (1901).

— Publications of the university of Pennsylvania. Proceedings of „University Day". II. Ser. no. 2 p. 4. 1902.

— Proceedings of the American pharmaceutical association. Vol. 49. 1901.

Pisa. Annali della R. scuola normale superiore. Filosofia e filologia. Vol. 15. 1902.

— Atti della società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 18. 1902. — Processi verbali. Vol. 12 p. 231—266. 1901. — Vol. 13 p. 1—40. 1902.

Plauen i. V. Mitteilungen des Altertumsvereins. Jahresschrift 15. 1901/1902 (1902). — Beil.: C. v. Raab, Das Amt Plauen im Anfang des 16. Jahrhunderts und das Erbbuch vom Jahre 1506. 1902.

Poona. Publications of the Maharaja Takhtasingji observatory. Vol. 1. Bombay 1902.

Posen. Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jg. 2. 1901, no. 4—12. — Jg. 3. 1902, no. 1—6.

— Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jg. 16. 1901. — Jg. 17. 1902, 1. Halbbd.

— Roczniki towarzystwa przyjaciół nauk Poznańskiego. T. 27. zesz. 3. 4. 1901. — T. 28. 1902.

Potsdam. Jahresbericht des Direktors des Königl. Geodätischen Instituts f. 1901/1902 (1902).

— Verhandlungen der 13. allgem. Conferenz der internationalen Erdmessung, Teil 2. Berlin 1901.

Prag. Jahresbericht der Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. 1901 (1902).

— Sitzungsberichte der Kgl. böhmischen Gesellschaft der Wissenschaften. Cl. f. Philos., Gesch. u. Philologie Jg. 1901 (1902). — Mathem.-naturw. Cl. Jg. 1901 (1902).

— Bericht über die Säcularfeier der Erinnerung an das vor 300 Jahren erfolgte Ableben des Reformators der beobachtenden Astronomie Tycho Brahe ... am 24. Okt. 1901 (1902).

— Magnetische und meteorologische Beobachtungen an d. k. k. Sternwarte. Jg. 62. 1901 (1902).

— Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst und Litteratur in Böhmen. A. Schubert, Urkunden-Regesten aus den ehemaligen Archiven der von Kaiser Joseph II. aufgehobenen Klöster Böhmens. Innsbruck 1901.

— Rechenschaftsbericht, erstattet vom Vorstande der Gesellschaft zur Förderung deutscher Wissenschaft, Kunst u. Litt. in Böhmen i. J. 1901 ... am 7. März 1902.

— Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medicin. Vereines „Lotos". Jg. 1901 N. F. 21 (= g. R. Bd. 49).

— Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jg. 40, no. 1—4. 1901/1902.

— Festschrift des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen seinen Mitgliedern gewidmet zur Feier des 40-jähr. Bestehens, 27. Mai 1902.

Prag. Spisův poctěných jubilejní cenou král. české společnosti nauk Číslo 12. Hrubý, H., České postilly. 1901. — Číslo 13. Rádl, E., O morfologickém významu dvojitych oči u členovců. 1901.

Pressburg. Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde. N. F. Heft 13. 1901 (1902).

Regensburg. Verhandlungen des historischen Vereins von Oberpfalz und Regensburg. 53. (N. F. 45) 1901.

Rennes. Faculté des lettres de l'université. Annales de Bretagne. T. 13. 1897/1898. — T. 14. 1898/1899. — T. 15. 1899/1900. — T. 16. 1900/1901. — T. 17. 1901/1902. — T. 18. 1902.

— Bibliothèque Bretonne Armoricaine. Fasc. 1. 1895. — F. 2. 1896.

— Bulletin de la société scientifique et médicale de l'ouest. T. 10, no. 3. 4. 1901. — T. 11, no. 1. 2. 1902. — Supplément: Joubin, L., Histoire de la faculté des sciences de Rennes 1900 pag. 1—172.

Riga. Korrespondenzblatt des Naturforscher-Vereins. Jg. 45. 1902.

Rio de Janeiro. Archivos do museu nacional. Vol. 10. 1899. — V. 11. 1901.

Rom. Atti della R. accademia dei Lincei. Rendiconti. Cl. di scienze morali, storiche e filol., Ser. 5. Vol. 10, fasc. 10—12. 1901. — Vol. 11, fasc. 1—6. 9/10. 1902.

— Atti della R. accad. dei Lincei. Cl. d. sc. morali, storiche e filol., parte 2. Notizie degli scavi. Ser. 5. Vol. 9, settembre-dicembre 1901. — V. 10, genn.- sett. 1902.

— Atti della R. accad. dei Lincei. Rendiconti. Cl. di sc. fisiche, matematiche e naturali. Ser. 5. Vol. 10. 1901, 2. sem. fasc. 11. 12. — Vol. 11. 1902, 1. sem. fasc. 1—12. — 2. sem. fasc. 1—11.

— Rendiconto dell' adunanza del 1 giugno 1902 (2 Expl.).

— Bullettino della società filologica Romana. Num. 1. 1901. — N. 2. 1902.

Rostock. Beiträge zur Geschichte der Stadt Rostock. Hrsg. im Auftrage des Vereins f. Rostocks Alterthümer v. K. Koppmann. Bd. 3, Hft. 3. 1902.

Salzwedel. Jahresbericht des Altmärkischen Vereins für vaterländische Geschichte und Industrie. Abt. f. Gesch. Jg. 29. Magdeburg 1902.

San Francisco. Occasional papers of the California academy of sciences. 8. 1901.

— Proceedings of the California academy of sciences. Ser. 3. Botany: Vol. 2, no. 3—9. 1901/1902. — Zoology: Vol. 2, no. 7—11. 1901. — Vol. 3, no. 1—4. 1901/1902.

San Francisco. Transactions and proceedings of the geographical society of California. Ser. 2. Vol. 1. 1902.

Santiago (Chile). Anales de la universidad. 1901, junio-agosto, octubre, noviembre.

— Actes de la société scientifique du Chile. Tome 11. livr. 2—5. 1902.

St. Gallen. Neujahrsblatt des histor. Vereins von St. Gallen, 4. Folge. 1902.

— Mitteilungen zur vaterländischen Geschichte. Bd. 28. 1902.

— Jahresbericht über die Sammlungen des Histor. Vereins des Kantons für 1900/1901 (1901).

St. Louis. The transactions of the academy of science. Vol. 10, no. 9—11. 1900/1901. — Vol. 11. 1901/1902.

St. Petersburg. Annuaire du musée zoologique. T. 6. 1901, no. 2—4. — T. 7. 1902, no. 1/2.

— Bulletin de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg. Sér. 5. T. 13, no 4. 5. 1900. — T. 14. 1901. — T. 15. 1901. — T. 16, no. 1—3. 1902.

— Catalogue des livres. 1. Publications en langue russe. 1902.

— Sbornik otdělenija russkago jazyka i slovesnosti Imperatorskoj akademii nauk. T. 66. 1900. — T. 67. 1901. — T. 68. 1901.

— Zapiski Imperatorskago russkago archeologičeskago obs̆čestva. Novaja seria. T. 1—12. 1886—1901.

— Zapiski vostočnago otdělenija Imperatorskago russkago archeologičeskago obs̆čestva. T. 1—14. 1886—1902. — Ukazaleli k tomam 1—10 1886—1896 (1897).

— Izvěstija Imperatorskago geografičeskago obs̆čestva. T. 37. 1901 vyp. 4. 5. — T. 38. 1902 vyp. 1. 2.

— Otčet Imperatorskago russkago geografičeskago obs̆čestva 1901. (1902).

— Strannik, duchovnyj žurnal sovremennoj žisni, nauki i literatury. God 42. 1901. T. 2 no. 12. — God 43. 1902. T. 1. — T. 2. — Priloženie: Obs̆čedostupnaja bogoslovskaja biblioteka. Vyp. 7. 1901.

— Cerkovnyj věstnik, izdav. pri S.-Peterburgskoi duchovn. akademii. Eženedělnyj žurnal z ežeměsjačnymi knižkami pribavlenii. God 28. 1902, no. 1—51/52. — Priloženie: Christianskoe čtenie. God 82. 1902, vyp. 1—12.

— Trudy geologičeskago komiteta (Mémoires du comité géol.) T. 18, no. 1—3. 1900/1901.

Siena. Bullettino Senese di storia patria. Anno 8, fasc. 3. 1901. — Anno 9, f. 1. 2. 1902. — Relazione e indici pubbl. p. il congresso internaz. di scienze stor. 1902.

Spalato. Bullettino di archeologia e storia Dalmata. Anno 23. 1900. — Anno 24. 1901. — Anno 25, no. 1—8. 1902. — F. Bulić, Dove giaceva Stridone, la patria di S. Girolamo. 1899 (Estratto dal Bullettino a. 1899 fasc. 7—8).

Speier. Mitteilungen des Historischen Vereines der Pfalz. Hft. 25. 1901.

Stavanger. Stavanger museums aarshefte. 12. aarg. f. 1901 (1902).

Stockholm. Öfversigt af Kongl. vetenskaps-akademiens förhandlingar. Årg. 58. 1901 (1901/02).

— Kongliga svenska vetenskaps-akademiens handlingar. Ny följd. Bd. 35. 1901/1902. — Bihang. Bd. 27. 1901.

— Dunér, N. C., Tal vid K. vetenskaps-akademiens minnesfest den 24. oktober 1902 trehundraårsdagen af Tycho Brahes död. 1901.

— Jak. Berzelius självbiografiska anteckningar. Utgif. af K. svenska vetensk.-akad. genom H. G. Söderbaum. 1901.

— Minnesfesten öfver Berzelius den 7. oktober 1898. Beskrifning af L. F. Nilson och S. Jolin. 1901.

— Meteorologiska jakttagelser i Sverige, utg. af K. svenska vetenskaps-akademien anställda ... under inseende af meteorologiska Central-Anstalten. Bd. 39. 1897 (1902).

— Sveriges offentliga bibliotek. Accessions-Katalog No. 14. 1901. — 15. 1901/1902. —

Strassburg. Jahrbuch für Geschichte, Sprache und Litteratur Elsass-Lothringens hrsg. v. d. historisch-litterarischen Zweigverein des Vogesen-Clubs. Jg. 18. 1902.

Stuttgart. Württembergische Vierteljahrshefte für Landesgeschichte, hrsg. von der Württemberg. Kommission f. Landesgeschichte. Jg. 12. 1902.

Sunderland. Publications of West Hendon House observatory. No. 2. 1902.

Sydney. Journal and proceedings of the R. society of New South Wales. Vol. 35. 1901 (1902). — Abstract of proceedings 1901 Mai 1.

— Department of mines and agriculture. Records of the geological survey of New South Wales. Vol. 7, p. 2. 1901.

Sydney. Geological survey of New South Wales. Mineral resources. 10. 1901. — G. W. Card, Handbook to the mining and geological museum. 1902.

— Report of the 8. meeting at Melbourne 1900 of the Australasian association for the advancement of science. 1901.

Taschkent. Publications de l'observatoire astronomique et physique. No. 3. 1901 & Atlas.

Throndhjem. Det Kgl. norske videnskabers selskabs skrifter. 1901 (1902).

Tiflis. Nabljudenija Tiflisskoj fizičeskoj observatorii. 1898 (1901).

Tokio. The journal of the college of science. Imperial university of Japan. Vol. 16 p. 1. 2. 6—14. 1901/1902. — Vol. 17 p. 1—3. 7—10. 1901/1902.

— Mittheilungen aus der medizinischen Fakultät der kaiserlich-japanischen Universität. Bd. 5, No. 2. 4. 1901/1902.

— Tōkyō Sūgaku-Butsurigaku Kwai Kiji. Maki no. 8. Dai 1. 6.

— Publications of the earthquake investigation committee in foreign languages. No. 8—11. 1902.

— Mittheilungen der deutschen Gesellschaft für Natur- und Völkerkunde Ostasiens. Bd. 8, Th. 3. 1902. — Bd. 9, Th. 1. 1902. — H. Haas, Geschichte des Christenthums in Japan. Bd. 1. 1902. — Festschrift zur Erinnerung an d. 25-jähr. Stiftungsfest der Deutschen Gesellschaft f. Natur- u. Völkerk. Ostasiens. 1902.

Toronto. University of Toronto studies. Biological series no. 2. 1902. — Physiological series no. 3. 1901.

Toulouse. Annales de la faculté des sciences pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Sér. 2. Tom. 3, fasc. 3. 4. 1901. — T. 4, f. 1. 2. 1902.

Tufts College, Mass. Tufts college studies. No. 7. 1902.

Turin. Atti della R. accademia delle scienze di Torino. Vol. 37, fasc. 1—15. 1902.

— Memorie della R. accademia delle scienze. T. 51. 1902.

— Annuario della R. università degli studi. 1901 1902 (1902).

— Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1901 all' osservatorio della R. università. 1902.

Urbana, Ill. Bulletin of the Illinois state laboratory of natural history. Vol. 6, art. 1. 1901.

Upsala. Bulletin of geological institution of the university. Vol. 5 p. 2. (no. 10) 1902.

Upsala. Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique de l'université. Vol. 33. 1901 (1901/1902).

— Nova acta regiae societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. 3, vol. 20 fasc. 1. 1901.

Washington. Bulletin of the United States national museum. No. 50 p. 1. 1901.

— Memoirs of the national academy of sciences. Vol. 8, no 5. 6. 1900. 1902.

— Report of the superintendent of the U. S. naval observatory for the year ending June 30. 1901. — June 30. 1902.

— Publications of the U. S. naval observatory. Ser. 2, vol. 2. 1902.

— Report of the superintendent of the U. S. coast and geodetic survey showing the progress. Year 1899/1900 (1901).

— Annual report of the U. S. geological survey to the secretary of the interior. 21. 1899—1900 p. 2. 1900; p. 3. 4. 1901; p. 5. 1900 and maps; p. 7. 1901.

— Bulletin of the U. S. geological survey. No. 177—190. 1901/1902. — No. 192—194. 1902.

— Mineral resources of the U. S. geological survey 1900 (1901). — F. Ch. Schrader and A. C. Spencer, The geology and mineral resources of a portion of the Copper River district, Alaska. 1901. — A. H. Brooks, G. B. Richardson, A. J. Collier and W. C. Mendenhall, Reconnaissances in the Cape Nome and Norton Bay regions, Alaska, in 1900. 1901.

— Treasury department. Special publication no. 7. 1902.

Werden. Historischer Verein für das Gebiet des ehemaligen Stiftes. Beiträge zur Geschichte des Stiftes. Heft 8. 1901. — Beil.: Festgabe zur Feier der 1100-jährigen Gründung Werdens. 1902.

Wien. Kaiserliche Akademie der Wissenschaften. Süd-arabische Expedition. Bd. 3. 1902 (= A. Jahn, die Mehri-Sprache). — Bd. 4. 1902 (= H. Müller, die Mehri- und Soqotri-Sprache).

— Archiv für österreichische Geschichte. Hrsg. v. der zur Pflege vaterländischer Geschichte aufgestellten Commission d. Kais. Akad. d. Wissensch. Bd. 89. 2. Hälfte 1900. — Bd. 90. 1902. — Bd. 91. 1. Hälfte 1902.

— Denkschriften der Kais. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 47. 1902. — Mathem.-naturw. Cl. Bd. 69. 1901. — Bd. 70. 1901. — Bd. 73. 1901.

Wien. Fontes rerum Austriacarum. Oesterreichische Geschichtsquellen. Hrsg. v. der Histor. Commiss. d. K. Akad. Bd. 52, Abt. 2. 1901. — Bd. 53, Abt. 2. 1901. — Bd. 54, Abt. 2. 1901.

— Sitzungsberichte der Kais. Akad. d. Wissensch. Philos.-histor. Cl. Bd. 143. 1901. — Mathem.-naturw. Cl. Abth. I. Bd. 109, H. 8—10. 1900. — Bd. 110, H. 1—7. 1901. — Abth. II. a. Bd. 109, H. 8—10. 1900. — Bd. 110. 1901. — Abth. II. b. Bd. 109, H. 8—10. 1900. — Bd. 110, H. 1—9. 1901. — Abth. III. Bd. 109, H. 8—10. 1900. — Bd. 110. 1901.

— Tabulae codicum manu scriptorum praeter Graecos et Orientales in bibliotheca Palatina Vindobonensi asservatorum ed. Academia Caesarea Vindob. Vol. 10. 1899.

— Mitteilungen der Erdbeben-Commission der Kais. Akad. d. Wissensch. N. F. No. 1—8. 1901/1902.

— Jahrbücher der k. k. Central-Anstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. Jg. 1899. N. F. Bd. 36 (= 44. Band), Th. 2. 1900. — Jg. 1900. N. F. Bd. 37 (= 45. Bd.), Th. 1. 1902.

— Meteorologische Zeitschrift. Hrsg. von der österreich. Gesellschaft f. Meteorologie u. d. deutschen meteorolog. Gesellschaft. Bd. 18. 1901, H. 12. — Bd. 19. 1902, H. 1—11.

— Publicationen für die internationale Erdmessung. Die Astronomisch-Geodätischen Arbeiten des k. u. k. Militär-Geographischen Institutes zu Wien. Hrsg. vom k. u. k. Militär-Geographischen Institute Bd. 17. 1901. — Bd. 18. 1902.

— Publicationen der v. Kuffner'schen Sternwarte in Wien (Ottakring). Bd. 6, Th. 1. 1902.

— Verhandlungen der K. K. zoologisch-botanischen Gesellschaft. Bd. 51. 1901, H. 9/10. — Bd. 52. 1902.

— Jahrbuch der K. K. geologischen Reichsanstalt. Bd. 51. 1900, H. 1. 2. — Bd. 52. 1902, H. 1.

— Verhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. Jg. 1901, no. 15—18. — Jg. 1902, no. 1—10.

— Abhandlungen der K. K. geologischen Reichsanstalt. Bd. 6, 1. Hälfte 1873—1902. — Bd. 17, Heft 5. 1901. — Bd. 19, H. 1. 1902.

— Blätter des Vereins für Landeskunde von Niederösterreich. N. F. 35. 1901.

Wien. Urkundenbuch von Nieder-Oesterreich. I. Das Urkundenbuch des aufgehobenen Chorherrenstiftes St. Pölten. Th. 2. Bog. 23—31, I—V. 1901.

— Topographie von Niederösterreich. Hrsg. v. d. Verein f. Landeskunde von Niederösterreich. Bd. 5, H. 13/14. 1901.

Wiesbaden. Annalen des Vereins für Nassauische Altertumskunde u. Geschichtsforschung. Bd. 32. 1902.

— Mitteilungen des Vereins für Nassauische Altertumskunde u. Geschichtsforschung an seine Mitglieder. Jg. 1901/1902 (1902).

— Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jg. 55. 1902.

Worms. Vom Rhein. Monatsschrift des Altertums-Vereins der Stadt Worms. Jg. 1. 1902.

Würzburg. Archiv des historischen Vereins von Unterfranken und Aschaffenburg. Jg. 43. 1901. — Jahresbericht d. histor. Vereins 1900 (1901).

— Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Gesellschaft. Jg. 1900, no. 5. — Jg. 1901. — Jg. 1902, no. 1. 2.

— Verhandlungen der physik.-mediz. Gesellschaft. N. F. Bd. 34, no. 7—11. 1901. — N. F. Bd. 35, no. 1—3. 1902.

Zürich. Anzeiger für Schweizerische Altertumskunde (& Mitteilungen aus dem Verbande der Schweizerischen Altertumssammlungen). N. F. Bd. 3, no. 4. 1902. — Bd. 4, no. 1. 1902. — Beil.: J. R. Rahn, Zur Statistik schweizerischer Kunstdenkmäler: Kunst- und Architekturdenkmäler Unterwaldens ... beschr. v. R. Durrer, Bog. 13—15.

— Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft. No. 2. 1902.

— Mittheilungen der antiquarischen Gesellschaft. Bd. 25, H. 3. 1902.

— Jahrbuch für schweizerische Geschichte, hrsg. auf Veranstaltg. d. allgem. geschichtsforschenden Gesellschaft der Schweiz. Bd. 27. 1902.

— Publikationen der Sternwarte des Eidgenössischen Polytechnikums. Bd. 3. 1902.

— Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jg. 46, H. 3. 4. 1901. — Jg. 47, H. 1. 2. 1902.

— Astronomische Mitteilungen gegr. v. Rud. Wolf, hrsg. v. A. Wolfer. Nr. 93. (Separatabdr. a. d. Vierteljahrsschrift ... Jg. 47. 1902.)

Zürich. Schweizerisches Landesmuseum, Jahresbericht 10. 1901 (1902).

— Internationale Erdmessung. Das Schweizerische Dreiecksnetz hrsg. v. d. Schweizerischen geodätischen Kommission. Bd. 9. 1901.

Zwickau. Mitteilungen des Altertumsvereins für Zwickau und Umgegend. Hft. 7. 1902.

B. Anderweitig eingegangene Schriften.

Acta mathematica. Journal rédigé par G. Mittag-Leffler. Stockholm. Bd. 25. 1901/1902. — Bd. 26. 1902.

Bjerknes, V., The dynamic principle of circulatory movements in the atmosphere. (Read bef. the Deutsche Naturforschergesellschaft at Munich. August 1899.) [Reprinted from the Monthly Weather Review for October 1900.]

—, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie. Bd. 2. Leipzig 1902.

Bradford, W., The Creswick field and its mining. Ballarat o. J. (= The „Indicator" Series of booklets on gold mining. No. 3.)

Bretzl, H., Botanische Forschungen des Alexanderzuges nach Theophrasts Auszügen aus den griechischen Generalstabsschriften. (Inaugural-Dissertation . . . der Universität zu Strassburg.) 1902.

Brioschi, F., Opere matematiche. Pubbl. p. cura del comitato per le onoranze a Francesco Brioschi. T. 2. Milano 1902.

Χατζιδάκις, Γ. Ν., Ἀκαδημεικὰ ἀναγνώσματα. T. 1. 1902. (= *Βιβλιοθήκη Μαρασλῆ. Ἀριθ.* 175—178.)

La **Chronique** de France. Publ. sous la direction de P. de Coubertin. 2. année. Paris 1901. — Carnet bibliographique 1902.

Ciamician, G. e P. **Silber,** Azioni chimiche della luce. I. Bologna 1901. [Estratto d. serie V, tomo IX, delle Memorie d. R. accad. d. scienze d. istit. di Bologna.]

Ciamician, G., Ricerche sperimentali eseguite nel biennio 1899—1900 nel laboratorio di chimica generale della R. università di Bologna . . . o. J.

Cleveland, The physical basis of long-range weather forecasts. [Reprinted from the Monthly Weather Review f. December 1901.]

Comes, O., Chromographical table for tobacco in Asia, — in Africa, — in America, — in Europe, — in Oceania. Napoli 1900. [5 Tabellen.]

Couchoud, P. L., Benoit de Spinoza. Paris 1902. (Les grands philosophes.)

Czapek, F., Untersuchungen über die Stickstoffgewinnung und Eiweissbildung der Pflanzen. Braunschweig 1902. [Sonderabdr. aus: Beiträge zur chemischen Physiologie und Pathologie. Bd. 1, Heft 10 bis 12.]

—, Zur Kenntniss der Stickstoffversorgung und Eiweissbildung bei Aspergillus niger. Berlin 1902. [Sonderabdr. aus den Berichten der Deutschen Botanischen Gesellschaft. Jg. 1901. Bd. XIX.]

Le **Devoir.** Revue des questions sociales. Tome 26. Paris 1902.

Encyklopaedie der mathematischen Wissenschaften. Hrsg. von H. Burkhardt u. W. F. Meyer. Th. 1, Bd. 1, H. 7. Leipzig 1902 (2 Expl.). — Bd. 2, 2. H. 1. 1901 (2 Expl.). — Bd. 3a. H. 1. 1902. — Bd. 3, 3. H. 1. 1902. — Bd. 4, 1. H. 2. 1901 (2 Expl.).

Encyclopedia, The Jewish. Vol. 1. Aach-Apocalyptic Literature. New York and London 1901.

Evans, A. J., The palace of Knossos. Provisional report of the excavations for the year 1901. [Reprinted from the Annual of the british school at Athens. No. VII. 1900—1901.]

Fritsche, H., Die tägliche Periode der erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg 1902.

Galilei, Galileo, Opere. Edizione nazionale sotto gli auspicii di S. M. il Re d'Italia. Vol. 12. Firenze 1902.

Gibbs, J. W., Elementary principles in statistical mechanics developed with especial reference to the rational foundation of thermodynamics. New York 1902.

Guccia, G. B., Sulle curve algebriche piane. [Estratto d. Rendiconti d. circolo matem. di Palermo. T. XVI. 1902.]

—, Sulle superficie algebriche. [Estratto d. Rendiconti d. circolo matem. di Palermo. T. XVI. 1902.]

Guidi, I., Vocabolario Amarico-Italiano. Roma 1901.

Haasemann, L., Der Pendelapparat für relative Schweremessungen der deutschen Südpolarexpedition. [Sonderabdr. a d. Zeitschrift für Instrumentenkunde, 1902, April.]

Hauswaldt, H., Interferenz-Erscheinung an doppelt brechenden Krystallplatten im convergenten polarisirten Licht. Photographisch aufgenommen. Mit einem Vorwort von Th. Liebisch in Göttingen. Magdeburg 1902.

O. **Hübner's** Geographisch-statistische Tabellen aller Länder der Erde. 51. Ausg. Frankfurt a. M. 1902.

Hugues, L., Un seul champignon sur le globe! Port-Louis, Maur. 1902.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Hrsg. v. E. Lampe. Bd. 30, H. 3. 1901. — Bd. 31. 1902.

Janet, Ch., Les fourmis. Paris 1896.

—, Remarque relative à l'emploi de la classification décimale. Paris 1896. [Extrait du Bulletin de la société zoologique de France, tome XXI, 1896.]

—, Notice sur les travaux scientifiques présentés à l'académie des sciences au concours de 1896 pour le prix Thore (o. O. u. J.).

—, Les habitations à bon marché dans les villages de moyenne importance. [Extrait des Comptes rendus du congrès internat. des habitations à bon marché tenu à Bruxelles en 1897.]

—, Sur l'emploi de désinences caractéristiques dans les dénominations des groupes établis pour les classifications zoologiques. Beauvais 1898. [Extrait des Mémoires de la société académique de l'Oise. Année 1898.]

—, L'esthétique dans les sciences de la nature. Paris 1900. [Extrait du Bulletin de la société zoologique de France. Année 1900.]

—, Notes sur les fourmis et les guêpes. No. 1—15. [Extraits des Comptes rendus des séances de l'académie des sciences 1893—1899.]

—, Études sur les fourmis, les guêpes et les abeilles. Note 14. Limoges 1897. — Note 15. Paris 1897. [Extr. d. Mémoires de la soc. zool. de France. Ann. 1897.] — Note 16. Lille 1897. — Note 17. Paris 1898. — Note 18. Paris 1898.

Jornal de sciencias mathematicas e astronomicas publ. pelo Dr. F. G. Teixeira. Vol. 14, fasc. 5. 6. Coimbra 1901. — V. 15, f. 1. 1902.

Kimball, H. H., Some causes of the variability of earthshine. (Read bef. the astron. and physic. society of Toronto 1901.) [Reprinted from the Monthly Weather Review for Mai 1901.]

Klein, F., Anwendung der Differential- und Integralrechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien. Vorlesung, gehalten während d. S. S. 1901. Ausgearb. v. Conrad Müller. Leipzig 1902.

Kölliker, A., Ueber die oberflächlichen Nervenkerne im Marke der Vögel und Reptilien. Leipzig 1902. [Sonderabdr. aus: Zeitschrift für wissenschaftliche Zoologie. LXXV, 1.]

Kölliker, A., Weitere Beobachtungen über die Hofmann'schen Kerne am Marke der Vögel. [Abdr. aus: Anatomischer Anzeiger XXI. Bd. No. 3. 1902.]

Kohlschütter, E., Einige vorläufige Resultate von Längenbestimmungen in Deutsch-Ostafrika und allgemeine Bemerkungen über Längenbestimmungen mit Hülfe des Mondes. [Sonderabdr. a. d. Mittheilungen aus den deutschen Schutzgebieten. Bd. XV. 1902, H. 1. Berlin 1902.]

Krisch, A., Astronomisches Lexikon auf Grundlage der neuesten Forschungen. Lief. 1.

Kuljukin, S. L, Sušč̆nost christianstva prof. Adolfa Garnaka (= Christianstvo, nauka i nevěrie na zarě XX věka. Vypusk 1.) Petrograd 1902.

Light, The greater. (By E. B. Latch.) New York. Vol. 3, no. 4. 6—12. 1901. — Vol. 4, no. 1—3. 1902.

Mc Adie, A. G., Fog studies on Mount Tamalpais. [Reprinted from the Monthly Weather Review for November 1900.]

Meier, Abt Berthold, Legenden und Geschichten des Klosters St. Aegidien zu Braunschweig. Im Auftr. d. Staatsbehörden hrsg. v. Ludwig Haenselmann. Wolfenbüttel 1900.

Mercati, G., Frammenti Urbinati d'un' antica versione Latina del libro II de' Maccabei. Roma. (o. J.)

—, Nuovi frammenti dei libri 58—59 de Basilici in un palinsesto Vaticano. [Estratto dal „Rendiconti del R. ist. Lomb. di sc. e lett.", ser. II, vol. XXXIV, 1901.]

—, Note di letteratura biblica e cristiana antica. Roma 1901.

—, Antiche reliquie liturgiche Ambrosiane e Romane con un excursus sui frammenti dogmatici Ariani del Mai. Roma 1902.

Meyer, L., Handbuch der griechischen Etymologie. Bd. 4. Leipzig 1902.

Nature. London and New York. Vol. 65, no. 1677—Vol. 67, no. 1730. 1901—02.

Niederlein, G., Ressources végétales des colonies Françaises représentées dans les collections de „l'Office Colonial" du ministère des colonies. Paris 1902.

Nissen, H., Italische Landeskunde. Bd. 2, die Städte. 1902.

Passalsky, P., Anomalies magnétiques dans la région des mines de Krivoï-Rog. Odessa 1901.

Pastrana, M. E., Informe al secretario de fomento sobre las observaciones ejecutados durante el eclipso total de sol de 28. de mayo de 1900. Texto. Atlas. México 1901.

Peixotto, J. B., The french revolution and modern french socialism. Thesis. New York. (o. J.)

Penfield, S. L., The stereographic projection and its possibilities, from a graphical standpoint. New Haven 1901. [Reprint of an article which first appeared in the January and February number of the American Journal of science and arts 1901.]

— On the use of the stereographic projection for geographical maps and sailing charts. [From the Americ. Journal of science, Vol. XIII. Mai 1902.]

—, On the solution of problems in crystallography by means of graphical methods, based upon spherical and plane trigonometry. [From the Americ. Journ. of science. Vol. XIV. Oct. 1902.]

— and W. F. **Hildebrand,** Some additions to the alunie- farosite group of minerals. [From the Americ. Journ. of. science. Vol. XIV. Sept. 1902.]

Raimund, E., Racconti prodigiosi. Torino 1902.

Revue historique. Paris. Année 27. Tome 79. 1902. — T. 80. 1902. — Ann. 28. T. 81, no. 1. 1903.

Riecke, E., Lehrbuch der Physik zu eigenem Studium und zum Gebrauche bei Vorlesungen. Bd. 1 (= Mechanik u. Akustik. Optik.) Leipzig 1902. — Bd. 2 (= Magnetismus, Elektricität, Wärme) 1902.

—, Lehrbuch der Experimental-Physik. Ins Japanische übersetzt von Shunkici Kimura. Bd. 2. (= § 303—655.) Tokio 1901.

Riefler, S., Das Nickelstahl-Compensationspendel. München 1902.

Riemann, B., Gesammelte Mathematische Werke. Nachträge hrsg. von M. Noether u. W. Wirtinger. Leipzig 1902.

Rosenbusch, H., Studien im Gneissgebirge des Schwarzwaldes. II. Die Kalksilikatfelsen im Rench- und Kinzigitgneiss. [Sonderabdr. a. d. Mitteilungen d. Grossh. Badisch. Geolog. Landesanstalt. IV. Bd. 3. H. 1901.]

Saint-Lager, Histoire de l'Abrotonum. Signification de la désinence ex de quelques noms de plantes. Paris 1900.

—, La perfidie des synonymes dévoilée à propos d'un Astragale. Lyon 1901.

Schulze, F. E., An account of the Indian Triaxonia collected by the Royal Indian Marine Survey Ship Investigator. The German original translated into English by Robert von Lendenfeld. Calcutta 1902.

Segesser, H. von, Die Quadratur des Kreises, ein gelöstes Problem. Luzern 1902.

Siacci, F., Alcune nuove forme di resistenza che riducono il problema balistico alle quadrature. Roma 1901. [Estratto dalla Rivista d'artiglieria e genio 1901, Vol. III e IV.]

Spitaler, R., Die periodischen Luftmassenverschiebungen und ihr Einfluss auf die Lagenänderungen der Erdachse. (Breitenschwankungen). Gotha 1901. [Ergzgshft. No. 137 zu „Petermann's Mitteilungen".]

Spring, W., Sur les causes de la variété des teintes des eaux naturelles et sur la clarification des liquides par l'électricité. Liège 1901. [Extr. du Compte rendu du Ve congrès internat. d'hydrologie médicale, de climatologie et de géologie (Liège 1898).]

—, Sur les conditions dans lesquelles certains corps prennent la texture schisteuse. Liège 1902. [Extrait des Annales de la société géologique de Belgique, t. XXIX, Mémoires.]

—, Recherches expérimentales sur la filtration et la pénétration de l'eau dans le sable et le limon. Liège 1902. [Extrait des Annales de la société géologique de Belgique, XXIX, Mémoires.]

Stark, J., Die Elektrizität in Gasen. Leipzig 1902.

Tschelebi Ewliyâ, siyâhat-nâme si. (= Reisebeschreibung des Ewliya Tschelebi.) Bd. 6. Constantinopel. A. H. 1318.

Thesaurus linguae Latinae ed. Academ. quinque German. Vol. 1, fasc. 4. 5. Leipz. 1902. — Vol. 2, fasc. 3. 4. 1902/1903.

Vignaud, H., Toscanelli and Columbus. The letter and chart of Toscanelli... London 1902.

Vogel, H. C., Ueber die Bewegung des Orionnebels im Versionsradius. [Abdr. aus: Sitzungsberichte d. K. Preuss. Akad. d. Wissensch. zu Berlin 1902, XIV.]

—, Der grosse Refractor des Königl. Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. [Sonderabdr. a. d. Zeitschrift f. Instrumentenkunde. 1902. H. 6.]

Wolf, C., Histoire de l'observatoire de Paris de sa fondation à 1793. Paris 1902.

Wolfer, A., Revision of Wolf's sun-spot relative numbers. [Reprinted from the Monthly Weather Review f. April 1902.]

G. G. Stokes.

Von

W. Voigt.

Die starke Bewegung in der Entwickelung der Physik, inmitten deren wir uns noch heute frohen Herzens fühlen, hat etwa in der Zeit der großen Revolution in Frankreich eingesetzt. Es war, als wenn die politischen Stürme in jenem Lande gleichzeitig jede Geisteskraft zu neuem Schaffen erregt und auch jedem Talent Raum zur Bethätigung geschafft hätten.

Etwa 30 Jahre hindurch behauptete Frankreich in der Physik die führende Stelle; dann traten England und Deutschland an seine Seite, ja selbst an die Spitze der Bewegung.

Einer der letzten Vertreter des großen Aufschwunges der physikalischen Forschung in England, der mit Faraday so überaus glanzvoll einsetzt, George Gabriel Stokes, ist vor wenig Wochen in seinem 84. Lebensjahre dahingegangen. Die Bedeutung des seltenen Mannes, der 40 Jahre unserer Gesellschaft angehört hat, rechtfertigt, selbst in einer Versammlung von Vertretern überwiegend fremder Fächer, eine etwas ausführlichere Schilderung seines Lebenswerkes. Fehlte Stokes auch die universelle Begabung eines W. Thomson, hat er sich speciell den Gebieten der Electro- und Thermodynamik, auf denen wohl die größten Leistungen der englischen Physik im vorigen Jahrhundert liegen, fast völlig fern gehalten, so ist er dafür in anderen für geraume Zeit der führende Geist gewesen und hat ihnen seinen Namen für alle Zeiten verbunden.

Die ältesten Arbeiten[1]) von Stokes, anhebend mit dem Jahre 1842, behandeln Probleme der Hydrodynamik, und zwar spe-

1) Transact. of the Cambr. Phil. Soc. 7, 439, 1842, 8, 105, 1843, Math. and phys. Pap. 1, 1 u. 17.

ciell derjenigen Bewegungen incompressibler sog. idealer Flüssigkeiten, welche man als Potentialbewegungen bezeichnet. Sie zeigen deutlich, wie sich der junge Forscher von Seite der reinen Mathematik her der Physik zuwendet; vieles, was er giebt, hat wesentlich nur analytisches Interesse, doch knüpfen sich an manchen Stellen bereits wichtige physikalische Fragen an. Ein Beispiel ist die Bestimmung der Bewegung einer Flüssigkeit in dem Zwischenraum zwischen zwei concentrischen Kugeln, wenn die Begrenzungen beliebig dislocirt oder deformirt werden. Das Problem scheint auf den ersten Blick mit der Wirklichkeit wenig zu thun zu haben, und die Voraussetzungen sind in voller Allgemeinheit jedenfalls nicht realisirbar; aber specielle Fälle haben schon einigermaßen practische Bedeutung, so derjenige der kleinen Oscillationen einer Pendelkugel in der Mitte eines durch eine feste Kugelfläche begrenzten Flüssigkeits- oder Luftquantums.

Ein anderer naheliegender Specialfall, nämlich der der Oscillation einer mit einer Flüssigkeit gefüllten Kugel, ist schon vor Stokes erledigt worden; Stokes löst in der zweiten der genannten Abhandlungen ein diesem verwandtes, aber viel schwierigeres Problem, die Oscillation eines rings geschlossenen parallelopipedischen Gefäßes mit Flüssigkeit, dessen Hauptinteresse allerdings wiederum auf mathematischem Gebiete liegt, aber durch einen eigenthümlichen Umstand sehr erheblich ist. Das von Stokes abgeleitete Resultat löst nämlich zugleich ein Problem von anscheinend ganz anderer Natur, und zwar dasjenige der Torsion eines rechteckigen Prismas, das mehrere Jahre später von De Saint Venant auf diese Weise behandelt worden ist.

Eine demselben Gebiet angehörige Abhandlung[1]) vom Jahre 1847 beschäftigt sich mit der Theorie von Flüssigkeitswellen in einem Canal unter der speciellen Voraussetzung, daß die Höhe der Wellen sehr klein ist gegen die Tiefe der Flüssigkeit; sie zieht auch den Fall in Betracht, daß in dem Canal zwei Flüssigkeiten, z. B. Wasser und Luft über einander geschichtet sind, und beide an der Bewegung Theil nehmen, wobei sie in der Grenzfläche an einander hingleiten.

Aber diese Arbeiten über die Bewegungen idealer Flüssigkeiten treten an Bedeutung zurück gegenüber denjenigen Untersuchungen, durch welche Stokes sich bemühte, die Brücke von den idealen zu den wirklichen Flüssigkeiten zu schlagen.

Die großen mathematischen Schwierigkeiten der Theorie zwin-

1) Transact. of the Cambr. Phil. Soc. 8, 441, 1847, Papers 1, 197.

gen in sehr vielen Fällen dazu, eine in Wirklichkeit vorhandene Eigenschaft der Flüssigkeiten, die unter Umständen auf die Vorgänge nur wenig influirt, gänzlich zu vernachlässigen, also an Stelle der wirklichen Flüssigkeiten gedachte Körper zu setzen, die jener Eigenschaft, der sogenannten inneren Reibung gänzlich entbehren. Der Unterschied der idealen und der wirklichen Flüssigkeiten läßt sich am deutlichsten machen an dem Fall einer rotirenden, etwa in ein cylindrisches Gefäß eingeschlossenen Flüssigkeitsmasse. Hier ist bei einer idealen Flüssigkeit jede Art von Geschwindigkeitsvertheilung, die rings um die Axe gleichförmig ist, also die Flüssigkeit in ein System von je als Ganzes rotirenden Ringen zerlegt, möglich und beständig; die verschieden schnellen Ringe gleiten an einander hin, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.

Der Vorgang in einer wirklichen Flüssigkeit ist hiervon durchaus verschieden; ein schnellerer Ring beschleunigt einen benachbarten langsameren, verzögert einen schnelleren, — allgemein herrscht eine Tendenz zur gegenseitigen Ausgleichung der Geschwindigkeiten. Es ist klar, daß diese innere Reibung um so stärker in Action treten muß, je größere Geschwindigkeitsdifferenzen durch die übrigen Bedingungen des Vorganges bewirkt werden, und es giebt offenbar Fälle, wo ihre Vernachlässigung in der Theorie Resultate liefert, die von der Wirklichkeit fundamental abweichen.

Die Vervollständigung der hydrodynamischen Gleichungen, welche die Berücksichtigung der inneren Reibung nöthig macht, ist zuerst von Navier und Poisson aus unter sich abweichenden Hypothesen über die Wechselwirkungen zwischen Flüssigkeitsmolekülen abgeleitet worden. Die Uebereinstimmung der beiderseitigen Resultate ließ schließen, daß ein Zurückgehen auf molekulare Wirkungen bei diesem Problem überhaupt nicht nothwendig wäre, und Stokes hat in der That in einer umfänglichen Arbeit[1]) vom Jahre 1845 eine Ableitung gegeben, die nur die Annahme benutzt, daß die Reibungskräfte allein abhängig sind von der relativen Bewegung der Flüssigkeit in der Umgebung des betrachteten Punktes; dabei wird für das Gesetz dieser Abhängigkeit schließlich der denkbar einfachste (lineäre) Ansatz gemacht, dessen Resultate sich als im Einklang mit der Theorie erweisen.

Von neuen Anwendungen bringt jene erste Abhandlung über die innere Reibung nur weniges: die Theorie der Dämpfung stehender Schwingungen und diejenige der Bewegung einer Flüssig-

1) Transact. of the Cambr. Phil. Soc. 8, 287, 1845; Papers 1, 75.

keit zwischen zwei mit verschiedenen Geschwindigkeiten rotirenden coaxialen Cylinderflächen. Aber das letztere Problem hat bedeutendes practisches Interesse; es ist eines von den wenigen, die sich mit Strenge behandeln lassen, es läßt sich leicht realisiren und die Beobachtung gestattet eine wichtige Prüfung der Theorie, sowie die Bestimmung der für die innere Reibung maßgebenden Constanten der Flüssigkeit [1]).

Ausblicke auf die Theorie der Elasticität, die sich in der besprochenen Abhandlung finden, können hier nicht erörtert werden. Dagegen muß etwas näher auf eine überaus wichtige Anwendung der Theorie der Flüssigkeitsreibung eingegangen werden, die eine große Abhandlung [2]) vom Jahre 1850 enthält.

Die Umstände, welche eine genaue Bestimmung der Größe der Schwerkraft erfordern, sind bekannt. Einerseits ist die Schwere in vielen Fällen physikalischer Beobachtung ein wesentlicher in Rechnung zu setzender Factor, andrerseits ist das Gesetz ihrer Aenderung auf der Erdoberfläche ein Ausgangspunkt für wichtige Folgerungen über den Zustand des Erdinnern.

Das Instrument, das zur Bestimmung der Schwerkraft dient, ist das Pendel; seine Oscillationsdauer hängt von der Größe der Schwere ab. Aber die Pendelbeobachtungen werden in der Atmosphäre angestellt, und diese influirt in complicirter Weise auf die Bewegung des Pendels. So lange man die Luft als eine ideale, d. h. reibungslose Flüssigkeit ansah, bot die Theorie dieser Einwirkung keine allzugroße Schwierigkeit. Aber die auf Grund dieser Annahme erhaltenen Formeln stimmten, wie besonders höchst genaue Beobachtungen von Bessel [3]) zeigten, nicht mit der Erfahrung, und somit war durch sie eine Elimination des Einflusses der Luft, also kann eine genaue Bestimmung der Größe der Schwerkraft nicht möglich.

Bessel überwand diese Schwierigkeit in genialer Weise. Durch eine Ueberlegung der Wirkungsweise der innern Reibung gelangte er zu einem hypothetischen Ansatz für die Form der ihr entsprechenden Correction an der Pendelformel; er erfand ein Mittel, diesen Ansatz durch geeignete Combination von Beobachtungen zu prüfen und nach erfolgter glänzender Bestätigung mit dessen Hülfe seine Messungen wegen des Einflusses der Luftreibung zu corrigiren.

Wenn nun auf diese Weise auch das specielle Ziel erreicht war, so blieb doch die Aufgabe bestehen, das durch Intuition un-

1) C. Brodmann, Wied. Ann. **45**, 159, 1892.
2) Transact. of the Cambr. Phil. Soc. **9**, 8, 1850; Papers **2**, 1.
3) F. W. Bessel, Abh. d. Ber. Ac. v. 1826.

mittelbar ergriffene Resultat aus der Theorie der inneren Reibung rechnerisch abzuleiten. Ihre Lösung ist das Hauptproblem der Stokes'schen Abhandlung vom Jahre 1850, welche die Theorie der Oscillation einer Kugel innerhalb einer reibenden Flüssigkeit behandelt, einmal in dem Fall, daß die letztere unbegrenzt ist, und sodann in dem andern, daß sie durch eine feste, der oscillirenden nahe concentrische Kugelfläche begrenzt wird. An diese Hauptaufgabe schließen sich verwandte; so die Theorie der gleichförmigen geradlinigen Bewegung einer Kugel in einer unendlichen reibenden Flüssigkeit, von der eine interessante Anwendung auf den äußerst langsamen Fall kleiner Wassertröpfchen in der Luft und damit auf die Erklärung des Schwebens der Wolken gemacht wird.

Diese Untersuchungen, die Stokes für alle Zeit in die Reihe der ersten Förderer der Hydrodynamik stellen, fanden in seiner Heimath schnelle Anerkennung. Letztere drückte sich u. a. aus in der Uebertragung eines Reports über die Fortschritte der Hydrodynamik für die British Association von 1846, eine ehrenvolle Aufgabe, die Stokes in überaus klarer und knapper Form löste [1]).

Spätere Abhandlungen über eigene hydrodynamische Untersuchungen, wie auch wesentlich referirende Artikel über actuelle Fragen desselben Gebietes können hier nicht besprochen werden. Dagegen dürfen wir in diesem Zusammenhange eine schöne Arbeit vom Jahre 1851 über die Wärmeleitung in Krystallen [2]) erwähnen, da es sich bei ihr um Fragen handelt, welche bei allen Erscheinungen, die unter dem Bilde einer Flüssigkeitsströmung dargestellt werden können, auftauchen. In der bedeutungsvollen kleinen Abhandlung besitzen die allgemeinen Resultate und die geistreiche Methode, durch eine Zerlegung das complicirte Problem in zwei einfache zu zerlegen, gleiches und außerordentliches Interesse.

Arbeiten über die Form der Erde und über das Gesetz der Schwere an ihrer Oberfläche, welche zeitlich zwischen die oben besprochenen fallen, können hier nur erwähnt werden, ebenso zwei umfängliche rein mathematische Untersuchungen über die Berechnung gewisser Integrale und die Summation gewisser Reihen. Wir wenden uns zu andern physikalischen Abhandlungen, die in den behandelten Gebieten Epoche gemacht haben.

Unter den optischen Fragen, welche Stokes beschäftigten, ist merkwürdiger Weise die erste eine der allerschwierigsten, das Problem der Aberration des Lichtes. Die von Fresnel gegebene

1) Papers **1**, 157.

2) Cambr. and Dublin Math. Journ. **6**, 215, 1851.

allgemeine Theorie der Einwirkung einer Bewegung auf die Fortpflanzung des Lichtes ruht bekanntlich auf den Hypothesen, daß der Lichtäther in der Umgebung der Erde an deren Bewegung keinen Antheil nimmt, ihr auch keinen Widerstand entgegensetzt, aber im Innern bewegter Körper der ponderabeln Masse mit einer Geschwindigkeit folgt, die von deren Brechungsindex abhängt. Diese Annahmen erscheinen wenig plausibel, nicht allein deswegen, weil der Brechungsindex keine dem Körper individuelle Constante ist, sondern auch weil keinerlei Analogon solcher mechanischen Eigenschaften bei anderen Medien bekannt ist. Stokes zeigt nun [1]), daß man eine Erklärung der Aberrationserscheinungen geben kann, ohne die Annahme eines absolut ruhenden Aethers zu machen, daß man den Aether wie eine Flüssigkeit durch die Erdbewegung beeinflußt annehmen darf und doch stets die beobachteten Erscheinungen erhält, wenn man ihn nur an der Erdoberfläche relativ zur Erde ruhend denkt und im Uebrigen eine beliebige sogenannte Potentialbewegung ausführen läßt. Das Zustandekommen einer solchen Bewegung wird dann ausführlich plausibel gemacht.

Es mag bemerkt werden, daß die neueste Entwickelung der Aberrationstheorie [2]) an diese Ueberlegungen nicht angeknüpft hat, daß vielmehr die electromagnetische Lichttheorie, wie in so manchen andern Fällen, auch hier sehr nahe zu dem zurückleitet, was der Seherblick Fresnels errathen hatte.

Eine größere optische Arbeit [3]) aus dem Jahre 1848, enthaltend die Theorie gewisser Interferenzerscheinungen, muß als ohne principielle Bedeutung trotz der Sauberkeit ihrer Ausführung übergangen werden. Merkwürdiger ist eine andere [4]) aus demselben Jahre, welche die Theorie einer eigenthümlichen, von Newton entdeckten, von Fresnel zum zweiten Male gefundenen und auch qualitativ erklärten Erscheinung enthält. Es handelt sich dabei im Wesentlichen um die Thatsache, daß bei der sogenannten totalen Reflexion (z. B. in Glas an Luft) im zweiten Medium (also Luft) eine zunächst nur in ganz geringe Tiefe eindringende Schwingungsbewegung besteht, die sich aber in größere Entfernung fortpflanzt, wenn man sie auf ein weiteres Stück des ersten Medium (also Glas) auffallen läßt. Die im zweiten Medium stattfindende

---

1) Phil. Mag. **27**, 9, 1845; Ib. **28**, 76, 1846; Ib. **29**, 6, 1846; Papers **1**, 134, 141, 153.

2) H. A. Lorentz, Versuch einer Theorie etc. Leiden 1895.

3) Phil. Trans. for 1848, 227; Papers **2**, 14.

4) Transact. of the Cambr. Phil. Soc. 8, 642, 1848; Papers **2**, 56.

stattfindende Bewegung ist zuerst von Fr. Neumann völlig aufgeklärt, später auch von Anderen untersucht worden. Das Neue, was Stokes hinzuthut, ist die Behandlung des Eindringens dieser Schwingungen in ein drittes Medium. Seine Lösung des vorliegenden Problemes ist allerdings unvollständig, insofern sie die in Wirklichkeit stattfindenden wiederholten Reflexionen außer Betracht läßt; doch kommt dieser Umstand praktisch nicht erheblich zur Geltung.

Auf den Inhalt einer großen Arbeit[1]) aus dem Jahre 1849 „on the Dynamical Theory of Diffraction", die zu Stokes bedeutendsten Leistungen gehört, muß etwas näher eingegangen werden.

Für die Beugungserscheinungen hatte abermals Fresnel die Hülfsmittel der Erklärung, wie auch eine höchst merkwürdige Regel zur Berechnung der Intensitätsverhältnisse angegeben. Inzwischen war die Theorie der Elasticität aufgebaut worden, und da man die Lichterscheinungen auf Schwingungen in einem elastischen Medium zurückführte, so ergab sich von selbst die Aufgabe, die Divination Fresnels mit Hülfe der Analysis zu prüfen, eventuell zu korrigiren und zu ergänzen. Aber das allgemeine Problem der Beugung bietet analytische Schwierigkeiten, die auch jetzt noch nicht überwunden sind.

Stokes schlug nicht den Weg ein, den die neueste Entwickelung[2]) genommen hat, ein specielles Problem streng zu behandeln, er wollte nichts von der Allgemeinheit aufgeben und opferte die Strenge; insbesondere behielt er die unter dem Namen des Huyghens'schen Principes bekannte fundamentale Hypothese bei. Demgemäß hat die von Stokes mit bewundernswürdiger Kraft und Zähigkeit durchgeführte Untersuchung die ihr ehemals zugesprochene abschließende und entscheidende Bedeutung nicht behalten; unangetastet stehen seine allgemeinen Sätze über Ausbreitung von Schwingungen in einem unbegrenzten elastischen Medium, aber ihre Anwendungen auf die Beugungstheorie sind nicht einwandsfrei, und die s. Z. so viel discutirten Resultate, welche die elastische Bedeutung der Polarisationsebene des Lichtes erweisen sollten, werden nur noch von Wenigen anerkannt. Hat doch die Beobachtung und im Einklang mit ihr die electromagnetische Lichttheorie gezeigt, daß die Polarisationsverhältnisse des gebeugten Lichtes von der Natur des beugenden Schirmes abhängen, die in Stokes Theorie gar nicht eingeht, daß sie andere

1) Trans. of the Cambr. Phil. Soc. **9**, 1, 1849; Papers, **2**, 243.
2) A. Sommerfeld, Math. Ann. **47**, 317, 1896.

sind, wenn der Schirm absolut schwarz, andere, wenn er absolut reflectierend ist[1]). Aber zwischen den neuen Resultaten und den von Stokes erhaltenen liegen 50 Jahre, innerhalb deren ein wesentlicher Fortschritt nur Kirchhoff[2]) gelungen ist, und auch diesem großen Forscher nicht hinsichtlich der Beseitigung des hypothetischen Huyghens'schen Principes.

Die Beschäftigung mit den Beugungserscheinungen führte Stokes, wie es scheint, zum ersten Male zu einer größeren Beobachtungsreihe; es handelte sich dabei um ein ziemlich delikates Phänomen, das einer genauen Messung nicht zugänglich war, aber bezüglich der anzuwendenden Methode keinerlei Erfindungskraft verlangte.

In der Reihe der optischen Arbeiten schließen sich der besprochenen insbesondere zwei weitere von ganz verschiedenem Charakter an, beide Interferenzerscheinungen behandelnd, die erste umfänglichere[3]), Reflexionsphänomene an dicken Platten betreffend und wesentlich Fortsetzung und Erweiterung früherer Untersuchungen, insbesondere von Herschel enthaltend, die zweite kürzere[4]), allgemeine Gesetze über Zusammensetzung von Schwingungen begründend, von größerer principieller Bedeutung.

Sie leiten über zu der dritten großen und epochemachenden Abhandlung[5]), die ausnahmsweise vollständig experimentell ist. Ihr Gegenstand ist die Aufsuchung der Gesetze der Fluorescenzerscheinungen.

Die fundamentale, von Herschel und Brewster entdeckte Erscheinung, welche die Aufmerksamkeit von Stokes anzog, war folgende. In gewissen Flüssigkeiten erregt hindurchgehendes Licht eine Leuchterscheinung, deren Farbe von derjenigen des erregenden Lichtes abweicht; das aus der Flüssigkeit (eine genügende Dicke der Schicht vorausgesetzt) austretende Licht hat die Fähigkeit dieses Leuchten zu erregen verloren.

Stokes ging an die Aufklärung dieser Erscheinung, wie er selbst sagt, von der Vorstellung aus, daß verschiedenes Licht sich nur allein durch Intensität, Farbe und Polarisationsrichtung unterscheiden könnte; diese Ueberzeugung ließ ihn phantastische Hypothesen vermeiden und führte ihn zu dem Nachweis, daß das Fluorescenzleuchten bedingt wird durch eine Entnahme von

1) W. Voigt, Kompendium, II, 768, Leipzig 1896.
2) G. Kirchhoff, Wied. Ann. **18**, 663, 1883.
3) Trans. of the Cambr. Phil. Soc. **9**, 147, 1851; Papers **3**, 155.
4) Ib. **9**, 399; Papers **3**, 233.
5) Phil. Trans. for 1852, 463; Papers **3**, 267.

Energie aus den erregenden Wellen, bei welcher die Periode der Schwingungen in einer nicht aufklärbaren Weise eine Veränderung erleidet, sodaß z. B. blaues Licht absorbirt und rothes ausgestrahlt wird. Die allseitige Untersuchung dieser Vorgänge bei einer großen Zahl von festen und flüssigen Substanzen mit zwar einfachen, aber höchst zweckentsprechenden experimentellen Hilfsmitteln repräsentirt eine bedeutende Leistung. Die seit jener Arbeit vergangenen 50 Jahre haben den Stokes'schen Resultaten nur wenig hinzuzufügen vermocht, und eine vollständige Theorie der Erscheinungen fehlt noch bis zum heutigen Tag.

Optische Probleme haben auch weiterhin Stokes wiederholt lebhaft angezogen. Kleinere Aufsätze liegen u. a. vor über metallische Reflexion, über das Verhältniß zwischen Emission und Absorption, über Brennpunkte in Krystallen, über Doppelbrechung, über den Proceß in den Flammen, über irisirende Krystalle. Solche vielfältige Beschäftigung gab Stokes allmählich den Rang der ersten Autorität in optischen Fragen in England. Als im Jahre 1887 in Schottland auf Grund einer alten Stiftung populäre Vorträge über wissenschaftliche Fragen eingerichtet wurden, betrauten die Curatoren der Stiftung Stokes mit dem ersten dieser Vorlesungscyclen in Aberdeen über das Licht und wir verdanken diesem Umstand eine überaus merkwürdige Production [1]).

Die populäre Darstellung irgend eines wissenschaftlichen Gebietes durch einen Forscher ersten Ranges hat ja stets ein großes Interesse, denn derartige Erzeugnisse eröffnen der Regel nach tiefere Einblicke in die Persönlichkeit des Redenden, als dies streng wissenschaftliche Arbeiten zu thun vermögen. Diese Regel findet in der Stokes'schen (auch in deutscher Uebersetzung [2]) erschienenen) Publication ihre volle Bestätigung. Neben der souveränen Beherrschung des Materials, der Weite der Ausblicke, der Kunst klarer Darstellung redet warm und nachdrücklich zu dem Leser eine dankbare fromme Freude an der Herrlichkeit der Natur, eine herzgewinnende ungekünstelte Bescheidenheit, wo es sich um eigene Leistungen handelt, und das Bestreben rückhaltloser Anerkennung fremder Verdienste.

Es ist vielleicht hier der Ort, einer an anderer Stelle gethanen Aeußeruug von Stokes zu gedenken, welche seine hohe Wahrhaftigkeit und edle Billigkeit in ein helles Licht setzt.

Die Entdeckung der Grundsätze, auf denen die ganze Ent-

1) On light, London 1887.
2) Das Licht, Leipzig 1888.

wickelung der Spectralanalyse ruht, durch Kirchhoff erregte in England eine ungemein lebhafte Discussion. Englische Gelehrte waren den Kirchhoff'schen Resultaten von verschiedenen Seiten her so nahe gekommen, daß es den wissenschaftlichen Kreisen in England undenkbar schien, daß jene Männer nicht die volle Wahrheit besessen hätten. Mehrere Forscher beanspruchten in der That direct die Priorität der großen Entdeckung für sich.

Auch Stokes hatte dem Probleme viel nachgesonnen und seine tiefen Gedanken darüber vor Zeiten W. Thomson mitgetheilt, der nun unter dem Eindruck seiner Erinnerung Kirchhoff das Verdienst zu Gunsten seines Freundes bestritt. Aber Stokes lehnte in einem offenen Brief die Ehre ab. Er schreibt dort u. a.: „I have never attempted to claim for myself any part of Kirchhoff's admirable discovery, and cannot help thinking, that some of my friends have been over-zealous in my cause." Diese schönen Worte sollen ihm unvergessen bleiben. —

Die eigentlich epochemachenden Arbeiten von Stokes drängen sich in eine auffallend kurze Zeit, weniger als 20 Jahre, zusammen; bald nach der Uebernahme der Professur für Physik in Cambridge im Jahre 1850 tritt, vielleicht unter dem Drucke der Amtsgeschäfte, an Stelle des starken Schaffensdranges der früheren Jahre ein mehr beschauliches Antheilnehmen an den Fortschritten der Wissenschaft, das nur hier und da zu kurzen Gedankenäußerungen führt[1]). Aber letztere zeigen, daß der Mann innerlich an allen auftauchenden Fragen interessirt ist. Das Crookes'sche Radiometer unterwirft er eigenen Beobachtungen, über Röntgen- und Kathodenstrahlen spricht er mit zuerst die Auffassung aus, die jetzt nahezu allgemein getheilt wird; die neuen Gase Argon und Helium veranlassen ihn zu Ueberlegungen. Im Ganzen ist er aber seit 1860 nicht mehr eine treibende Kraft in der Physik.

Wie trotzdem die Verehrung für ihn in allen Kreisen englischer Physiker lebendig geblieben war, verdient die größte Beachtung. Zur Feier seines fünfzigjährigen Professorenjubiläums in Cambridge (1900) hatte sich nicht nur seine Universität, sondern die ganze wissenschaftliche Welt von England aufgemacht, und da eine der Bedeutung der Feier entsprechende Autorität auf optischem Gebiete in England nicht wohl zu finden war, hatte man

1) Uebrigens haben diese Amtsgeschäfte auch direct der Wissenschaft gedient; der bekannte schöne Satz über die Umwandelung eines gewissen Flächenintegrales in ein Randintegral ist der Gegenstand einer von Stokes gestellten Preisfrage vom Jahre 1854 gewesen.

den greisen Cornu aus Paris um die wissenschaftliche Festrede ersucht.

Gewiß sind die Aeußerungen eines übertriebenen nationalen Stolzes, die (in England vielleicht mehr als anderswo) auf wissenschaftlichem Gebiet zur Ungerechtigkeit gegen auswärtige Leistungen führen, unerfreulich. Aber diese Solidarität in der Dankbarkeit gegen einen verdienten Mann fordert unsere Bewunderung heraus, und die geringe Beachtung, die man in Deutschland den greisen W. Weber und Fr. Neumann, — Männern, die Stokes sehr wohl gleichwerthig waren — schenkte, kontrastirt damit in wenig angenehmer Weise. Freilich blieb Stokes bis in seine höchsten Jahre in dauerndem Verkehr mit den großen wissenschaftlichen Körperschaften seines Landes, und seine ungemein ehrwürdige Erscheinung forderte unabsichtlich Sympathiebezeugungen heraus. Jeder für edle Menschlichkeit Empfängliche, der Stokes einmal begegnete, wurde unfehlbar gefesselt durch das geistig belebte Antlitz, durch die hellen, freundlichen, man möchte sagen freudigen Augen, durch den Ausdruck von Frieden und Wohlwollen. Und wer dem greisen Gelehrten einmal näher zu treten das Glück hatte, wird die Erinnerung an seine zugleich vornehme und sympathische Persönlichkeit sorgsam bewahren.

Julius Ficker.

Von

F. Frensdorff.

Der am 10. Juli 1902 verstorbene Professor der Geschichte an der Universität Insbruck, Julius Ficker, seit 1866 Correspondent, seit 1889 auswärtiges Mitglied unserer Gesellschaft, gehörte schon lange zu den angesehensten Historikern Deutschlands, ehe ihm Göttingen diese Ehren erwies. In seinem Dankschreiben an den vorsitzenden Secretair v. Dec. 1866 erklärte er, die Aufnahme in die Gesellschaft um so höher zu schätzen, als er schon seit Jahren deren Leistungen zu achten gelernt habe.

Die Arbeiten, die er im Sinne hatte, waren vor allen die von Georg Waitz. Unter ihnen berührten sich die zur deutschen Verfassungsgeschichte am nächsten mit denen, die Ficker in seinem ganzen arbeitsreichen Leben vorzugsweise beschäftigt haben. Fickers Studien setzen ungefähr da ein, wo die deutsche Verfassungsgeschichte aufhört. Sie als deren Fortsetzung aufzufassen, schließt die Verschiedenheit der beiden Forscher aus. Ein Blick auf die schriftstellerische Wirksamkeit Fickers wird auch das ergeben.

Ich muß mich auf diese Seite seiner Persönlichkeit beschränken, da ich Ficker selbst nur einmal bei einem Besuche hier in Göttingen gesehen habe, und dieser liegt mehr als dreißig Jahre zurück. Was ich über ihn zu sagen weiß, stammt aus seinen Schriften und den Berichten und Erzählungen seiner Schüler, von denen nicht wenige auch zu den Schülern Göttingens gehört haben.

Ficker ist 76 Jahre alt geworden, funfzig dieser Jahre hat er in Insbruck verlebt. Er war so mit Insbruck verwachsen, daß man ihn für einen Tiroler oder wenigstens einen Oesterreicher hätte halten mögen. Er stammte aber aus Westfalen, hatte in Münster die Schule und von Universitäten insbesondere Bonn be-

sucht, in Bonn zu Ende 1849 promoviert und sich zwei Jahre später für Geschichte habilitirt. Sein Uebergang nach Oesterreich hieng mit der Reform des österreichischen Universitätswesens durch den Grafen Leo Thun zusammen. Es ist bekannt, von welchen segensreichen Folgen der Schritt des Ministers, Gelehrte aus dem Reich nach Oesterreich zu ziehen, begleitet war. Segensreich nicht blos für Oesterreich, sondern auch für das deutsche Reich, an dessen Universitäten jetzt schon eine zweite Generation geborener Oesterreicher wirkt, die ihre Studien an den reorganisirten Universitäten ihrer Heimat gemacht haben.

Unter den Erfolgen, die Graf Thun erzielte, bewährte sich als einer der größten die Berufung Fickers nach Insbruck. Eine Lehrthätigkeit hatte der junge sechsundzwanzigjährige Privatdocent noch nicht aufzuweisen, als er 1852 zum ordentlichen Professor der allgemeinen Geschichte ernannt wurde; aber was er publicirt hatte, erwies ihn als einen Mann der Wissenschaft, erwies ihn zugleich als den rechten Mann für die ihm zugedachte Stellung.

Ficker hatte seine Studien mit der Rechtswissenschaft begonnen. Die Bonner Vorlesungen sagten ihm so wenig zu, daß er zur philosophischen Facultät übertrat und sich zum Studium der Geschichte, die von früh auf seine Liebe gewesen war, — quam jam a puero vehementer adamavi — entschloß. Wie die rheinisch-westfälische Umgebung, in der er aufwuchs, diese Vorliebe geweckt hatte, so wandte sie sich auch zunächst der Geschichte der Heimat zu. Aber er erkannte von früh auf, daß deutsche Provinzialgeschichte nur im Zusammenhang mit der Reichsgeschichte fruchtbar betrieben werden konnte. Wo leuchtete diese Wahrheit stärker ein als in dem Lande zwischen Rhein und Weser! Die nationalen Hoffnungen und das Interesse an Verfassungsfragen, die alle Gemüther in den Jahren um 1848 bewegten, lenkten die Blicke der jungen Historiker auf die Zeit der staufischen Kaiser. Während sein College Otto Abel sich mit der Zeit Philipps von Schwaben und Friedrichs II. beschäftigte, nahm Ficker K. Heinrich VI. und dessen Versuch, die Krone des deutschen Reichs erblich zu machen, zum Gegenstand. Die Dissertation, die die Quellenzeugnisse über diesen Plan der Jahre 1195 und 96 aufsuchte und den Zusammenhang der spärlichen Ueberlieferung darlegte, erschöpfte ihren Stoff so vollständig, daß dem Verfasser der Jahrbücher des deutschen Reichs unter Kaiser Heinrich VI., Töche, 1867 nichts übrig blieb, als zu wiederholen, was Ficker zwanzig Jahre früher ermittelt hatte. Ein Band münsterscher Chroniken war der Tribut, den der junge Doctor der westfälischen Heimat darbrachte. Zwei

Monographieen der Jahre 1850 und 52 galten zwei Kölner Erzbischöfen der Stauferzeit, die tief in die Geschicke des Reichs eingriffen: Reinald v. Dassel, dem Reichskanzler K. Friedrichs I., und Engelbert dem Heiligen, dem Reichsverweser unter K. Friedrich II. Diese Arbeiten, dem Reiche und dem heimatlichen Erzbisthum gewidmet, die ersten und die letzten darstellenden Arbeiten von Fickers Hand, bildeten den Abschluß der Bonner Periode und den Empfehlungsbrief für die neue Stellung in Insbruck.

In die Insbrucker Zeit nahm er ein Thema mit, das er seinen Studentenjahren verdankte. Im Jahre 1848 zog es ihn nach Frankfurt. Er wollte das Parlament sehen, die Stadtbibliothek für seine Arbeiten benutzen und die Historiker kennen lernen, die als Abgeordnete dort weilten. Der wichtigste Erfolg dieser Reise war, daß er Beziehungen zu einem Gelehrten gewann, der im Mittelpunkt der auf die deutsche Kaisergeschichte sich beziehenden Studien stand. Er wurde von Einfluß auf Fickers ganzes Leben; wie schon seine Empfehlung bei der Berufung nach Insbruck mitwirkte. Dreißig Jahre älter als Ficker, ein Mann von altem reichsbürgerlichen Sinn, war Johann Friedrich Böhmer, wenn auch Protestant von Geburt und Erziehung, von tiefer Verehrung für die katholische Kirche und von einer gründlichen Abneigung gegen die moderne staatliche Entwicklung erfüllt. Von der Jurisprudenz, die er in Heidelberg und Göttingen studirt hatte, abgestoßen, hatte er seine geistige Kraft und seinen Fleiß der Geschichte des deutschen Mittelalters, vor allem der Institution des Kaiserthums zugewandt. Sie gründlich zu erforschen durch Sammlung und Herausgabe der Kaiserurkunden, des eigentlichen Knochengerüstes der Geschichte, war das Ziel seines Lebens. Die Worte in Fickers Engelbert: „an den Ufern des Rheins lag einst die Kraft des deutschen Reichs, die Herrlichkeit der deutschen Kirche," diesen Satz nach seinen beiden Theilen hätte auch Böhmer geschrieben haben können. Der junge Westfale gewann Böhmers ganzes Herz. Er nahm von der Frankfurter Begegnung die doppelte Richtung mit auf das urkundliche Element der Geschichte und auf die Reichsgeschichte.

Zunächst galt es sich in Insbruck einen Boden zu schaffen. Die Universität war schwach besucht, zählte wenig über 200 Hörer und war noch ganz unvollständig. Die einzige Facultät, die es neben der juristischen gab, die philosophische, wies etwa 20 Studenten und 6 Professoren auf. Bisher war nur österreichische Geschichte, die ein obligatorisches Colleg für die Juristen bildete, vorgetragen worden. Fickers Lehrauftrag gieng auf allgemeine

Geschichte, und er hat ein Jahrzehnt lang Vorlesungen über alle Theile der Geschichte gehalten. Aber wie er mit einer Uebersicht über Entstehung und Verfall des deutschen Kaiserreichs begann, so gewannen doch die rechts- und verfassungsgeschichtlichen Materien in Vorlesungen und Uebungen allmählich die Oberhand, so daß er sich 1863 zum Uebertritt in die juristische Facultät entschloß. Ihr gehörte er 14 Jahre an, während er die letzten Jahre seiner Lehrthätigkeit hindurch wieder Mitglied der philosophischen Facultät war.

Es gelang ihm bald ein wissenschaftliches Studium der Geschichte in Insbruck einzubürgern und zugleich die historischen Studien im Lande populär zu machen. Die tiroler und die österreichische Geschichte erfuhren von Insbruck her einen belebenden Einfluß. Durch Vorlesungen und Uebungen bildete sich Ficker einen Kreis von Schülern aus, zu dem nicht blos Landeskinder gehörten. Namentlich aus Westfalen zog sich eine Reihe junger Männer aus angesehenen katholischen Familien nach Insbruck und wurde durch Ficker für die Geschichte gewonnen. Die Namen von Druffel, Bousson, Stieve, Scheffer-Boichorst sind die bekanntesten. Die Mehrzahl von ihnen suchte nach Insbruck auf Fickers Empfehlung Göttingen auf und nahm an den von Waitz geleiteten historischen Uebungen Theil.

Die historische Schule, die Ficker in Insbruck begründete, machte Epoche in Oesterreich. Der große Antheil, welcher dem Kaiserstaat an dem Aufschwung der historischen Studien gebührt, datirt von hier ab. Er kam der Erforschung der Landesgeschichte und nicht minder der Reichsgeschichte zu Gute. Graf Thun hatte die Geschichtswissenschaft zu fördern für seine Pflicht gehalten, weil Oesterreich durch Erforschung seiner Geschichte gegenüber den Lügen nur gewinnen könne. Eine größere Lüge als die von einem österreichischen Fürsten gefälschten Freiheitsbriefe Oesterreichs gab es nicht. Ficker hatte schon unter seinen Doctorthesen den Satz: das privilegium majus ist untergeschoben. In demselben Jahr, in dem Ficker seine Stellung in Insbruck antrat, lieferte die Abhandlung Wattenbachs, in einer österreichischen Zeitschrift veröffentlicht, den ersten ausführlichen und eindringenden Beweis der Fälschung. Ficker ließ es sich nun angelegen sein, der Geschichte dieser Fälschung, ihrem Urheber und den Umständen, unter denen sie möglich wurde, auf die Spur zu kommen. Während er selbst die Vertheidigung des privilegium minus übernahm, befaßte sich einer seiner Schüler, Alfons Huber, mit der Entstehungszeit und dem Urheber der Fälschung und ermittelte als solchen den Herzog

Rudolf IV. von Oesterreich. Es war ganz im Geiste Böhmers gehandelt, der davor warnte, sich an dem Negativen, an der bloßen Polemik genügen zu lassen, und darauf drang, die positive Seite zu ergreifen und womöglich eine Geschichte Rudolfs IV. zu veranlassen. Auch dieser Aufgabe kam Alfons Huber später nach und lieferte endlich in dem letzten Jahrzehnt seines Lebens eine ausführliche kritische Geschichte von Oesterreich, die in fünf Bänden ihr Thema bis zum J. 1648 führt.

Die eigenen Studien Fickers setzten mit glücklichen Funden ein. Die Untersuchung der oberitaliänischen Archive für die Reichsgeschichte unter König Ludwig dem Baier, mit der sich Ficker auf den Rath Böhmers zu beschäftigen begann, führte zur Entdeckung von Resten des alten Reichsarchivs in Pisa. Bedeutsamer war ein Fund in nächster Nähe. Die Aufforderung Homeyers, der eine neue Ausgabe des Verzeichnisses der deutschen Rechtsbücher vorbereitete, für diesen Zweck Bibliotheken und Archive neu durchzusehen, veranlaßte in Insbruck die Auffindung eines unbekannten Rechtsbuches, das sich eine erweiternde Umarbeitung des Sachsenspiegels zum Ziel setzte und diese Tendenz in dem Titel ausdrückte, den es sich selbst beilegt: „Spiegel aller deutscher Leute." Es galt zunächst, diese neue Quelle bekannt zu machen und ihre Stellung unter den Rechtsbüchern zu bestimmen. Da ein querköpfiger Gelehrter, der seit einiger Zeit mit Homeyer in Fehde lag, aus dem neuen Funde eine Bestätigung seiner Ansicht von der Ableitung des Sachsenspiegels aus dem Schwabenspiegel herauslas, so ließ sich Ficker die Mühe nicht verdrießen, in einer besonderen Abhandlung das richtige Verhältniß der drei Rechtsbücher zu einander festzustellen und das alt Erkannte mit neuen Beweisen zu befestigen. Die die Entdeckung des Deutschenspiegels begleitenden Untersuchungen, in den Schriften der Wiener Akademie veröffentlicht, verschafften Ficker einen angesehenen Platz unter den deutschen Rechtshistorikern, und dankbar ehrte ihn die Breslauer juristische Facultät durch Verleihung der Doctorwürde. Ficker erwiderte die Ehre durch eine den Breslauern gewidmete rechtshistorische Abhandlung. Die Schrift vom Heerschilde (1862) hatte ihren Werth darin, daß sie die praktische Bedeutung einer bisher wenig verstandenen Stelle des Sachsenspiegels durch ein reiches Urkundenmaterial erwies. Es zeigte die Beobachtung eines lehnrechtlichen Grundsatzes im Leben zugleich durch die Umwege, die man einschlug, um der Consequenz des Prinzips zu entgehen, daß niemand ohne Nachtheil Lehn von einem ihm Gleichstehenden annehmen könne.

Nicht blos durch diese gelegentlichen Schriften, die übrigens ihr Thema in aller Gründlichkeit erledigten, wurde Fickers Hauptarbeit in den Hintergrund gedrängt. Die Geschichte Ludwigs des Baiern beginnt mit einer Doppelwahl. Sie rief die prinzipielle Frage wach: wer hatte ein Recht der Theilnahme an der Königswahl, auf wessen Stimme kam es an, damit der Gewählte als rechtmäßig gewählt gelten konnte. Im nächsten Zusammenhang damit stand die Controverse über die Entstehung des Kurfürstencollegiums. Ficker ging noch einen Schritt weiter zurück und fragte, wer waren die Reichsfürsten, die principes regni, die nach den Zeugnissen des 12. Jahrhunderts den deutschen König wählten. Aus diesen Untersuchungen entstand das Buch vom Reichsfürstenstande. Es unterscheidet zwischen einem ältern und jüngern Rechtszustande, die durch die Ereignisse von 1180 getrennt werden. In dem älteren entscheidet der Amtstitel; in dem jüngern der Lehnsbesitz. Nach jenem werden die Grafen noch zu den Reichsfürsten gezählt; nach diesem nur noch die die Vordersten am Lehn sind, die Lehn in erster Hand, unmittelbar vom Kaiser besitzen. Das ist im Rohen das Ergebniß einer aus zahllosen Einzeluntersuchungen sich zusammensetzenden Arbeit. Erstreckten sich die Einzeluntersuchungen zum Theil auch bis in die neuere Zeit, so hatte das Werk doch seinen Schwerpunkt in der Stauferzeit. Diese und zwar vorzugsweise ihre verfassungsgeschichtliche Seite wurde das Ziel seiner wissenschaftlichen Bemühung. Bei seiner Arbeit unmittelbar aus Quellen bevorzugte er die urkundlichen Quellen. So berechtigt das gegenüber den solange in den Vordergrund gestellten erzählenden Quellen war, die Gefahr war unvermeidlich, daß dies Verfahren zur Zersplitterung, zur Erschwerung, ja zum Ausschluß einer zusammenfassenden Darstellung führte. Bei aller Gleichförmigkeit, die unter den Urkunden-Gruppen besteht, geben sie doch die rechtlichen Vorgänge des Lebens in einer solchen Mannichfaltigkeit wieder, daß gewisse Grundzüge schwer erkennbar bleiben. Dazu kommt noch die Vielgestaltigkeit des politischen Lebens grade in Deutschland. Nach dem Erscheinen des Fickerschen Buches schrieb Böhmer einem Freunde: „Fickers Reichsfürstenstand that mir weh, weil ich daraus entnehme, daß die Zerfahrenheit der deutschen Reichsverfassung doch noch größer war, als ich mir schon vorgestellt hatte.“ Wenn keine feste Ordnung da war, so ließ sich allerdings auch keine Verfassungsdarstellung geben, keine Verfassungsgeschichte schreiben. War eine solche nicht möglich, so ist es doch ein beklagenswerther Verlust für die Geschichte des öffentlichen Rechts, daß sie nicht wenigstens ein statistisches

Durchschnittsbild des staufischen Zeitalters nach seiner rechtlichen Seite erhalten hat. Wer wäre dazu geeigneter gewesen als der Mann, der in den Quellen dieser Zeit bewandert war wie kein zweiter! Man kann nicht einmal behaupten, daß ihm zu seinen sonstigen großen Gaben die Kraft der Zusammenfassung versagt gewesen wäre. Nicht blos die Monographien seiner Jugendzeit zeigen seine Befähigung zu abgerundeter Darstellung geschichtlicher Stoffe. Als ein besonders lehrreiches Beispiel ist mir immer der Artikel über die Kurfürsten erschienen, den er 1861 für das Staatswörterbuch von Bluntschli und Brater verfaßte. Der bemessene Raum, der ihm zur Verfügung stand und die Einordnung in ein größeres Ganzes verlangte, hat hier wohlthätig gewirkt. Aber das sind vereinzelte Fälle und sie werden mit den fortschreitenden Jahren seltener. Der Autor, der in dem Wald deutscher Geschichte um Weg und Steg Bescheid wußte, läßt sich von jeder neuen Erscheinung auf Nebenwege verlocken. Es ist erklärlich, daß er die unbetretenden Pfade, die ihm seine Urkunden eröffnen, vorzieht. Aber er vergißt darüber das Ziel, das er sich gesetzt. Er verfolgt ein neues, bevor er das alte erreicht hat. Der Reichsfürstenstand ist nicht über seinen ersten Band hinaus gediehen. Anstatt ihn fortzusetzen, untersucht er das Königsgericht, das ihm die italienischen Urkunden in einer von den deutschen abweichenden Einrichtung aufweisen. Er geht der Frage nach, die auch schon andere Forscher beschäftigt hatte, ob Italien die Scheidung von Richter und Urtheilern unbekannt geblieben und ob darauf der Gegensatz des römischen zum deutschen Recht, der Einfluß der Rechtsschulen in Italien von Einwirkung gewesen sei. Das große vierbändige Werk: Forschungen zur Reichs- und Rechtsgeschichte von Italien, in den J. 1868—74 veröffentlicht, war das Ergebniß dieser Arbeiten.

Inzwischen hatten eigene und fremde Publicationen genöthigt, das Werkzeug, mit dem er und andere Forscher operirt, auf seine Zuverlässigkeit zu prüfen. Die Kriterien, nach denen man echte und unechte Urkunden von einander geschieden hatte, erwiesen sich als unzureichend. Wenn es der modernen Diplomatik gelungen ist, einen sicherern Beurtheilungsmaßstab zu finden als bisher, so gebührt Ficker hier ein Hauptverdienst. Die Beiträge zur Urkundenlehre, die er 1877 und 78 in zwei Bänden veröffentlichte, stehen mit den Arbeiten Theodor von Sickels an der Spitze dieser modernen Bewegung, der die Diplomatik einen ganz neuen Aufschwung verdankt. Sie hat zur Ausbildung diplomatischer Schulen die Veranlassung gegeben, und grade Oesterreich hat sich in

dieser Beziehung ein großes Verdienst um die Geschichtswissenschaft erworben.

Neben der theoretischen Arbeit über das Urkundenwesen gieng unausgesetzt eine praktische des gleichen Gebiets her. Böhmer hatte durch letztwillige Bestimmung dafür gesorgt, daß sein Regestenwerk fortdauernd seine Brauchbarkeit behielt. Er hatte die Mittel zur Verfügung gestellt, um die Kaiserregesten über die von ihm erreichte Zeitgrenze weiterzuführen und die von ihm behandelten Theile neuzubearbeiten. Von den drei durch Böhmer bestellten litterarischen Testamentsvollstreckern übernahm Ficker die Fürsorge für das Regestenwerk. Während sein Schüler und College Huber die Regesten Karls IV. herausgab, führte er selbst die Neubearbeitung der Regesten der Staufer von 1198—1272 aus. Die neue Ausgabe, mit einer umfassenden Vorbemerkung von 1880 versehen, ist Waitz gewidmet, unter anderm auch als Dank dafür, daß die Wedekindstiftung 1856 dem Herausgeber der Kaiserregesten ihren frei verfügbaren Preis zugewandt hatte. Nach diesem schwierigen Werke selbstverläugnender Pietät wandte sich Ficker zwar zu den rechtsgeschichtlichen Studien zurück, aber wir sehen ihn an einer ganz unerwarteten Stelle des großen Gebiets auftauchen. In den Urkunden der Stauferzeit war ihm eine merkwürdige Unsicherheit in den Bezeichnungen für Verlöbniß und Eheschließung begegnet. Das Eheschließungsrecht des 12. Jahrhunderts zu ergründen war das nächste Bedürfniß. Die Arbeit führte ihn auf spanische Quellen, die wiederum auf gothisches Recht zurückgingen. Zwischen dem gothischen und dem nordischen Recht fielen ihm Berührungspunkte auf, und so wurde er auf Rechtsvergleichungen geführt, deren Zuverlässigkeit er an dem Successionsrechte zu prüfen unternahm. Diesem Ziele ist die letzte große Arbeit Fickers gewidmet. Der Ausgangspunkt, das Eheschließungsrecht, blieb bei Seite; den Untersuchungen über die Erbenfolge der ostgermanischen Rechte wurde ein Werk gewidmet, von dem bisher vier und ein halber Band erschienen sind. Die Jahre 1891 bis 1902 sind der Publication dieser Arbeit gewidmet worden, mit der er zum erstenmale das Gebiet des Privatrechts betrat, auch hier wie in jeder frühern Arbeit anregend, neue Gedanken darbietend, aber auch hier wieder in einer Form, die die Aufnahme außerordentlich erschwert. Die Kritik hat sich dem neuen großen Werke des Forschers gegenüber bisher sehr zurückhaltend gezeigt, so sehr sie auch der Gelehrsamkeit und dem Scharfsinn des Verfassers Anerkennung gezollt hat; auch seinem Wagemuth, sich auf dies neue Gebiet der Rechtsvergleichung zu begeben. Allerdings

hat sich auch die schon bei Beginn des Werkes ausgesprochene Prophezeiung erfüllt: daß keiner aus diesem Gebiet, nachdem er es einmal betreten, so leicht den Rückweg findet. Neben diesen großen Werken geht eine Fülle der lehrreichsten Einzelabhandlungen her, von denen hier auch nur die wichtigsten namhaft zu machen unmöglich ist. Es wäre ein Gewinn für die Forschung, sie zu sammeln und allgemein zugänglich zu machen. Auch in ihrer Form sind sie genießbarer als die großen Werke des Verfassers, der beim Niederschreiben wenig an die Leser gedacht zu haben scheint. Die deutschen Rechtshistoriker, auf die sie vor allem berechnet sind, haben doch noch manches andere zu lesen und noch manches andere zu thun als zu lesen.

Es ist eine sehr unzureichende Würdigung Fickers, wenn man ihn nur als wissenschaftlichen Schriftsteller würdigt. Zur Erkenntniß seiner Bedeutung gehört es, daß man sich den anregenden Lehrer vergegenwärtigt, der so zahlreiche und begeisterte Schüler um sich sammelte, Schüler verschiedener Wissenszweige, Juristen und Historiker, die von ihm ausgehend, selbst wieder als Lehrer und Schriftsteller thätig geworden sind und sich einen hervorragenden Namen in der Wissenschaft erworben haben.

Ficker hätte diese Bedeutung nicht errungen, wenn nicht hinter der wissenschaftlichen auch eine kraftvolle und anziehende menschliche Persönlichkeit gestanden hätte. Ein Mann voll Unabhängigkeitssinn, nobel denkend und handelnd, frei von Eitelkeit und Eigennutz, stets bereit von seinem Wohlstand für wissenschaftliche Interessen Opfer zu bringen. Als er nach 25jähriger Dienstzeit in den Ruhestand trat, geschah das nur, um in gesteigertem Maße den Studien obzuliegen. Ein unermüdlicher Arbeiter, der auch das Mechanische der Arbeit nicht scheute und es mit der größten Gewissenhaftigkeit ausführte, ein Mann der Bücher und der Archive, aber ein Gelehrter, der auch im praktischen Leben seinen Mann stand. Rasch hatte sich der Westfale in die Sitten seiner neuen Heimat eingelebt und wetteiferte mit den Eingebornen im Alpensteigen und auf dem Schützenstande. Wie in der Politik, so war er auch im Glauben mit ihnen eins. Ob man ihn zu den Ultramontanen rechnen durfte? In seinem geschichtlichen Urtheil hat er sich wenigstens nicht durch die Kirche binden lassen, und unabhängiger als Böhmer, der Protestant, den Gegensatz zwischen Kaiser Friedrich II. und dem Papstthum gewürdigt. Den politischen Standpunkt, den er in einem seiner Zeit berühmten Streite mit Heinrich von Sybel verfochten, hat er auch nach 1866 und nach 1870 festgehalten. Die politischen Kämpfe von 1861 und 1862,

der Gegensatz von Großdeutsch und Kleindeutsch hat heute keine Bedeutung mehr. Die Geschichte ist darüber hinweggeschritten. Von wissenschaftlichem Interesse ist es, daß die beiden politischen Gegner eine geschichtliche Erscheinung in ihren Streit hineinzogen, das mittelalterliche Kaiserthum. Sybel glaubte zur Stütze seines Programms den Unwerth des Kaiserthums darthun zu müssen. Auch unter denen, welche seinen politischen Standpunkt theilten und „so sicher wie die Ströme seewärts fließen“ an den Beruf Preußens glaubten, an die Spitze Deutschlands zu treten, haben schon damals nicht wenige Stimmen sich seiner Verurtheilung des Kaiserthums widersetzt, ohne darum Fickers Verherrlichung des Kaiserthums zu theilen. Man hat es seitdem hüben und drüben gelernt, geschichtliche Erscheinungen unabhängig von den politischen Anschauungen der Gegenwart zu würdigen.

Gaston Paris.

Von

Edward Schröder.

Der ausgezeichnete französische Romanist, den am 5. März d. J. der Tod seiner Wissenschaft und einem reichen Wirkungskreis entrissen hat, ist in den Jahren 1857 und 1858 ein Zögling der Georgia Augusta gewesen: schon längst bezeichnet eine Marmortafel das Haus in der Paulinerstraße, in dem der Student Gaston Paris wohnte. Den Gelehrten von Weltruf zählt unsere Gesellschaft seit 1889 zu ihren auswärtigen Mitgliedern. Daß wir uns hier in dieser Stunde, die andere schwere Verluste ins Gedächtnis ruft, auch seiner stolz und dankbar erinnern, ist somit natürlich, daß aber ich, der ich kaum erst in diesen Kreis eingetreten bin, es übernommen habe, den Mann zu feiern, der nicht eigentlich mein Fachgenosse war, das bedarf einer Rechtfertigung gegenüber Ihnen, meine Herren Kollegen, und gegenüber dem weiteren Kreise meiner Zuhörer.

Wäre die Bedeutung des Dahingeschiedenen auf das engere Gebiet der romanischen Philologie beschränkt, käm es nur darauf an, seinen Platz im Rahmen ihrer Entwicklung aufzuzeigen, so würd ich sicherlich nicht hier stehen. Aber einmal ragt Gaston Paris als wissenschaftlich-sittliche Persönlichkeit und als wahrhaft vornehmer Vermittler zwischen deutscher und französischer Geistesarbeit über die niedern Fachschranken hinaus, und dann hat seine Arbeitsweise, die mit dem vollen Rüst- und Handwerkszeug der Einzelphilologie an große Aufgaben unserer gemeinsamen Wissenschaft vom Mittelalter herantrat, eine geradezu vorbildliche Bedeutung gewonnen. Man redet heute so viel und so laut von vergleichender Litteraturgeschichte und allgemeiner Kulturgeschichte: Gaston Paris hat diese hochtrabenden Worte nie im Munde geführt und würde sich gewiß dagegen sträuben, wollt ich ihn etwa als den Meister der ver-

gleichenden Litteraturbetrachtung preisen; aber was ein im festen Eigenboden wurzelnder Specialphilologe auf dieser angeblichen Domäne einer neuen Wissenschaft leisten, ja wie nur ein solcher uns wirklich vorwärts helfen kann, das hat er in einer langen Reihe von Arbeiten bewiesen. So darf ich ihn, ohne je zu seinen Füßen gesessen zu haben, aus voller Ueberzeugung zu meinen Lehrern zählen: ich habe die Freude gekostet, mit ihm gelegentlich die Waffen zu kreuzen, und das Glück erlebt, meine eigene Arbeit in der seinen fortgebildet zu sehen, und ich danke dem Vielbeschäftigten heute von Herzen jedes Brieflein und jede flüchtige Postkarte, womit er mich zustimmend erquickt oder zweifelnd angespornt hat.

Gaston Paris wurde als Sohn des romanischen Philologen und Bibliothekars an der Handschriftenabteilung der Kgl. Bibliothek zu Paris Paulin Paris am 9. August 1839 zu Avenay geboren, einem Städtchen im Departement der Marne, wo auch sein Vater das Licht der Welt erblickt hatte. Es liegt eine freundliche Symbolik darin, daß der Sohn mit dem Vater, der ihm seine geistige Heimat vererbte, auch die örtliche Heimat gemein hat. Paulin Paris war im Jahre 1824 24jährig mit einer '*Apologie de l'école romantique*' hervorgetreten, hatte sich durch eine vollständige Uebersetzung Byrons jenem Ideal der Weltlitteratur dienstbar gemacht, das eben damals von Deutschland nach Frankreich verpflanzt wurde, seit 1832 aber anfangs mehr suchend, bald mit wachsender Sicherheit die altfranzösische Poesie und Chronistik zu seinem eigensten Arbeitsgebiet erwählt: Ausgaben und Uebersetzungen in einer stattlichen Reihe von Bänden bezeugen seinen gelehrten Eifer wie sein Streben, für die nationale Wissenschaft zu werben, durch seinen umfänglichen Anteil an der '*Histoire littéraire de la France*' und durch das 7bändige Werk über die französischen Handschriften der Kgl. Bibliothek lebt er in der gelehrten Welt fort, auch nachdem seine Editionen veraltet und ersetzt sind. Vor allem aber wird Paulin Paris fortleben in dem Sohne, der sein ganzes Lebenswerk auf dem des Vaters aufgebaut hat und nicht müde geworden ist, sich dankbar zu ihm zu bekennen: nicht zu seinem Wissenschaftsbetrieb, der noch vielfach dilettantisch war, aber zu dem Geiste aus dem er entstammte. Am 25. März 1900 beging Gaston Paris in der Stille den 100jährigen Geburtstag seines Vaters: in Dresden, wohin einst Paulin Paris den 18jährigen Studenten zuerst geführt hatte, und er schrieb an diesem Tage die Vorrede nieder zu den '*Poèmes et Légendes*', einer Sammlung von Aufsätzen, die sein frühstes und sein reifstes umschließt, in der ich seine Entwicklung wie seine

wissenschaftliche Eigenart am besten verkörpert sehe und wie in kaum einem andern seiner vielen Bücher sein Herzblut zu spüren glaube. Diese Vorrede schließt mit einer letzten Danksagung an den Vater, der ihm von Kindesbeinen an eingeprägt habe *'l'amour de l'étude, l'amour de notre vieille poésie, et l'amour de la douce France'*.

Die Hinwendung zu den altfranzösischen Studien hing bei Paulin Paris offenbar zusammen mit einem Streben, das zu einer Enttäuschung geführt hat: er hatte gehofft, indem er der jungen romantischen Dichterschule Frankreichs die mittelalterliche Poesie und die mittelalterliche Sagenwelt der Heimat zugänglich machte, diese selbst zu neuem Leben zu erwecken. Wie eine leise Klage klingt es noch aus manchen Arbeiten des Sohnes, daß die deutsche Litteratur der Neuzeit von Wielands Oberon herab bis zu Richard Wagners Tristan so viel reichere Früchte von dem Baume der alten Dichtung gepflückt habe. Als dieser Sohn heranwuchs, hat der Vater Sorge getragen, daß ihm jene Ausbildung zu Teil wurde, die in Deutschland den mittelalterlichen Studien ein höheres Ansehen zu verleihen schien, als sie damals in Frankreich besaßen. Er selbst hat ihn nach Bonn begleitet: zu dem Altmeister der romanischen Philologie, Friedrich Diez, und er hat es gutgeheißen, daß Gaston, dem Diezens akademischer Vortrag nicht hielt, was seine Werke versprachen, sich nach Göttingen wandte und zunächst die romanische Philologie ruhen ließ, um eine allgemeinere philologische Schulung zu gewinnen. Hier in Göttingen hat Gaston Paris bei Sauppe und Leutsch, bei Ernst Curtius und Wilhelm Müller gehört: bei Sauppe hat er Griechisch und philologische Methode gelernt, bei Curtius aber sich jenen Enthusiasmus für das Griechentum in die Seele gesogen, den es ihn drängt in seinen ersten Aufsätzen zu bekunden, und der ihm geblieben ist bis zum letzten Atemzuge.

Auf diese deutschen Semester folgte nach der Heimkehr die ausgezeichnete Schulung an den alten Documenten selbst, welche die École des Chartes gewährte. Mit der Diez gewidmeten *'Étude sur le rôle de l'accent latin dans la langue française'* trat er 1862 in die Gelehrtenwelt hinaus, während er sich gleichzeitig in litterarhistorischen Essais über den Huon von Bordeaux und die Chanson de Roland und das Nibelungenlied in der *'Revue Germanique'* (1861/62) versuchte. Das wissenschaftliche Porträt steht von vorn herein, bei dem 23jährigen fest: gründliche philologische Durchbildung, an der weiter zu arbeiten er nicht müde wird, daneben aber das Streben und die gern bekundete Gabe, ein weiteres Publicum für die Schönheit und den Reiz der alten Dichtung,

aber auch direct für Fragen der mittelalterlichen Philologie zu interessieren, vor allem für die eine Hauptfrage: wie offenbaren sich die Nationalitäten und insbesondere die französische in ihrer alten Dichtung? wie assimilieren wir Franzosen uns fremde: germanische, keltische, orientalische Einflüsse? und wie gestaltet sich unsere Einwirkung auf die Nachbarvölker? Es geht eine feste Linie von diesen Erstlingsarbeiten bis zu den reifsten Producten der allerletzten Jahre, der feinsinnigen Verwertung fremder Arbeit in dem Essai über '*Saint Joasaph*' und dem glänzendsten Zeugnis selbständiger Stoffdurchdringung in der Arbeit über '*Tristan et Iseut*' (*Revue de Paris* 1896 resp. 1894).

Den Doctortitel erwarb sich Gaston Paris 1865 ehrenvoll durch die lateinische Probeschrift '*De Pseudo-Turpino*' und durch die '*Histoire poétique de Charlemagne*', einen stattlichen Band, der bis heute ein Hauptträger seines Namens geblieben ist. Das Buch hat den Beifall, den es bei seinem Erscheinen fand, vollauf verdient: es fußt auf reicher, fast lückenloser Gelehrsamkeit, bewährt einen echt wissenschaftlichen Ordnungssinn und ist bei aller Stofffülle doch von einer schlichten Anmut umkleidet, wie man sie in der gelehrten französischen Litteratur öfter findet, ohne daß sie hier den specifisch französischen sprachlichen Anstrich zeigt. Aber es ist schief und ungerecht gegen den Autor selbst und die großen Fortschritte, die er gemacht hat, wenn man das alte Lob heut uneingeschränkt wiederholt. Dem Streben nach Ordnung geht noch nicht jene kritische Schärfe zur Seite, die dieser gewaltige Rohstoff erfordert und die spätere Arbeiten des Verfassers durchaus betätigen sollten. Außer den hier unerläßlichen sprachlichen Untersuchungen fehlt noch der sichere Blick und die feinere Empfindung für die Unterschiede im Geiste der Epochen wie der Landschaften, die an der Ausbildung des großen Sagenkreises mitgewirkt haben. Dagegen zeigt sich jene bedenkliche Neigung zum Mythendeuten, die der enthusiastischen Lectüre von Jacob Grimms Deutscher Mythologie entstammt und z. B. in der Untersuchung über das Däumlingsmärchen ('*Petit Poucet*' 1875) besonders hervortritt, schon hier, wenn etwa Karls des Großen Mutter, Gattin, Schwester unbedenklich unter den Begriff der '*épouse du soleil*' subsumiert werden. Aber Gaston Paris ist freudig über seine Jugendarbeiten hinausgeschritten, er wußte dankbar von Vielen zu lernen, und ein Eigensinn, wie er ihn später in der Frage der '*matière de Bretagne*' bekundet hat, ist nicht wesentlich an seinem Bilde.

Es mag erlaubt sein, sogleich darauf hinzuweisen, daß mit dem oben angedeuteten Uebergang von ordnender Description zu

kritisch historischer Einzelforschung, subtiler Scheidung von nationaler, zeitlicher und landschaftlicher Sonderart, Herausarbeitung der Individualität und des individuellen Verdienstes, Hand in Hand geht eine Verfeinerung der Darstellungskunst und ein wachsender Reichtum der eigenen sprachlichen Mittel. Auch hier wie in seiner Forschungsweise nur sicheres Fortschreiten, keine ehrgeizigen Sprünge: seine Diction wird mannigfaltiger und feiner ausgestaltet, die Adjectiva werden zahlreicher und erscheinen oft durch Adverbia gesteigert oder glücklich schattiert; Anapher und Asyndeton, Frage und Ausruf stellen sich ungesucht ein, die Bilder erscheinen sparsam und selten überraschend, aber immer gewählt und oft mit eindrucksvollen Nüancierungen. Die Académie française, die ihn im Jahre 1896 an Stelle Pasteurs zu ihrem Mitglied erwählte, zeichnete damit nicht nur den fruchtbaren Gelehrten, sonauch einen Schriftsteller von künstlerischer Physiognomie aus, und das Buch über '*François Villon*', das der neue Akademiker im Jahre 1901 der Sammlung der '*Grands écrivains de la France*' einreihte, zeigt die Meisterschaft historischer Charakteristik auf dem Höhepunct angelangt.

Es ist ein weiter Weg von dem Austritt aus der École des chartes bis zur Aufnahme in die Académie, und dieser Weg ist bezeichnet durch eine wahrhaft erstaunliche Fülle von gelehrter Arbeit, organisatorischer Bemühung und fruchtbringender Lehrtätigkeit. Die Zahl der Bände, die den Namen Gaston Paris tragen, mag ein halbes Hundert erreichen, die Bibliographie seiner selbständigen Arbeiten und seiner kritischen Referate überschreitet ein halbes Tausend. An der Spitze seiner zahlreichen Editionen steht die vorbildliche Ausgabe des '*Saint Alexis*' (1872. 1885), von seinen Untersuchungen und Essais hat er viele in Sammelbänden vereinigt, die unter verschiedenen Titeln 1885. 1895. 1896. 1900 erschienen sind. An allen großen Fortschritten, welche die Organisation der wissenschaftlichen Arbeit unter dem zweiten Kaiserreich und unter der dritten Republik anstrebten, war er beteiligt, weit über die Grenzen seines Faches hinaus. Er gehörte zu den Gründern der '*Revue critique*' (1866), er schuf mit P. Meyer die '*Romania*' (1872) und errang damit seinem Vaterlande eine ihm gebührende Führerrolle auf dem Gebiete der romanischen Philologie; die vornehme Haltung des Organs und die glückliche Erweiterung des philologischen Programmes durch Hinzunahme der Dialektforschung und der Volkskunde werden ihm in erster Linie verdankt. 1875 trat die Gründung der '*Société des anciens textes*' hinzu: erst von diesem Zeitpunct datiert ein gewisser Vorsprung

Frankreichs auch auf dem Gebiete der Edition altromanischer Sprachquellen. Und während er, glücklicher als sein Vater, dem nicht alle Blütenträume reiften, bemüht war, die Beschäftigung mit der alten Sprache, das Interesse für die alte Dichtkunst und die alten Sagen, das zahlreiche seiner Schüler an französischen und ausländischen Hochschulen förderten, durch Lehr- und Lesebücher, Essais und Bearbeitungen in immer weitere Kreise, ja als ihm ein Töchterlein aufwuchs, selbst in die Kinderstube zu tragen, behielt er für höhere wie für allgemeinere Interessen allzeit Arbeitskraft übrig: aus Pietät gegen den Vater ist er in die Leitung und Mitarbeit der '*Histoire litt. de la France*' tätig eingetreten, nach seinem Eintritt in die Académie nahm er sich alsbald des großen '*Dictionnaire*' an, und noch im vorigen Jahre hat er opfermutig die Redaction des '*Journal des Savants*' auf sich geladen, das durch Entziehung der Subvention in seiner Existenz bedroht schien.

Mit dem höheren Unterrichtswesen Frankreichs wird sein Name für alle Zeit rühmlich verbunden sein. Seit 1866 stand er seinem Vater im Unterricht der altfranzösischen Sprache und Litteratur am Collége de France zur Seite, 1872 wurde er der Nachfolger des zurücktretenden: ein halbes Jahrhundert hindurch hat der Name Paris diesen Lehrstuhl geschmückt. Aber schon seit 1868 hatte Gaston Paris der von Victor Duruy neu geschaffenen École des hautes études als einer ihrer ersten Organisatoren und Lehrer angehört. 1895 übernahm er die Administration des Collége de France, und wenn er damals auch wohl klagte, daß ihn die Geschäfte der wissenschaftlichen Tätigkeit zu entfremden drohten — die gelehrte Welt hat kaum bemerkt, daß seine Arbeitszeit eine neue Einschränkung erfahren hatte.

Von Gaston Paris als Lehrer werden die Nekrologe freudiges Zeugnis ablegen, die zu erwarten sind, wo immer die neuere Philologie gepflegt wird: in den Ländern deutscher und romanischer Zunge, in Holland und Skandinavien, in Rußland und Amerika. Denn von überallher strömten ihm die Schüler zu, ja nicht selten überwogen die Ausländer über die Franzosen. Eine stattliche Reihe umfangreicher Thèses und tüchtiger Editionen ist besonders seit den 80er Jahren aus seiner Schule hervorgegangen. Er spendete Allen aus dem unerschöpflichen Reichtum seiner Kenntnis gedruckter und ungedruckter Quellen, er gab historische und methodologische Winke, er nährte den Enthusiasmus und mäßigte ihn zugleich durch das Gebot strengster Wahrheitsliebe. Im übrigen ließ er seinen Schülern eine Bewegungsfreiheit, die uns oft überrascht. In umfangreichen Besprechungen, die sich gelegentlich zu selb-

ständigen Schriften auswuchsen, hat er zu Erstlingsarbeiten einiger seiner Schüler Stellung genommen: die Studien von Jeanroy über die Anfänge der lyrischen Poesie und von Sudre über die Quellen des Roman de Renard kritisch weitergebildet und dem weitgehenden Chauvinismus Bédiers in der Frage nach der Herkunft der Fabliaux einen bestimmten Widerstand entgegengesetzt. Den orientalischen Einflüssen, für die er hier mit Entschiedenheit eintrat, ist er seit 1875 mit Liebe und zuweilen mit wirklichem Glück nachgegangen.

Diese weitausgreifenden Kritiken und neben ihnen jene Essais wie der über die '*Siete Infantes de Lara*' (1898), wo Gaston Paris die Forschung anderer wiederzugeben scheint und doch bald durch abweichende Gruppierung, bald durch leise nachhelfende Ciselierarbeit dem Ganzen den Stempel seines eigenen künstlerischen Geistes aufdrückt, gehören zu den reizvollsten Urkunden seiner wissenschaftlichen Eigenart. Und höchst persönlich und intim erscheinen seine Widmungen und Vorworte, gerade weil sie die starke Rhetorik verschmähen und die Emphase nur da zulassen, wo es das stärkste seiner Bekenntnisse gilt, das immer wiederholte Bekenntnis zur unbedingten, jede, auch die stärksten Rücksichten und Versuchungen überwindenden Wahrhaftigkeit. Er hat es zum letzten Male ausgesprochen bei seinem Eintritt in die Académie, am Abend eines Lebens, das Beweise genug geliefert hatte, daß es ihm mit der Wahrheit unter allen Umständen heiliger Ernst war. Am 8. December 1870 eröffnete er in dem 'von den Deutschen mit einem eisernen Ring umschlossenen Paris' seinen Cursus mit einer Vorlesung über das Rolandslied und die französische Nationalität (wieder abgedruckt in '*La Poésie du Moyen Âge*' p. 87 ff.), und hier sprach er zu der gespannt aufhorchenden Zuhörerschaar die stolzen und mutigen Worte: '*Je ne crois pas, en général, que le patriotisme ait rien à démêler avec la science ... Je professe absolument et sans réserve cette doctrine, que la science n'a d'autre objet que la vérité, et la vérité pour elle-même, sans aucun souci des conséquences bonnes ou mauvaises, regrettables ou heureuses, que cette vérité pourrait avoir dans la pratique. Celui qui, par un motif patriotique, religieux et même moral, se permet dans les faits qu'il étudie, dans les conclusions qu'il tire, la plus petite dissimulation, l'altération la plus légère, n'est pas digne d'avoir sa place dans le grand laboratoire où la probité est un titre d'admission plus indispensable que l'habileté*'. Wir haben aus eben dieser Zeit ein Document, das uns zeigt, wie er schon damals nach diesen Grundsätzen handelte und forschte: ich meine das Vorwort zu der Abhandlung über den '*Ligurinus*' (1872), ge-

richtet an Rodolphe Reuss, den elsäßischen Patrioten, dem der Krieg, und der Frieden der ihm folgte, zwei Vaterländer geraubt hatte. Mitten in der Zeit der Belagerung, ja unter dem Bombardement hat Gaston Paris eine Untersuchung fertiggestellt, um jenes Heldengedicht auf Friedrich Barbarossa als eine zeitgenössische Dichtung zu erweisen, das seit Senckenbergs Tagen der deutschen Forschung als eine Fälschung galt. Er ahnte nicht, daß zur selben Zeit Albertus Pannenborg der Echtheitsbeweis bereits geglückt war, und er hat später dem jungen Göttinger Historiker mit freudiger Bescheidenheit den Lorbeer gereicht. Aber er war doch schon in einem Puncte über seinen deutschen Rivalen hinausgekommen: er erklärte das Gedicht für das Werk eines südwestdeutschen Autors, während es jener zunächst einem Italiener zuweisen wollte. Und nun hören wir ihn selbst, mit welcher stillen Freude ihn in jenen Tagen des Schreckens und der Trauer die heimliche Arbeit erfüllte: '*Il me semblait piquant de sortir de Paris avec une petite victoire remportée sur la critique allemande, et il ne me déplaisait pas, en ce moment surtout, de restituer généreusement à la couronne poétique de l'Allemagne un fleuron dont elle s'était dépouillée aveuglément elle-même*'.

Wir Vertreter der mittelalterlichen Philologie und Geschichte haben heute durchaus die Ueberzeugung — und vielleicht reicht dieses Gefühl weiter — daß uns unter den fremden Gelehrten keine Gruppe näher steht in Fleiß und Methode, in ihren Zielen und in ihrer Aufgabestellung, als die Franzosen, und weiter, daß der Wettstreit um die Palme von keiner andern Seite mit größerer Ehrlichkeit geführt wird. Jeder von uns kann Namen nennen, die dies Urteil bestätigen, die dieses Lobes würdig sind. Gaston Paris aber war gewiß der Vornehmsten einer, und der Platz, den er einnahm im wissenschaftlichen Verkehr der beiden großen Nationen, wird schwer zu besetzen sein.

Bericht

über die öffentliche Sitzung am 14. November 1903.

Die K. Gesellschaft hielt am 14. November die in ihren Statuten vorgeschriebene öffentliche Sitzung zur Erinnerung an ihren Stifter, König Georg II., ab.

Herr Max Verworn las über Naturwissenschaft und Weltanschauung.

Naturwissenschaft und Weltanschauung.

Von

Max Verworn.

Vorgetragen in der öffentlichen Sitzung vom 14. November 1903.

Es gährt in der Naturwissenschaft. Dinge, die Allen klar und durchsichtig erschienen, haben sich heute getrübt. Langerprobte Symbole und Vorstellungen, mit denen noch vor kurzem ohne Bedenken jeder auf Schritt und Tritt umging und arbeitete, sind ins Wanken gerathen und werden mit Mißtrauen betrachtet. Grundbegriffe, wie die der Materie, erscheinen erschüttert und der festeste Boden beginnt unter den Schritten des Naturforschers zu schwanken. Felsenfest stehen allein gewisse Probleme, an denen bisher alle Versuche, alle Anstrengungen der Naturwissenschaft zerschellt sind. Der Verzagte wirft sich bei dieser Erkenntniß resigniert der Mystik in die Arme, die von jeher die letzte Zuflucht war, wo der gequälte Verstand keinen Ausweg mehr sah. Der Besonnene sieht sich nach neuen Symbolen um und versucht neue Grundlagen zu schaffen, auf denen er weiter bauen kann.

So kommt es, dass heute die Beschäftigung mit allgemeinen, ja mit den letzten Fragen für die Naturwissenschaft wieder einen neuen Reiz gewonnen hat. Während noch vor wenigen Jahrzehnten Naturforscher, die von ihrem engen Arbeitstische aufblickend ihr Auge auf umfassenderen Problemen ruhen liessen, fast durchweg der geringschätzigen Kritik der Fachgenossen verfielen, ist heute, fast möchte ich sagen eine Ueberproduction an naturwissenschaftlichen Publicationen zu verzeichnen, die nicht nur den allgemeinen Fragen der Naturwissenschaft, sondern weit darüber hinaus den tiefsten philosophischen Problemen gewidmet

sind. Es mehren sich wieder die alten Versuche, die Naturwissenschaft zu einer Weltanschauung zu erweitern und auszubauen.

„Die Welt, des Menschen Herz und Geist
Möcht Jeglicher doch was davon erkennen."

Bei diesem Stande der Dinge scheint es in erster Linie geboten, Kritik zu üben und zu prüfen ob und wieweit die alten und neuen Symbole und Vorstellungen der Naturwissenschaft überhaupt ausreichen für den Entwurf eines allumfassenden Weltbildes.

Wenn ich mich durch irgend etwas ermutigt fühle, dieser Aufgabe näher zu treten, so ist es lediglich durch meine Eigenschaft als Physiologe, denn das Gebiet des Lebendigen ist von jeher der Ausgangspunkt für die Bildung einer Weltvorstellung gewesen. Hier hat man seit alter Zeit den wichtigsten Theil des Problems gefunden in der Vereinigung zweier Reihen von Vorgängen, zwischen denen bereits der Mensch in vorgeschichtlicher Zeit eine tiefe Kluft construiert hatte. Man hat die Reihe der körperlichen und die Reihe der geistigen Vorgänge, die noch heute unserer gewohnten Betrachtungsweise einen scharfen Dualismus zeigen, fast immer nur durch die Erforschung der Lebensvorgänge zu einem einheitlichen Weltbilde vereinigen zu können geglaubt. So hat man in der Naturforschung von der Physiologie stets ganz besonders erwartet, daß sie uns einst die Lösung des grossen Weltproblems bringen wird, denn daß es möglich sein müßte, die beiden Reihen von Vorgängen naturwissenschaftlich zu erklären und so eine monistische Weltanschauung auf naturwissenschaftlicher Basis zu schaffen, hat man in der Naturforschung in der Regel von vornherein vorausgesetzt.

Für die Entwicklung unserer kritischen Betrachtung wird es gut sein, an bekannte und gebräuchliche Vorstellungen und Gedankengänge anzuknüpfen. Dabei können wir die Fixierung gewisser Begriffe nicht umgehen, denn volle Klarheit thut hier vor allen Dingen noth. Es handelt sich also in erster Linie für uns um die Festlegung des Begriffs der naturwissenschaftlichen Erklärung in demjenigen Sinne, wie er heute gebräuchlich ist.

Seit alter Zeit bedeutet Natur die Gesammtheit aller sinnlich, d. h. objectiv wahrnehmbaren Dinge, kurz die Körperwelt im Gegensatz zu der Welt der psychischen Vorgänge, die nur subjectiv wahrnehmbar sind. Es würde also naturwissenschaftliches Erklären bedeuten: Zurückführen der Dinge auf die Elemente oder Principien der Körperwelt.

Ich fasse hier den Begriff absichtlich etwas weiter als Du Bois-Reymond in seiner bekannten Rede über „die Grenzen des Naturerkennens", wo er den Begriff definiert: „Naturerkennen — genauer gesagt naturwissenschaftliches Erkennen oder Erkennen der Körperwelt mit Hülfe und im Sinne der theoretischen Naturwissenschaft — ist Zurückführen der Veränderungen in der Körperwelt auf Bewegungen von Atomen, die durch deren von der Zeit unabhängige Centralkräfte bewirkt werden, oder Auflösen der Naturvorgänge in Mechanik der Atome". In dieser Definition ist schon die Annahme der Zusammensetzung der Körperwelt aus Atomen vorausgesetzt. Ich möchte aber in meiner Definition auch die Möglichkeit offen halten, daß man das, was wir Körperwelt nennen, etwa zweckmässiger aus sinnlich wahrnehmbaren Factoren anderer Art bestehend denken könnte, was uns neuere Bestrebungen in der Naturwissenschaft annehmbar zu machen suchen. Ich spreche daher nur allgemein von „Elementen der Körperwelt". Dann würde der Versuch, eine Weltanschauung auf naturwissenschaftlicher Grundlage aufzubauen, kurz gesagt in dem Problem gipfeln, nicht blos die objectiven, sondern auch die subjectiven Vorgänge zurückzuführen auf die Elemente der Körperwelt.

Ist das möglich? Die hervorragendsten Naturforscher haben diese Frage bejaht. Sehen wir zu, wie die Lösungsversuche ausgefallen sind.

Der eine ist bekannt genug. Noch heute steht eine nicht unbedeutende Zahl von Naturforschern mehr oder weniger bewußt auf seinem Boden. Es ist der Versuch des Materialismus. Der Materialismus erklärt kurz und bündig, daß alle psychischen Vorgänge physiologische Functionen der Gehirnsubstanz sind. Ich erinnere Sie an den berüchtigten Vergleich, der aus des grossen Friedrich philosophischer Zeit überliefert ist, und durch den später Karl Vogt in seiner derben Weise alle prüden Gemüther entsetzte, als er erklärte, „daß die Gedanken etwa in demselben Verhältniß zum Gehirne stehen, wie die Galle zu der Leber oder der Urin zu den Nieren". Ich erinnere Sie aber auch an den glänzenden Erfolg, mit dem Du Bois-Reymond auf der Naturforscher-Versammlung zu Leipzig in unübertrefflicher Anschaulichkeit zeigte, dass die materialistische Auffassung in Wirklichkeit eine naturwissenschaftliche Erklärung der psychischen Vorgänge garnicht giebt, noch jemals geben kann.

In der That, selbst wenn wir die vollkommenste Kenntniß besäßen von den physiologischen Ereignissen in den Zellen und

Fasern der Großhirnrinde, mit denen das psychische Geschehen verknüpft ist, selbst wenn wir in die Mechanik des Hirngetriebes hineinschauen könnten, wie in das Getriebe der Räder eines Uhrwerks, wir würden doch niemals etwas anderes finden als bewegte Atome. Kein Mensch könnte sehen oder sonst irgendwie sinnlich wahrnehmen, wie dabei Empfindungen und Vorstellungen entstehen. Die Resultate, welche die materialistische Auffassung bei ihrem Versuch der Zurückführung geistiger Vorgänge auf Atombewegungen gehabt hat, illustrieren denn auch sehr anschaulich ihre Leistungsfähigkeit: Solange die materialistische Anschauung besteht, hat sie nicht die einfachste Empfindung durch Atombewegungen erklärt. So war es und so wird es sein in Zukunft. Wie wäre es auch denkbar, dass jemals Dinge, die nicht sinnlich wahrnehmbar sind, wie die psychischen Vorgänge, ihre Erklärung finden könnten durch eine bloße Zerlegung großer Körper in ihre kleinsten Theile! Es bleibt ja das Atom doch immer noch ein Körper und keine Bewegung von Atomen ist jemals im Stande, die Kluft zu überbrücken zwischen Körperwelt und Psyche. Die materialistische Auffassung, so fruchtbar sie gewesen ist als naturwissenschaftliche Arbeitshypothese, so fruchtbar sie in diesem Sinne auf begrenztem Gebiet auch zweifellos noch in Zukunft bleiben wird — ich verweise nur auf die Erfolge der Structur-Chemie — so unbrauchbar ist sie doch als Grundlage für eine Weltanschauung. Hier erweist sie sich als zu eng. Der philosophische Materialismus hat seine historische Rolle ausgespielt. Dieser Versuch einer naturwissenschaftlichen Weltanschauung ist für immer mißlungen.

„Wir tragen
Die Trümmer ins Nichts hinüber
Und klagen."

Oder sollte sich aus den Trümmern doch noch ein Haus bauen lassen, etwa auf einem anderen Grundstück? Man hat das geglaubt, aber man hat bei den Versuchen nach dieser Richtung zum Theil schon den Boden rein naturwissenschaftlicher Erfahrung verlassen.

Ich meine hier die Bestrebungen eine monistische Weltanschauung zu gewinnen dadurch, dass man sich bereits die kleinsten Theilchen der Materie, die Atome mit psychischen Fähigkeiten ausgestattet denkt. Es ist hauptsächlich dem unermüdlichen Kampfe Haeckels für diese Anschauung zu verdanken, daß sie wohl heute in der Naturwissenschaft die meisten Anhänger aufzuweisen hat. Consequent die Entwicklungsidee auch

auf geistigem Gebiet durchführend stellt sich Haeckel vor, daß eine primitive, noch unbewusste Seele schon eine Eigenschaft jedes Atoms ist, genau so wie bereits jedes Atom nach materialistischer Auffassung mit Kraft begabt ist, und daß durch die Zusammenordnung von Atomen zu Molekülen und weiterhin zu lebendiger Substanz von den einzelligen Protisten an durch die ganze Descendenz bis zu den complexen Zellenstaaten der höheren Pflanzen und Thiere eine immer weitergehende, immer höhere Entwicklung und Complication der Seele entsteht, die ihren Höhepunkt erreicht in dem äusserst subtilen Empfinden, in dem unendlich reichen Gedankenleben des Dichters und Denkers. Die ganze Entwicklung bis zu diesen höchsten Spitzen menschlicher Geistesthätigkeit hinauf beruht allein auf der Combination der Atomseelen.

Man wird gestehen, dass diese Ideen durch ihre einfache Klarheit etwas ungemein Bestechendes gewinnen, namentlich, wenn sie mit so packender Begeisterung und Anschaulichkeit vorgetragen werden wie von dem grossen Jenenser Zoologen. Auch die unmittelbare Herleitung aus der Entwicklungslehre muß dieser Auffassung unter den Naturforschern überall Sympathieen erwecken, und die Klippe, an welcher der Materialismus vollständigen Schiffbruch litt, scheint hier in einfachster Weise glücklich vermieden. Aber ist denn damit der alte Dualismus von Leib und Seele wirklich in monistischem Sinne aufgelöst?

Wir müssen uns hier vor allem einmal die Forderungen klar machen, die wir an eine streng monistische Erklärungsweise stellen müssen, wenn unser Erkenntnißbedürfniß davon befriedigt sein soll.

Die Forderung, alle Dinge auf ein einheitliches Princip zurückzuführen ist eine Consequenz, die sich aus der Natur des Erkenntnißprocesses nothwendig ergiebt. Der Proceß des Erkennens stellt ja das Zurückführen einer Vielheit auf ein gemeinsames Princip vor. Denken wir uns diesen Reductionsproceß weiter und weiter fortgesetzt, so muß er in consequenter Weise zuletzt führen zu einem einzigen Princip. Aber der Proceß des Erkennens enthält nicht blos diese Reduction an sich, sondern die Zurückführung muss auch eine Zurückführung auf bekannte Dinge sein. Nur, wenn eine Vielheit von unbekannten Dingen zurückgeführt ist auf ein bereits bekanntes Princip sprechen wir von einer wirklichen Erkenntniß. Wir müssen also verlangen, daß das letzte Princip einer monistischen Weltanschauung uns unmittelbar als bekannt gegeben ist und keiner Erklärung weiter bedarf, denn es muß ja das einzig wirklich existierende Princip sein und es wäre

daher ein völlig absurdes Unternehmen, das einzig existierende Princip noch weiter definieren zu wollen. Schließlich aber wird uns die Zurückführung der Vielheit nur befriedigen, wenn sie ohne Hypothese auf logischem Wege erfolgt. Jede Hypothese würde unbefriedigend sein, weil sie dem Zweifel Thür und Thor offen läßt. Also: eine monistische Erklärung ist nur da verwirklicht, wo es gelungen ist, die Dinge in hypothesenfreier Weise auf Ein einziges bekanntes Princip zurückzuführen.

Diese unbedingte Forderung scheint mir von der Conception beseelter Atome nicht ganz erfüllt zu sein. Ich gerathe hier mit meinem hochverehrten Lehrer und Freunde Haeckel in eine von uns beiden oft und viel erörterte Differenz. Wir kommen damit nämlich eigentlich nicht über die Zweiheit von Körper und Seele hinaus. Beide bleiben genau betrachtet immer noch unerklärt durch ein gemeinsames Princip neben einander bestehen. Ich habe ja in Wirklichkeit nichts anderes gemacht, als daß ich von der Körperwelt das einfachste Element genommen und ihm die einfachste Form der Seele zugeschrieben habe. Das Verhältniß von Körper und Seele ist dabei genau dasselbe und genau so unverständlich geblieben wie beim grossen menschlichen Organismus. Der Dualismus ist nicht beseitigt, denn wir sind durch nichts im Stande, beide wirklich als Einheit zu erkennen.

Man hat aber dennoch den Monismus zu erreichen gesucht. Fechner, Herbert Spencer, Haeckel, Ebbinghaus und Andere sind hier auf Spinoza zurückgegangen und haben ihre Zuflucht wieder zu der Identitätslehre genommen, indem sie sagten: In letzter Linie ist beides dasselbe, Leib und Seele, nämlich die verschiedene Anschauungsform einer und derselben Substanz. Die Substanz selbst ist nur in ihren beiden Attributen oder Anschauungsformen Körper und Geist oder, wie Spinoza sagt, Ausdehnung und Denken zu erkennen, je nachdem wir sie objectiv von außen oder subjectiv von innen betrachten. Man hat das durch allerlei Allegorieen plausibel zu machen gesucht. Bekannt ist der Vergleich Fechners mit der Kreislinie, die man einmal von der concaven, das andere Mal von der convexen Seite betrachtet.

Wie erfüllt nun die Identitätslehre unsere monistischen Forderungen? Sehen wir zu! Die Zurückführung beider Reihen auf Ein Princip scheint in der That gelungen. Allein dieses Eine letzte Princip ist eine unbekannte Grösse. Man wird einwerfen: Sie ist ja bekannt durch ihre Attribute. Richtig! Aber sie ist

durch diese nicht einheitlich bekannt. Wir kennen nicht die Substanz selbst, sondern wir kennen nur ihre beiden Attribute, eben die beiden Dinge, die wir grade monistisch erklären, d. h. auf Ein Bekanntes zurückführen wollen. Also genau betrachtet, was leistet die Identitätslehre? Entweder sie führt die beiden Reihen zurück auf Ein Princip, die Substanz, dann ist dieses Princip ein unbekanntes und bleibt eine reine Hypothese, die uns nicht befriedigen kann; oder sie hält an dem Bekannten fest, dann stehen die beiden Reihen so unvermittelt nebeneinander wie vorher und der Dualismus der eben herausgeworfen erschien, grinst wieder zur Thüre herein.

Mag man sich drehen und wenden wie man will, weder die Conception der Atombeseelung noch die Identitätslehre überwinden den Dualismus. Es hat sich also als aussichtslos erwiesen, die Trümmer der materialistischen Vorstellung retten zu wollen um aus ihnen Bausteine für eine andere Weltanschauung zu gewinnen. Man muß offenbar radicaler vorgehen und die ganze materialistische Anschauung bis auf ihre Grundlage hinab preisgeben, wenn man zu einer monistischen Weltanschauung gelangen will.

Es ist das Bestreben des genialen Leipziger Chemikers Ostwald, diese Erkenntniß in der Naturwissenschaft zur Geltung zu bringen. Ostwald hat den Begriff der Materie zunächst aus der Naturwissenschaft völlig eliminieren zu können geglaubt, indem er alle Naturvorgänge als energetische Processe d. h. als Arbeitsleistungen darzustellen versuchte, und auf dieser naturwissenschaftlichen Grundlage ist er bemüht gewesen, eine vollständige energetische Weltanschauung aufzubauen, die auch die psychischen Processe als Arbeitsleistungen in sich mit einschließt.

Ostwald's Versuch ist symptomatisch ungemein interessant, denn er bedeutet für die Naturwissenschaft den ersten elementaren Durchbruch der richtigen Erkenntniß, daß sich mit den materialistischen Voraussetzungen der Naturwissenschaft eine einheitliche Weltanschauung nicht gewinnen läßt. Allein es bleibt unsere Aufgabe zu prüfen, ob dieser destructiven Seite von Ostwald's Naturphilosophie ein ebenso starker constructiver Erfolg hinsichtlich eines monistischen Weltgebäudes gegenübersteht. Jedenfalls verdient dieser neuste Versuch, auf naturwissenschaftlicher Basis eine Weltanschauung zu errichten, eingehendere Berücksichtigung.

Die speciell naturwissenschaftliche Seite des Ostwald'schen

Standpunktes ist ja bekanntlich schon oft Gegenstand der Discussion gewesen. Es hat mancherlei erregte Debatten über die Frage gegeben, ob es überhaupt möglich ist, die Naturvorgänge als Energieumsetzungen zu betrachten. Mir scheint diese Frage unbedingt bejaht werden zu müssen. Der naturwissenschaftliche Begriff der Energie, den wir kurz als Arbeit oder Arbeitsfähigkeit definieren können, wie sie in allen Vorgängen der Natur zum Ausdruck kommt, ist älter als die energetische Weltanschauung. Wir haben ihn in der neueren Naturwissenschaft schon lange bei den verschiedensten chemischen, thermischen, electrischen und anderen Processen verwendet, und selbst die zahllosen Naturforscher, welche die atomistischen Begriffe von der Constitution der Materie ihrem naturwissenschaftlichen Denken zu Grunde gelegt haben, sind immer von der Vorstellung geleitet worden, dass mit jeder Atomumlagerung auch stets ein Energieumsatz, eine Arbeitsleistung untrennbar verknüpft ist. Es müssen also von diesem Standpunkte aus alle Naturvorgänge als Energieumsetzungen betrachtet werden können, mag man nun das Bedürfniß fühlen, die Arbeitsleistungen an einem materiellen Substrat sich abspielen zu lassen wie bisher, oder mag man den Begriff der Materie als elementaren Factor vollständig bei Seite lassen wie Ostwald. Es sind das schließlich nur äußerliche Zweckmäßigkeitsfragen für die Darstellungsweise der Naturwissenschaft. Die Möglichkeit, die Naturvorgänge darzustellen, muß jedenfalls für die rein energetische wie für die atomistische Betrachtungsweise die gleiche sein, wenn auch die Schwierigkeiten für die erstere vielleicht etwas größer erscheinen.

Aber hier liegt der Kern unserer Frage nicht. Für unsere Betrachtung handelt es sich darum, ob es, wie Ostwald meint, möglich ist, auch die psychischen Vorgänge als Arbeitsleistungen im naturwissenschaftlichen Sinne zu betrachten und auf diesem Wege zu einem energetischen Monismus zu gelangen. In der That findet Ostwald die monistische Lösung des alten Problems darin, daß er in den psychischen Vorgängen die Aeußerungen einer besonderen Energieform erblickt. Er ordnet damit also die geistigen Vorgänge dem allgemeinen einheitlichen Princip unter, das für ihn den Naturvorgängen zu Grunde liegt.

Dieser einfache Gedanke erscheint zunächst ausserordentlich kühn, denn man ist seit alter Zeit zu sehr daran gewöhnt, die geistige Welt für eine Welt ganz anderer Art zu halten, als die sinnlich wahrnehmbare. Bei genauerem Zusehen aber verliert dieser Lösungsversuch doch mehr und mehr das Abenteuerliche,

das ihm zunächst anzuhaften scheint, und man sucht ihn ruhig zu prüfen. Wenn es sich in Wirklichkeit bei den geistigen Vorgängen um die Entstehung und Umwandlung einer besonderen Energieart handelt, so muß natürlich in erster Linie das oberste Gesetz aller Energetik, das Gesetz von der Erhaltung der Energie gewahrt sein. Man muß also erwarten, daß die psychische Energie bei jedem psychischen Proceß aus anderen Energieformen, z. B. aus chemischer Energie durch Umformung entsteht und bei dem Ablauf des psychischen Processes in andere Energieformen, etwa in Wärme übergeht. Ostwald macht thatsächlich in consequenter Weise diese Annahme. Hier stößt er freilich schon auf die Schwierigkeit, daß es bis jetzt nicht gelungen ist, die geistige Arbeitsform mit den Methoden der Naturwissenschaft, d. h. sinnlich nachzuweisen, wie das sonst mit allen bekannten Energieformen der Fall ist. Allein Ostwald hält die Möglichkeit eines solchen objectiven Nachweises in Zukunft doch nicht für ausgeschlossen.

Es wäre allerdings eine Umwälzung in unserem Leben, wie sie die Menschheit noch nicht gesehen hat, wenn es gelänge, die geistigen Vorgänge objectiv wahrnehmbar zu machen, wie das Schattenbild der Knochen auf einem Röntgenschirme. Der Gehirnspiegel, von dem Kurd Lasswitz in seinen kühnsten Utopieen geträumt hat, wäre realisiert und die intimsten Regungen der menschlichen Seele wären dem kalten Auge der Oeffentlichkeit enthüllt. Indessen es hat noch keine Gefahr und es will mir scheinen, als wenn wir auch der Zukunft in dieser Hinsicht ruhig entgegensehen können.

Betrachten wir nämlich die „psychische Energie“ Ostwald's etwas kritischer, so nimmt sie allen bekannten Energieformen gegenüber eine durchaus eigenartige Ausnahmestellung ein. Alle anderen Energieformen sind nur objectiv, d. h. sinnlich wahrnehmbar; subjectiv, d. h. ohne Vermittelung unserer Sinnesorgane wären sie uns völlig unbekannt. Mit der psychischen Energie verhält es sich grade umgekehrt. Sie ist objectiv nirgends nachweisbar und wir kennen sie nur durch subjective Erfahrung. Wir sehen, es ist eine Energieform, die in ihren Grundeigenschaften gänzlich von der Gesammtheit der uns bekannten Arbeitsleistungen in der Natur verschieden ist. Diese Verschiedenheit aber ist nichts anderes als die alte Kluft, welche die energetische Anschauung grade überbrücken wollte, die Kluft, die eben zwischen der Reihe der psychischen und der Reihe der körperlichen Vorgänge besteht. Es scheint mir daher mit der Annahme, daß den

psychischen Vorgängen eine besondere Energieform zu Grunde läge, nichts gewonnen zu sein, denn wenn wir auch den naturwissenschaftlichen Begriff der Energie auf das psychische Geschehen übertragen, so bleibt die „psychische Energie" immer eine Energieform sui generis, die mit der Gesammtheit der anderen Energieformen nichts wesentliches gemein hat. Das alte Problem ist nicht gelöst.

Es giebt für eine energetische Weltanschauung offenbar überhaupt nur zwei Wege: entweder die psychischen Vorgänge auf die uns aus der Natur bekannten Energieformen zurückzuführen oder für die psychischen Vorgänge eine besondere Energieform anzunehmen, wie wir sie nicht aus der Natur kennen. Jedes Unternehmen in der ersteren Richtung würde genau so scheitern, wie der Versuch des Materialismus, die psychischen Processe aus den Bewegungen von Atomen zu erklären, und man könnte die klassische Betrachtung Du Bois-Reymond's, in der er dem Materialismus sein „Ignorabimus" zurief, mit geringen Veränderungen auch hier zutreffend anwenden, indem man nur die Worte „Materie" und „Atom" durch das Wort „Energie" ersetzte. Man hätte hier nur das energetische Gegenstück zum Materialismus. In der „guten Stube" der Naturwissenschaft könnten die beiden Weltbilder ganz wohl neben einander über dem Sopha hängen, ohne daß die heilige Symmetrie irgendwie gestört wäre. Schlägt man dagegen wie Ostwald den zweiten Weg ein, indem man das psychische Geschehen als den Ausdruck einer besonderen Energieform betrachtet, so ist man zu Hypothesen gezwungen — im Ostwald'schen Sinne dieses Wortes — die ad hoc gemacht werden müssen, die jeder Prüfung unzugänglich sind und die deshalb unser Erkenntnißbestreben unbefriedigt lassen. Man muß annehmen, daß die psychische Energie umwandelbar ist in die bekannten Energieformen, und daß sie einst naturwissenschaftlich, d. h. objectiv nachgewiesen werden kann. So ist also ein energetischer Monismus nur mit Hülfe von Hypothesen zu gewinnen, die nach unseren bisherigen Erfahrungen wenig Aussicht auf Bestätigung haben.

Blicken wir noch einmal zurück auf die verschiedenen Versuche, von naturwissenschaftlicher Basis aus eine monistische Weltanschauung zu gewinnen, so können wir das Ergebniß nur mit einem Gefühl der Depression verzeichnen. Keiner von diesen Versuchen hat in wirklich befriedigender Weise die Forderungen erfüllt, die wir an eine einheitliche Weltanschauung stellen mußten.

Angesichts dieser Thatsache werden sich Viele der Resignation kaum verschließen und Mancher wird auf die Vermuthung kommen, daß es vielleicht überhaupt nicht möglich sei, die alte Frage allein mit Hülfe naturwissenschaftlicher Erfahrung zu lösen. Aber was dann?

In solchen Fällen ist es angezeigt, wieder einmal bis auf die Praemissen zurückzugehen und diese auf ihre Gültigkeit zu prüfen.

Wir waren ausgegangen von dem Dualismus von körperlicher und geistiger Welt, wie ihn die gewöhnliche Betrachtungsweise voraussetzt, und es hat sich uns gezeigt, daß die Naturwissenschaft vergeblich versucht hat, diesen Dualismus zu beseitigen. Wie wäre es, wenn dieser Dualismus von vornherein auf einer Täuschung beruhte? Wie wäre es, wenn die ganze Fragestellung falsch wäre, die dem unüberwindlichen Problem zu Grunde liegt?

Mir scheint wir versuchen hier von einer Erbschaft zu leben, die aus einer Zeit stammt, als unsere Vorfahren eben erst angefangen hatten, sich Gedanken über sich selbst zu machen, von einer Erbschaft, die aber im Lauf der Zeit ihren Werth völlig verloren hat. Die Frage, wann die Unterscheidung von Leib und Seele in das menschliche Denken ihren Einzug gehalten hat, wird kaum je mit einiger Genauigkeit zu beantworten sein. Vielleicht haben die Menschen der palaeolithischen Zeit diese Unterscheidung noch nicht gekannt. Mit einem Anflug von Wahrscheinlichkeit dagegen können wir uns wohl einen Begriff davon machen, was den Menschen der Urzeit zu dieser in die ganze Entwicklung des menschlichen Denkens so tief einschneidenden Unterscheidung geführt hat. Alle ethnologischen und praehistorischen Erfahrungen weisen darauf hin, daß es die Beobachtung des Vorgangs ist, der ins Menschenleben am jähesten eingreift, die Beobachtung des Todes.

Unstreitig mußte die Beobachtung der gewaltigen Gegensätze, die hier plötzlich in die Erscheinung treten, das Nachdenken mächtig anregen. Der nächste Verwandte, der eben noch warm war und athmete, der eben noch thätig war und sprach, jetzt plötzlich liegt er da ohne Athem und Herzschlag, er bewegt sich nicht mehr, er antwortet nicht mehr, wenn man ihn anruft, er regt sich nicht mehr, wenn man ihn anrührt und schüttelt. Was lag da näher, als die Annahme, daß plötzlich etwas aus ihm entwichen sei, davongeflogen in die Luft, etwas Unsichtbares, Hauchartiges, das vorher in ihm athmete und fühlte und sprach. So entstand der Begriff der Seele, die als unsichtbare Triebfeder der

Handlungen in dem sichtbaren Körper wohnt wie in einem Hause, die aber das Haus verlassen, und die — das war nur eine consequente Weiterbildung des Gedankens — wieder andere Körper, etwa Thiere oder künstliche Abbilder des menschlichen Körpers als Wohnstätte aufsuchen kann. Dieser einfache und naheliegende Gedanke hat eine ganz unabsehbare Tragweite gehabt in der Entwicklung des menschlichen Lebens, denn dieser einfache Gedanke ist der Keim geworden, aus dem der Seelenkult, der Geisterglaube, der Heroënkult, die Thierverehrung, die Idolatrie, der Götzendienst und schließlich die höheren Religionsformen entsprossen sind. Alle Völker der Erde bewahren Bruchstücke dieses Entwicklungsganges in ihrem Denken und Glauben und alle Naturvölker zeigen uns die primitiven Glieder dieser Entwickelung noch heute in reiner Form. Der Gedanke, dass die Seele als etwas Unsichtbares im sichtbaren Körper wie in einem Hause wohnt und diesen verlassen kann, dieser Gedanke, der besonders plastisch in der Seelenwanderungslehre der alten Aegypter und Inder zum Ausdruck gekommen ist, dieser selbe Gedanke sitzt auch heute noch in unserm Denken mit großer Zähigkeit fest. Es scheint, als ob solche uralten Vorstellungen der Menschheit im Laufe der Zeit besonders feste und tiefe Wurzeln schlagen im menschlichen Geiste und daß es schließlich kaum noch gelingt, sie auszurotten.

Aber fragen wir uns, ob diese dem naiven Denken der Urzeit entsprungene Conception eines Gegensatzes von Leib und Seele mit ihrer Idee von einem räumlich localisierten Sitz der Seele im Körper wirklich auch heute noch einer scharfen Kritik standhält, so finden wir nicht die leiseste Berechtigung dafür. Der Dualismus von Leib und Seele, der so tief in unserem ganzen Geistesleben wurzelt, erweist sich bei genauerem Zusehen nur als ein scheinbarer, und unser ganzes Streben, die psychischen Erscheinungen naturwissenschaftlich, d. h. durch die Factoren der Körperlichkeit zu erklären, war ein Kampf mit Windmühlen.

Analysieren wir nur, was wir von der Körperwelt wissen! Das Resultat ist für Manchen verblüffend. Ich nehme einen Stein in die Hand. Was weiß ich von ihm? Er ist schwer — das ist eine Empfindung —, er ist kalt — auch eine Empfindung —, er ist hart — wieder eine Empfindung —, er ist schwarz — eine Empfindung —, er hat eine Form — ein Complex von Empfindungen —, er fällt und bewegt sich — ebenfalls ein Complex

von Empfindungen. Etwas anderes als Empfindungen kenne ich nicht von ihm. Ich kann suchen, soviel ich will, ich finde nur Empfindungen. Kurz, was ich „Stein“ nenne, ist nur eine bestimmte Combination von Empfindungen. Dasselbe gilt für jeden Körper, auch für meinen eigenen, auch für den Körper anderer Menschen. So zeigt sich mir, daß die ganze Körperwelt nur aus Bestandtheilen sich aufbaut, die ich als psychische zu bezeichnen gewöhnt bin. Der Gegensatz zwischen Körperwelt und Psyche existiert also in Wirklichkeit garnicht, denn die gesammte Körperwelt ist nur Inhalt der Psyche. Es giebt überhaupt nur Eins, das ist der reiche Inhalt der Psyche[1]).

Wir sehen also, der Dualismus von Leib und Seele ist eine Täuschung. Es ist garkein Dualismus da. Die Körperwelt existiert nicht neben der Psyche, sondern in der Psyche. Es giebt also auch garkein Problem da, wo wir es glaubten. Wir haben nur Gespensterfurcht und Albdrücken gehabt, als wir uns ängstlich quälten, den Dualismus zu überwinden. Für eine ganz vorurtheilslose Betrachtung besteht in Wirklichkeit von vornherein ein Psychomonismus.

Die Erfahrung zeigt indessen, daß wir nur äußerst schwer aus gewohnten Gedankengängen und Anschauungen herauskommen, namentlich, wenn sie dem menschlichen Denken so in Fleisch und Blut übergegangen sind, wie die uralte Vorstellung des Dualismus von Leib und Seele. Unser ganzes Denken ist nach dieser Conception centriert und alle Ideen selbst des täglichen Lebens sind von ihr durchsetzt. Man muß daher in jeder Einzelfrage den Dualismus immer wieder von neuem überwinden und kann sich nur allmählich mit der monistischen Auffassung befreunden, indem man nach und nach alle Consequenzen zieht, die sich daraus ergeben. Das geht nur langsam und man findet dabei immer wieder

---

1) Es wäre vielleicht richtiger, den Ausdruck „Psyche“ nun nicht mehr anzuwenden, da derselbe ja im Gegensatz zu dem Körperbegriff vom dualistischen Standpunkt aus geschaffen ist. Es wäre also vielleicht besser, ein indifferentes Wort, das sich nicht an die alte dualistische Bezeichnungsweise anschließt, zu verwenden. Indessen glaube ich aus didaktischen Gründen, daß es doch wohl zweckmäßiger ist, den Ausdruck Psyche vorläufig beizubehalten. Es würde zu großer Unverständlichkeit führen für Jeden, der zum ersten Male an den hier entwickelten Gedankengang herantritt, wenn man die ihm geläufigen Ausdrücke Seele, Empfindung, Vorstellung, Gedanke, Gefühl etc. durch neue, ihm fremde Worte ersetzen würde. Es genügt ja, wenn man sich bewußt bleibt, daß alle diese Dinge nicht mehr einen Gegensatz zu körperlichen Dingen bedeuten sollen.

von neuem Schwierigkeiten, indem man unwillkürlich immer wieder in die dualistische Denkweise zurückverfällt. So ungeheuer fest sitzt dieser alte Menschheitsgedanke.

So wird man auch in der Frage, wie die Naturwissenschaft zur Welterklärung stehen soll, immer wieder versucht sein, in die Fehler und Schwierigkeiten der dualistischen Denkweise zurückzugleiten, solange man sich nicht für diese Frage die Consequenzen klar macht, die sich von unserem Erkenntnißstandpunkte ergeben. Man wird sagen: es läßt sich doch nicht leugnen, daß zwischen dem Körper und der Empfindung eines Menschen der fundamentale Unterschied thatsächlich besteht, daß ich den einen sinnlich wahrnehmen kann, die andere nicht, ein Unterschied, über den ich auch nicht hinwegkomme, wenn ich die Körperwelt ebenfalls als Empfindungscomplex bezeichne. Dann gäbe es immer zwei Arten von Empfindungen, die einen, die Körper, sinnlich wahrnehmbar, die anderen nicht, und ich wäre so klug wie zuvor. Kurz, man wird hier denselben Einwand machen, den ich vorhin gegen Ostwald's energetische Weltanschauung erhoben habe, die auch zwei Arten von Energie kennt. Allein hier liegt wieder ein typisches Abspringen vom consequenten Verfolg des monistischen Gedankens nach der Seite des Dualismus vor. Es spukt hier wieder die alte Vorstellung von dem räumlichen Sitz einer unsichtbaren Seele im Körper. Aber wie absurd ist diese Idee, wenn man die Körperwelt als Empfindungscomplex erkannt hat! Ein Empfindungscomplex als Sitz einer Empfindung! Alle diese Schwierigkeiten bestehen in Wirklichkeit garnicht. Man construiert wieder ein Problem, wo keins ist. Wir brauchen ja nur die Grundvorstellung, daß die ganze Welt aus psychischen Bestandtheilen sich aufbaut, consequent zu verfolgen. Dann kann die Aufgabe aller Wissenschaft nur darin liegen, diese Inhaltsbestandtheile zu ordnen und ihre Beziehungen zu einander zu ermitteln.

Ich kann also beispielsweise folgendes feststellen. Die Empfindung „blau" besteht, wenn ein Lichtstrahl von bestimmter Wellenlänge durch Vermittelung eines Auges in bestimmten Zellen der Großhirnrinde bestimmte Stoffwechselvorgänge hervorruft. Sind diese Bedingungen erfüllt, so muß die Empfindung „blau" vorhanden sein. Sie ist gebunden an diese Bedingungen. Das ist eine naturwissenschaftlich ermittelte Gesetzmäßigkeit. Gehört das Auge und der nervöse Apparat mir, so ist die Empfindung mit dem Empfindungscomplex „Ich" verknüpft. „Ich" habe die

Empfindung. Gehören die Organe einem anderen Menschen und sind sonst die gleichen Bedingungen erfüllt, so hat „Er“ die Empfindung „blau“. Daß ich nicht die Empfindung „blau“ sehen oder sonstwie wahrnehmen kann, die der Andere hat, liegt doch einfach daran, daß eben die Empfindung „blau“ in diesem Falle verknüpft ist mit dem Empfindungscomplex „Er“, nicht mit dem Empfindungscomplex „Ich“. Er sieht „blau“, nicht ich. Ich kann ja nur etwas wahrnehmen, was sich mit dem Empfindungscomplex „Ich“ verknüpft. Ich kann nicht als Er sehen, denn „Ich“ und „Er“ stehen ja einander gegenüber und schließen sich aus. Es liegt also ein ganz absurder Widerspruch in der Forderung, die Empfindungen Anderer objectiv wahrnehmbar zu machen. Hier existiert eben in Wirklichkeit garkein Problem, und damit fallen die Schranken zwischen der Naturwissenschaft und der Psychologie, denn die gesammte Welt ist der naturwissenschaftlichen Erforschung ebenso zugänglich wie der psychologischen. In Wirklichkeit analysieren wir in beiden Fällen die Welt nur psychologisch. Darin besteht alle Forschung.

Wir suchten eine Weltanschauung, die alles zurückzuführen vermag auf Ein Princip. Dieses Princip sollte bekannt sein, und die Zurückführung sollte ohne Hypothese geschehen. Ich glaube diese Forderungen sind von dem hier entwickelten Standpunkt aus, der in manchen Beziehungen den Anschauungen verwandt ist, wie sie in neuerer Zeit von Avenarius, von Mach, von Ziehen und Anderen geäußert worden sind, in vollem Umfange erfüllt. Wir haben alles auf Eins zurückgeführt, das ist die Psyche; das Eine ist uns bekannt, denn der Inhalt der Psyche ist uns direct gegeben; und die Zurückführung hat jede Hypothese vermieden.

Aber man wird fragen: Was ist damit erreicht? Ich muß sagen: wenig und viel. Wenig, wenn man die Arbeit auf den einzelnen Forschungsgebieten betrachtet. Hier bleibt alles beim Alten. Die Methoden, die Symbole, die Thatsachen, die Zusammenhänge werden nicht berührt. Die Arbeit geht ihren Weg. Viel, wenn man die allgemeinen Voraussetzungen aller Forschung ins Auge fasst. Hier haben wir den großen Vortheil gewonnen, daß wir davor bewahrt werden, immer und immer wieder Zeit und Mühe zu vergeuden an die Lösung eines Problems, das in Wirklichkeit nicht existiert.

Schließlich noch Eins. Der praehistorische Mensch hatte die Idee einer Trennung von Leib und Seele gebildet beim Anblick des Todes. Die Seele trennte sich vom Leibe und führte ein

selbstständiges Dasein. Sie fand keine Ruhe und kam wieder als Geist, wenn sie nicht durch sepulcrale oder fetischistische Ceremonieen gebannt wurde. Furcht und Aberglauben ängstigten den Menschen. Die Reste dieser Anschauungen haben sich bis in unsere Zeit gerettet. Die Furcht vor dem Tode, d. h. vor dem, was nachher kommen wird, ist noch heute weit verbreitet. — Wie anders gestaltet sich das alles vom Standpunkte des Psychomonismus! Da die psychischen Erlebnisse des Individuums nur zu Stande kommen, wenn bestimmte, gesetzmäßige Verknüpfungen existieren, so fallen sie weg, sobald diese Verknüpfungen irgendwie gestört werden, wie das ja schon während des Tages unaufhörlich geschieht. Mit den körperlichen Veränderungen beim Tode hören diese Verknüpfungen ganz auf. So kann also keine Empfindung und Vorstellung, kein Gedanke und kein Gefühl des Individuums mehr bestehen. Die individuelle Seele ist tot. Dennoch leben die Empfindungen und Vorstellungen und Gefühle weiter. Sie leben weiter über das vergängliche Individuum hinaus in anderen Individuen, überall da, wo die gleichen Complexe von Bedingungen existieren. Sie pflanzen sich fort von Individuum zu Individuum, von Generation zu Generation, von Volk zu Volk. Sie wirken und weben am ewigen Webstuhl der Seele. Sie arbeiten an der Geschichte des menschlichen Geistes.

So leben wir alle nach dem Tode weiter als Glieder in der großen, zusammenhängenden Kette geistiger Entwickelung.

Die K. Gesellschaft übersendete Herrn Lipschitz in Bonn am 9. August 1903 zu seinem 50jährigen Doctor-Jubiläum folgende Adresse:

Hochgeehrter Herr Jubilar!

Zur fünfzigsten Wiederkehr des Tages, an dem Sie die Doktorwürde erlangten, bringt Ihnen die Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen ihre besten Glückwünsche dar.

In diesem Augenblicke auszusprechen, was Ihnen die mathematische Wissenschaft verdankt, ist uns um so mehr Bedürfnis, als Ihre Verdienste, auf breitester Grundlage ruhend, sich über alle Teile der Mathematik erstrecken, und die Würdigung solch universeller Leistungen nicht verabsäumt werden soll angesichts der Erfolge, welche durch rasches Vordringen in bevorzugten Richtungen die neue Zeit errungen hat. Vielmehr kann gerade der gegenwärtigen Generation eine Persönlichkeit als Vorbild dienen, die wie Sie die mathematische Wissenschaft im ganzen Umfange zu verstehen und zu vertreten strebt!

Bereits in Ihren ersten Publikationen tritt diese seltene Vielseitigkeit hervor, und wenn wir heute den Inhalt Ihrer Arbeiten überblicken, so sehen wir, wie Sie von der theoretischen Physik auf der einen bis zur abstrakten Zahlenlehre auf der anderen Seite das Reich der Mathematik umspannen. Während Sie über die Verteilung des Magnetismus und der Elektrizität, über die Bewegung flüssiger Massen und die Wellen in einem elastischen Medium wertvolle Beiträge liefern, eine interessante Formel für die Dichtigkeit der Schichten im Innern der Erde aufstellen, sinnen Sie zugleich über asymptotische Gesetze arithmetischer Funktionen nach und behandeln Eigenschaften von Reihen, die in der Folge für die Zahlentheorie von fundamentaler Bedeutung geworden sind.

Ihre eigenartigsten Schöpfungen gewinnen Sie durch die Methode der Generalisation und die treffende Handhabung des analytischen Kalküls. Aus eben diesen Quellen fließt Ihre Erweiterung des Begriffes der komplexen Größen. Indem Sie die Invarianten der allgemeinen quadratischen Differentialformen entdecken und zur Klärung unserer Anschauungen über Mechanik und Geometrie in höheren Räumen verwenden, zeigen Sie, wie diese Gebiete in mannigfacher Weise durch das Band der Variationsrechnung und Algebra zusammenhängen und liefern neue Belege für die geschlossene Einheit der mathematischen Disziplinen.

In dem Streben nach Generalisierung der Fragestellungen und bei dem Eindringen in die entfernteren Regionen abstrakt mathematischen Denkens lassen Sie nicht die Sicherung des vorhandenen Besitzstandes der Wissenschaft außer acht. Sie durchdenken vielmehr aufs schärfste die Beweismethoden für den Fundamentalsatz der Algebra, die Darstellung willkürlicher Funktionen durch Fouriersche Reihen, die Möglichkeit, ein System von reellen Differentialgleichungen zu integrieren, und können endlich, ausgestattet mit den zuverlässigsten Mitteln der Kritik, an die große Aufgabe herantreten, das System der Analysis von den Grundbegriffen an in stetigem Zusammenhange darzustellen. So schufen Sie ein Lehrbuch der Analysis, wie es in dieser tiefen Auffassung und wissenschaftlichen Bedeutung die deutschen Mathematiker bis dahin nicht besaßen, und das noch manche junge Generation Ihnen zu lebhaftem Danke verpflichten wird.

Göttingen, im August 1903.

Ueber das in der Festschrift zur Feier des hundertfünfzigjährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften mit dem Gaußischen Tagebuche reproducierte Porträt „des 26-jährigen Gauß".

Von

F. Klein und K. Schwarzschild.

Ueber das in Rede stehende Porträt finden sich in den Vorbemerkungen, mit denen der eine von uns die Herausgabe des Gaußischen Tagebuchs begleitete, folgende Angaben:

Das Porträt des 26-jährigen Gauß, dessen Reproduction an die Spitze dieser Veröffentlichung gestellt werden konnte, geht auf das Original zurück, welches im Sommer 1803 von Schwarz in Bremen angefertigt und von Gauß an Olbers geschenkt wurde, der darüber am 2. August jenes Jahres an Gauß schreibt: „Vor allen Dingen meinen wärmsten, innigsten Dank für das mir so angenehme, unschätzbare Geschenk Ihres Porträts, das mir unser Schwarz gebracht hat. Es ist glücklicherweise ganz zum Erstaunen ähnlich und frappiert Alle sogleich, die es ansehen und Sie gekannt haben. Schwarz hat sich selbst übertroffen: keiner Ihrer Züge ist verfehlt." Es ist uns leider nicht möglich gewesen, die Wiedergabe nach dem Original selbst anzufertigen, vielmehr wurde hierzu eine Photographie des Originals benutzt, die sich auf der hiesigen Sternwarte befindet und die zu ihrer Beglaubigung folgende Unterschrift trägt: „Auf seinen Wunsch bezeuge ich dem Navigationslehrer Herrn Dr. Breusing, daß obige Photographie ein getreues Abbild einer Kreidezeichnung des Astronomen Prof. Dr. Gauß in Göttingen ist. Als Ehemann von Marie, geb. Focke, einer Enkelin des Astronomen Dr. Olbers, bin ich im Besitze des Hauses, der Sternwarte und einer kleinen Sammlung näherer Freunde des seligen Großvaters, unter denen sich auch das

obige Bild des verstorbenen Prof. Gauß befindet. Fräulein Sophie Hepke, eine 86-jährige noch lebende Nichte des seligen Astronomen Dr. Olbers, rühmte noch kürzlich diese Zeichnung als ein sehr gelungenes Bild des Professor Gauß in jüngeren Jahren, den sie im Hause ihres Onkels öfter gesehen und kennen gelernt hatte.“

„Bremen, Nov. 27. 1865.“ „J. L. Tölken, Dr. med.“ —

Das Bild ist von Dr. Breusing an Geheimrath Schering in Göttingen im Jahre 1890 geschenkt und nach dessen Tode 1897 von Prof. Schur für die Göttinger Sternwarte angekauft wurden.

Niemand zweifelte an der Authentizität des Bildes, welches 10 Jahre nach dem Tode von Gauß in so formeller Weise beglaubigt worden war, und so wurde es außer in der Festschrift der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften 1901 noch einmal im Jahre 1902 bei Gelegenheit der Versammlung der astronomischen Gesellschaft in Göttingen reproduciert und in der Nachbildung an zahlreiche Astronomen verteilt. Kurz nach der Versammlung machte Herr Dr. Cohn, Observator der Sternwarte in Königsberg, hierher die Mitteilung, daß das Bild Zug um Zug übereinstimme mit einer Zeichnung, die ihm als Schwiegersohn des Astronomen C. F. Peters durch Erbschaft aus dem Besitze der Familie Peters zugefallen war und die auf dieser Seite stets als Darstellung von Bessel gegolten hatte!

Die alarmierende Nachricht veranlaßte uns zu weitgehenden Recherchen, die namentlich von dem kürzlich verstorbenen Direktor der Göttinger Universitätsbibliothek, Geheimrath Dziatzko, auf's emsigste betrieben wurden. Mannigfache Hülfe leisteten dabei:

Observator Dr. F. Cohn, Königsberg,
Direktor bei der Physikal.-Technischen Reichsanstalt
E. Hagen, Charlottenburg,
Bibliotheksdirektor Boysen, Königsberg,
„ Erman, Breslau,
Fräulein E. Erman, Steglitz,
Frau Geheimrath Schering, Göttingen,

denen allen hier der beste Dank ausgesprochen sei. Insbesondere hat Herr E. Hagen uns immer wieder mit dem Material und den Kenntnissen unterstützt, die ihm als Enkel Bessel's zur Verfügung standen.

Es handelt sich um die Entscheidung zwischen zwei Familientraditionen. Das Resultat seiner Untersuchungen hat Geheimrath Dziatzko wenige Tage vor seinem Tode in einem ausführlichen Bericht zusammengefaßt, dem die folgenden Darlegungen sich zum grossen Teile wörtlich anschließen.

1. Das Göttinger angebliche Gaußbild [im Folgenden kurz = B G.] und das Königsberger Besselbild aus dem Besitz der Frau Prof. Peters [= B K.] geben beide dieselbe Person wieder und gehen auf dasselbe Original zurück, oder das eine ist die getreu benutzte Vorlage des andern. Bei der Photographie B G. gilt dies natürlich nicht vom vorliegenden Bilde selbst, sondern von seiner Vorlage, die im Besitz von Olbers gewesen war.

2. Die Beglaubigung von B G. reicht nicht bis auf Olbers selbst oder dessen nächste Umgebung zurück, sondern nur auf die zweitnächste Generation nach Olbers, abgesehen von der in der Unterschrift erwähnten 86-jährigen Nichte von Olbers. Ja, die Berufung auf diese beweist anscheinend, daß die Tradition über die dargestellte Person in der Familie nicht mehr recht lebendig war.

Der Dr. med. J. L. Tölken in Bremen, von dem die Unterschrift des Jahres 1865 stammt, hatte eine Enkeltochter von Olbers, Marie Focke, zur Frau. Die Beglaubigung Tölken's bezieht sich zunächst auf die Uebereinstimmung von B G. mit der in seinem Besitz befindlichen, von Olbers herstammenden Kreidezeichnung, die Tölken (und seine Frau) natürlich sicher für das Bild von Gauß hielten. Uebrigens hat nach schriftlicher und mündlicher Mitteilung von Frau Schering auch Breusing n i e daran gezweifelt, daß das Bild Gauß darstelle, noch Schering selbst, welcher es von Breusing im Jahre 1890 geschenkt erhalten hat.

3. Dagegen ist B K. als Besselbild sehr viel besser, wenn auch nicht völlig lückenlos beglaubigt. Es ist zur Zeit im Besitz der Wittwe von C. F. W. Peters in Königsberg, aus dem Nachlaß ihres Mannes stammend. C. F. W. Peters hat Reproduktionen des Bildes herstellen lassen, von denen sich Exemplare bei verschiedenen Nachkommen Bessel's finden. Die Herren E. Hagen und F. Cohn geben übereinstimmend an, daß das Bild aus dem Nachlaß des Conferenzrathes H. C. Schumacher zunächst an C. A. F. Peters und dann an dessen Sohn C. F. W. Peters gelangt ist. Diese Angabe wird in gewissem Grade belegt durch einen noch vorhandenen, im Besitze von Herrn E. Hagen befindlichen Brief, den H. C. Schumacher am 28. 7. 1846 an den damaligen Professor der Kunstgeschichte A. Hagen in Königsberg gerichtet hat. In diesem Briefe erwähnt H. C. Schumacher eine Kreideskizze Bessel's, welche in früheren Jahren von dem talentvollen Maler Herterich in Altona angefertigt worden sei und die er dem Prof. Erman in Berlin für ein

Besselalbum angeboten habe[1]). Man hat die Entstehung dieser Skizze in das Jahr 1825 zu verlegen. Damals war Bessel seit seiner Uebersiedelung nach Königsberg zum ersten Male in jener Gegend, und zwar in Hamburg, um Instrumente von Repsold in Empfang zu nehmen. Von dort aus besuchte er auch Olbers in Bremen auf einen Tag (vergl. Briefwechsel zwischen Olbers und Bessel, II 269 ff. besonders 274, 276).

Ein bestimmtes ungefähr gleichzeitiges Zeugniß dafür, daß eben jenes Herterich'sche Besselbild an den älteren C. A. F. Peters und dann an den Sohn C. F. W. Peters gelangte, fehlt allerdings noch. C. F. W. Peters, der Sohn, zweifelte nach einem von ihm an E. Hagen gerichteten Briefe (vom 19. 6. 1889) freilich nicht im mindesten daran, die Herterich'sche Kreideskizze von Bessel zu besitzen. *Da er schreibt, daß Dr. Schumacher*[2]) *in Bremen, der einem Werke das Herterich'sche Bild angeblich beigeben wollte, sich nicht an ihn gewandt habe, so mußte er sicher jener Ueberzeugung sein.* Und da er wegen der Aehnlichkeit der Skizze sich auf Vater und Sohn Schumacher, sowie besonders auf seinen eigenen Vater († 1880), der gerade zur Zeit der Aufnahme in Altona gewesen sei (1825), beruft, so treten diese selbst als Zeugen für Bessel als Gegenstand der Herterich'schen Skizze und für C. F. W. Peters als deren Besitzer auf.

4. Vielleicht ist in der Notiz des Peters'schen Briefes von 1889, „daß in Bremen noch ein Bild Bessels aus seiner Jugendzeit — wohl aus dem Nachlasse von Olbers — existire,“ der Rest einer Kenntniß von jener Dublette des Herterich'schen Besselbildes zu sehen, die in Bremen selbst damals in der Tölken'schen Familie für ein Gaußbild gehalten wurde. Möglicherweise liegt aber eine Verwechselung mit dem kleinen Posch'chen Gypsmedaillon Bessels aus dem Jahre 1810 vor, das für den von Peters erwähnten Anlaß zur Reproduction benutzt wurde (Abhandl. des Naturwiss. Ver. zu Bremen, 11. Bd. [1889] Taf. 3).

5. Was das Verhältniß von BG. zu BK. betrifft, so ist zunächst das unter 1) Angeführte festzuhalten. An sich wäre möglich, daß Bessel 1825 in Altona vom gleichen Maler Herterich zwei Zeichnungen von sich hätte machen lassen, eine für

---

1) Nach Angabe von Herrn G. R. Hagen ist dieses Album nie zu Stande gekommen.

2) Dieser Dr. Hermann A. Schumacher, s. Zt. Minister-Resident in Bremen, war mit den beiden Astronomen Schumacher nicht verwandt.

Schumacher und eine für Olbers. Wenn er beide persönlich jenen Gelehrten überreichte, erklärte sich genügend das Schweigen über das Bild in dem Briefwechsel von Olbers und Bessel (a. O.). Möglich ist aber auch, daß Olbers, der bereits im Jahre 1810 von Bessel eine Kopie seines kleinen Gypsmedaillon's erhalten hatte, von diesem nicht von neuem beschenkt wurde, sondern jene Herterich'sche Kreidezeichnung für sich selbst copieren ließ, durch Herterich oder — wahrscheinlich — durch einen Andern. Auch so wäre das Schweigen von dem Bilde im Briefwechsel ausreichend motivirt. Für diese letztere Annahme spricht eine Vergleichung der beiden Bilder selbst. BK. giebt nur den Kopf, Hals und obersten Theil der Brust, letzteren skizzenhaft, wieder; die Zeichnung reicht auch nicht bis ans untere Ende des Blattes. In BG. dagegen ist die Zeichnung der Brust nach unten zu wesentlich verlängert, bis ans Ende des Blattes fortgeführt und dieses selbst ist um $2^1/_2$ cm höher. Aber die Zeichnung ist nur auf der rechten Seite des Bildes (der linken der Person) ausgeführt, auf der linken dagegen nicht weitergeführt als in BK., so daß in der Darstellung des Oberkörpers rechts eine große Lücke erscheint. Augenscheinlich wollte der Besteller das Bild in bestimmter Höhe haben, vielleicht um es neben einem andern von gleicher Größe aufzuhängen. Ja es scheint, als ob der unterste Rand der Verlängerung in einer Breite von 1 cm selbst erst nachträglich zugefügt wurde.

Wenn Vorstehendes richtig ist, so ist bei einer Vergleichung der Aehnlichkeit des Bildes mit andern Bessel- und Gaußbildern allein von BK. auszugehen und BG. als freihändige Kopie von BK. bei Seite zu lassen.

6. Als Zeugen für die Aehnlichkeit des Bildes mit Gauß oder Bessel kommen zunächst Aeußerungen von Personen in Betracht, welche den Einen oder Andern noch im Leben gekannt haben. Dabei ist Gauß freilich insofern in ungünstigerer Lage als er 7 Jahre älter war als Bessel, seine Bekannten also nur einen älteren Mann in Erinnerung hatten, und als BK. sehr viel mehr Leuten bekannt geworden ist als BG. Für BG. als Gauß spricht positiv nur das 86-jährige Fräulein, dessen unter 2) gedacht ist, sowie der Mangel eines Widerspruchs und Zweifels auf Seiten des Herrn Geheimraths Schering. BK. als Bild von Bessel ist von Vielen anerkannt nach vorliegenden brieflichen Zeugnissen (vergl. auch das in No. 3 Mitgetheilte), insbesondere hat Frau Consul Lorck in Königsberg, die noch lebende Tochter Bessel's, als sie von C. F. W. Peters eine Reproduktion des

ihr bis dahin völlig unbekannten, weil eben auf der Reise angefertigten BK. Bildes erhielt, keinen Augenblick daran gezweifelt, daß es ihren Vater darstelle.

7. Auch eine Vergleichung des fraglichen Bildes mit den andern bekannten Bildern von Gauß und Bessel spricht bei längerer Betrachtung immer mehr für Bessel. Charakteristisch für ihn scheint Heiterkeit und Lebendigkeit des Wesens gewesen zu sein. Sie tritt deutlich zu Tage in BK. wie in allen Besselbildern, besonders auch in dem Gypsmedaillon von 1810 (s. unter 4. am Ende), dagegen nicht in den Gaußbildern. Von diesen fehlt freilich leider das Schwarzische Bild von 1803 zur Vergleichung. Dagegen besitzt die Göttinger Universitäts-Bibliothek sowie das Gauß-Archiv je eine Gipsbüste des jugendlichen Gauß. Vermuthlich ist es das „aus Gyps gegossene Porträt“ von Gauß, welches im Briefwechsel zwischen Gauß und Bolyai, herausgegeben von Frz. Schmidt und P. Stäckel (1899), S. 95 erwähnt wird. Jedenfalls besteht zwischen jener Gipsbüste und BK. oder BG. keine Aehnlichkeit, aber im Gesichtsausdruck auch nicht mit dem im 7. Bande der Astronomischen Nachrichten (herausgegeben von H. C. Schumacher) (1829) enthaltenen Porträt von Gauß, zu welchem das gegenwärtig in der Universitäts-Bibliothek befindliche, aus dem Besitz der Frau Peters stammende Gaußbild ohne jeden Zweifel die Vorlage war.

Von Aeusserlichkeiten in der Kopfbildung von Bessel wird außer dem Haarwuchs die besonders starke und breite Bildung des oberen Theiles der Nase (unter der Wurzel) erwähnt (in einem Briefe des Bibl.-Direktors Dr. Erman in Breslau) sowie der etwas nach außen gerichtete Blick des einen Auges (Brief des Hrn. E. Hagen in Charlottenburg). Letztere Eigentümlichkeit ist in BK., dem Original, noch zu vermuten, (das linke Auge), nicht mehr in BG., der Kopie. In Gaußbildern beobachtet man nichts davon. Die Bildung der Nase stimmt in BK. mit ersterem Merkmal gut überein, weicht in der Gaußbüste durchaus ab; viel geringer scheint die Abweichung in der Lithographie von 1829 und dem entsprechenden Göttinger Bilde von Gauß.

Das Costüm und die Haartracht der Bilder entspricht nach Angabe der Direktion der Freiherrl. v. Lipperheide'schen Costümbibliothek der Mode der Jahre 1803—1810.

8. So gut alles in allem die Tradition für Bessel in dem Kreise der Astronomenfamilien Schumacher und Peters gesichert scheint, so fehlt leider noch die Gegenprobe. Trotz eifriger Be-

mühungen von Herrn Prof. Schilling in Bremen hat sich dort bisher weder das Original von B G., noch jenes oben erwähnte, von Schwarz im Jahre 1803 angefertigte Gaußbild auffinden lassen.

Wer aber die vorstehenden Thatsachen prüft und die verschiedenen Bilder mit einander vergleicht, der wird nicht mehr im Zweifel darüber sein können, daß die Entscheidung als vollkommen gesichert zu betrachten ist: *das angebliche „Porträt des 26-jährigen Gauß" ist in Wirklichkeit ein Bild von Bessel.*

Die irrige Beglaubigung des Bildes als eines Gaußporträts ist wohl so zu erklären, daß beim Tode von Olbers († 1840) die hinterlassenen Bilder unter den Sohn und die Erben der bereits verstorbenen Tochter getheilt wurden, daß aber mit der Tochter die lebendige Kenntniß von den dargestellten Personen der Porträtbilder aus diesem Zweige der Familie geschieden war. Erhalten hatte sich nur die Erinnerung an ein älteres Bild von Gauß, welches Olbers besessen hatte, und dieses meinte das Ehepaar Tölken in jenem Besselbild zu besitzen.